图论基础教程

赵宏量　彭太华

西南师范大学出版社

图论基础教程

赵宏量　　彭太华　编著

西南师范大学出版社
一九八八年·重庆

图论基础教程

赵宏量　彭太华　编著

西南师范大学出版社出版
（重庆　北碚）
新华书店重庆发行所发行
达县新华印刷厂　印刷

*

787×1092　1/32　印张：6.5　字数：141千
4月第一版　1988年4月第一次印刷
印数　3,000

*

ISBN 7—5621—0080—2/G·55

定价：1.44元

目　　录

图论基础教程

导　言

图论是近二十年来发展十分迅速，应用比较广泛的一个新兴的数学分支。特别是近十多年来，它的发展更是惊人。在当今世界知识爆炸的时代，科学技术突飞猛进，信息量像暴风雪般的增加，各门学科互相渗透。在许多领域，诸如物理、化学、生物学、地理学、运筹学、计算机科学、信息论、系统论、控制论、网络理论、社会科学以及经济管理等等方面，图论都有着广泛的应用。因此，图论受到了全世界数学界和工程技术界乃至经营决策管理者，越来越广泛的重视。

另方面，图论与数学的其它分支，如群论、矩阵论、概率论、拓扑学、数值分析、组合数学等都有着密切的联系。事实上，图论为任何一个包含了一种二元关系的系统提出了一个数学模型，部份地，也因为它使用了图解式的表示法，图就具有了一种直观的和符合美学的外形。在这个领域里，虽然有一些结果在本质上看来似乎是初等的，但是，图论中的确存在着大量的、十分错综复杂的问题，对于这些问题往往可以难住最好的，甚至是声誉卓著的极其老练的数学家。

总之，图论是一门十分有用的学科，无论从理论和实践两方面来看，都是前途无量的。

※　※　※　※　※　※　※

关于图论的历史和现状

1. 从Euler到Kirchhoff的漫长一百年。

图论的开拓者，大都公认是18世纪的大数学家欧拉（Euler 1707—1782），早在1736年，他曾研究过著名的哥尼斯堡（Königsberg）七桥问题，当时是作为一种迷宫游戏研究的。欧拉极其漂亮地解决了这个问题，而且还把这个问题深入一步地一般化了，并给出了关于一个图存在Euler路的判定法则（即此图必须是连通的，并且每个顶点都与偶数条边相关联。）

Euler之后，约莫过了一个世纪，到1847年克希霍夫（Kirchhoff）为了解一类线性联立方程组而发展了树的理论。这个线性方程组描述一个电网络的每一条支路中和环绕每一个回路的电流的。他虽然是一个物理学家，但他象数学家那样思考问题，他把一个电网络和其中的电阻、电容、电感等等抽象化了。他用一个只由点和线组成的相应的组合结构来代替原来的电网络，而并不指明每条线所代表的电气元件的种类。这样一来，克希霍夫实际上是把每个电网络用它的基本图来代替。他还证明，为了解这个方程组，并不需要分别考虑一个电网络的图中的每个圈。与此相反，他用一个简单而有力的构造法指出，只要考虑一个图的任何一个“生成树”所能决定的那些独立圈就够了。他的这个方法，现在已经成为一个标准的方法，例如下面画出了一个设计好了的电网络N，它的基本图G和一棵生成树T。

2. 克希霍夫到凯莱（Cayley）的十年。

1857年，凯莱非常自然地在有机化学的领域中发现了一族重要的图，称为树。他从事于计数有给定的碳原子数的n的

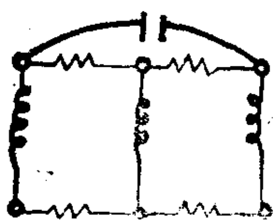


图1电网络N

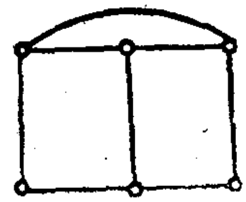


图2相当于N的基本图G

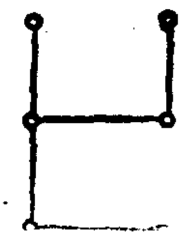
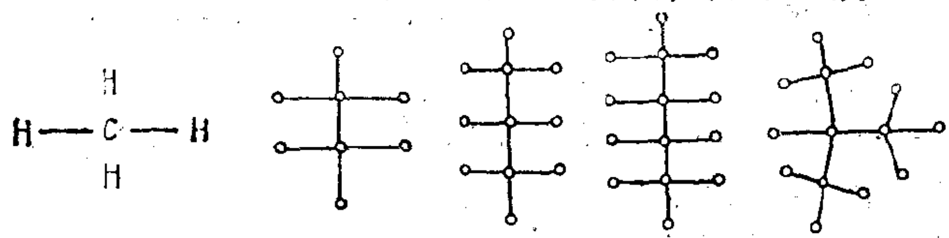


图3G的一棵生成树T

饱和碳氢化合物：C_nH_{2n+2}的同分异构物，如下图所示：



甲烷　乙烷　丙烷　丁烷　异丁烷

（图4）（最小的饱和碳氢化和物）

当然，凯莱抽象地重新叙述了这个问题：求有P个点的树的数目，其中每个点的度等于1或4。他未能立即成功地解决这个问题，所以他改换了这个问题，逐步计数了：有根树（其中有一个点与其各点有区别的树）、树、每个点的度至多等于4的树，从而解决了那个化学问题。后来，约当（Jordan）作为一个纯数学家，他从纯数学的对象独立地发现了树（1869年）。西勒维斯特（Sylvester）于1882年曾说过：约当这样做"一点也没有察觉到它与现代化的化学学说有关"。我国著名化学家唐敖庆教授把图论应用于化学方面也取得了一系列成果，例如他的《分子轨道的图形理论》就是一篇代表作（见"中国科学"1976年第1期）。

3．关于四色问题

1850年 Guthrie 在给他的兄弟Frederich的信中提到《四色问题》，并且发现英格兰地图可以用四种颜色进行染色。Frederich问他的老师 *De*·Morgan。继而 *De*·Morgan又将此

问题提出给Hamilton。过了20年之后，因为这个问题一直没有人能够解决，所以才把此问题向伦敦数学会的会员公布征解。可以说，在图论中，也许在全部数学中，最出名的难题，要首推这著名的“四色猜想”了。任何一个数学家可以在五分钟之内将这个非凡的问题向马路上的一个普通行人讲述清楚，可是在讲清楚以后，虽然两个人都懂得了这个问题，但是要解决它，可谁也无能为力。

1879年Kempe给出了这个猜想的许多个错误“证明”中的第一个“证明”。还有*Tait*也发表论文，宣称证明了《四色猜想》。可是十年以后Heawood发现了kempe的错误，然而他应用Kempe的思想方法证明了《五色定理》。后来Ore和stemple对于少于40个国家的所有地图证明了这个猜想，所以，有人推测，假如一旦找到一个反例，它一定是极其庞大和复杂的。

在探求真理的道路上，通过人们的不断努力，《四色猜想》这个困惑人的问题，终于在它诞生后的126周岁时获得了解决。1976年美国伊利诺依大学的K•Appel和W•Haken在J•Koch协作之下，利用高速电子计算机得到了解决。他们用了近100亿个逻辑判定，花费1200机时，终于攻下了这个难关！可是他们所用的方法，却完全不是原来提问题人所料想到的。证明中的一些关键思想是由计算机的实验来完善的。相信，将来某一天《四色定理》的简短证明可能会被找到，但也可以设想不可能存在这样的证明。在这种情况下，就出现了一类新的有意义的定理，无法用传统形式证明的定理。这也是很有可能的。

尽管Appel等人对“四色定理”的证明方法是极其新颖

的，但其证明中的基本方法还是与数学有颇为深远的渊缘，在这当中，威斯康星大学的Edward和F•Moore作了一幅具有816个国家的地图，对解决此问题的证明，对估计证明的困难程度，对取得成功方法的计算方面都发挥了关键作用。

在证明过程中，使用了不可避免性、可约性、不可约构形的不可避免集等重要思想；随着高速电子数字计算机的出现，攻克过去无法克服的困难和障碍在技术上变成可能。在1970年时，攻关手之一的Haken还认为在当时困难好像难似克服。因为有些超出了计算机的能力，构形的数目数以千计，还未确定出上限。当时提出的数据，高速电子计算机要花11年时间去算。因此，当时许多四色问题专家对于寻求一个简短的证明完全感到悲观。到了1972年才深感此问题所采用的方法如果不辅以强力高速计算机是无法得出证明的。1975年初修改了程序，1975年夏第一次开始检验构形的可约性。1975年秋*Koch*写出了更好的检验程序。1975年12月作出了鼓舞人心的发现，得出了新的放电过程。1976年1月开始用新的放电过程来构造可约构形的不可避免集。充分地进行了人机对话，于1976年6月，构造了一个可约构形的不可避免集，四色定理被证明了，在三台不同的高速计算机上用了1200小时。

当作者们把关于四色定理证明的论文提交伊利诺依数学杂志（Illinois'Journal of mathematics）时，审稿专家们根据作者完整的注解校核了放电过程，而校核可约性计算时，却是执行了一个独立的计算机程序，证明审查通过予以发表，宣告了“四色猜想”成为现实，举世闻名。

然而，许多数学家，特别是高速计算机发展以前教育培养出来的那些数学家，反对把计算机当作标准的数学工具，

他们觉得如果一个论证的全部或部分不能用人工计算来复核的话，那就是没有说服力的，从这个观点来看，像上述这样的用独立的计算机程序来检查结果，是没有人工校核证明那么可信。数学定理的传统证明是相当短而又是理论性很高的（似乎理论性越强，证明也就越别致）。人工复核通常是最好的方法，即使是在人工复核成为可能的时候，如果证明是很长的，并且是高度计算性的话，那也很难相信人工校核会把一切错误的可能性排出无遗；而且，如果计算相当刻板，像前面证明的过程那样，那么，也许校核计算机程序要比校验手算更为有效。

许多数学家对冗长的证明感到头痛，这也许是因为不久以前他们只采用产生简短证明的那种方法。目前，还不知道，能否找到对四色定理的简短证明。据说现在还有几个中等长度的证明，但还没有一个经受过专家们的严格检核的过程，虽然可以设想这些证明中的某一个是对的，但也可以设想正确的证明一定是基于可约构形的不可避免集的。因此就需要作无法手算的计算。我们相信，一定存在很有数学意义而只能用电子计算机方法来证明的定理。即使四色定理不是这样的一个问题，它也已经为我们提供了一个很好的例子来说明了证明这种定理可能需要作些什么。没有理由相信不存在大量需要应用这种与以往不同的分析方法才能解决的问题。

由于*Appel*和*Hakan*利用高速电子计算机成功地证明了“四色猜想”，这说明了在数学中只用理论方法所能取得的成就是有限制的。它也意味着过去低估了数学证明中对计算方法（特别是利用电子计算机进行证明的方法）的需要，对数学家来说，确定他们的方法的能力和限度是具有很大实际

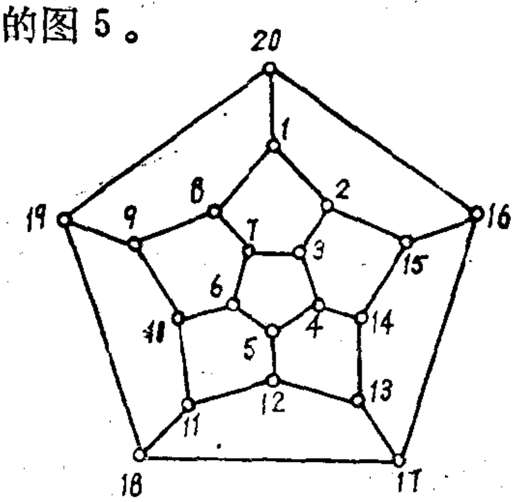
意义的。

"四色猜想"是一个古老的图论问题，难住了全世界许多知名的数学家，然而却在126年之后，主要借助电子计算机而得到了证明，这生动地说明了，在高速计算机发展的今天，数学家的思想和方法将会，也将高速地发展变化，传统地证明数学问题的思想方法不一定就是完善无缺的。

4. Hamiton周游世界问题

1858年Hamilton发明了一种游戏，即所谓的"周游世界问题"。这种游戏用一个规则的实心十二面体，它的二十个顶点标以有名的城市的名字，要求游戏者找一条沿着各边通过每个顶点正好一次的闭回路，也就是"环行世界"。它的玩法是：给你一个正十二面体，它有20个顶点，现在把这20个顶点看成是地球上的20个城市，另外，正十二面体的棱（共30条）看成是连接这些城市的路，请你找一条从某一个城市出发的路线，它经过每一个城市恰好一次，并且最后回到出发点。

为方便计，我们将正十二面体投影到平面上（把它想像成用橡皮球做的，剪开一个面，然后把它拉开铺在平面上），就得到了下面的图5。



（图5）G"周游世界"

在图5中我们也算出了一种走法，即从城市1开始经过城市2，3，…，20，最后回到城市1。

Hamilton周游世界问题，显然是一个图论中的问题。实际上它是要在图5G，中找出一条具有下面两个特点的一条回路P来：

（1）图G的每一个顶点都在P中出现。

（2）图G的顶点在P中不重复出现（P的起点与终点相同不算重复）。

上述具有性质（1）和（2）的无向图G中的路P称为Hamilton路。而称具有性质（1）与（2）的回路为Hamilton回路。

比较一下Euler路与Hamilton路，Euler回路与Hamilton回路，就会发现它们之间是很相似的，差别仅在于：Euler回路是一条经过每条边恰好一次的回路，而Hamilton回路则是一条经过每个顶点恰好一次的回路。

有些图有Hamilton回路但没有Euler回路。（如图6b）

有些图是有Euler回路但却没有Hamilton回路（如图6d）

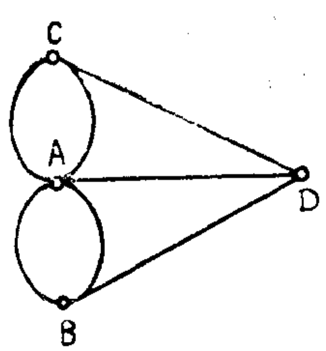


图6a（没有Euler路也没有Euler回路）

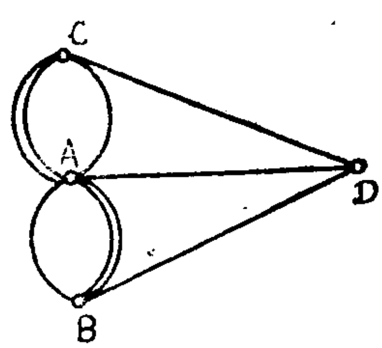
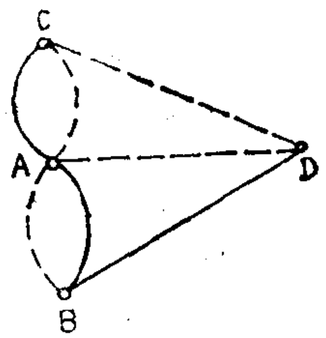
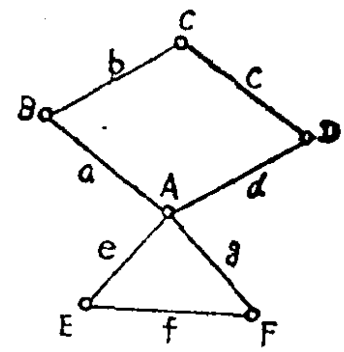


图6b（有Hamilton回路如图中双线）

注意：当我们从图 5 *b*的Hamilton回路中任意去掉一条边时，就可以得到一条起点与终点不同的Hamilton路（如图 5 c）。





（6c）（有一条起点与终点不同的Hamilton路）（图6d）（有Hamilton回路而无Euler回路）

由此我们可以看出，所谓Hamilton周游世界的游戏，其实质就是要求出一个无向图的一条Hamilton回路。从这个游戏问题推广一下，就可以提出一个图论中的问题，就是对于任意给定的无向图G，怎样判断它是不是有Hamilton回路？这个问题就是举世闻名的Hamilton问题。

我们知道，要判断一个无向图是否存在Euler回路是比较容易的，因为只要看一看这个图是否连通，有没有奇顶点就行了。即是说，决定一个图G有没有Euler回路主要看它的顶点的度数。因此，在研究Hamilton问题时，人们很自然地首先想到从图G的顶点的度数开始考虑。例如在1952年，有人证明了下面的定理：

"设G是一个简单无向图，它的顶点数$n\geqslant 3$，如果G的每一个顶点的度数都大于或等于$\frac{n}{2}$，那么G一定有 Hamilton回路"。

可以看出，这个定理的特点就是用顶点的度数来研究Hamilton回路是否存在。然而，这个定理仅仅是Hamilton回路存在的一个充分条件，即是说，当一个图G满足定理的条件时，它一定有Hamilton回路但是有许多图，虽然不满足这个定理的条件，去也是有Hamilton回路的。例如前后的图4所示的图G，就是一例，因为它有20个顶点，即$n=20$，它的顶点的度数均为3，当然比$\frac{n}{2}=10$小，但是它却有Hailton回路。

不少数学家研究过Hamilton问题，企图找一个简单而且易于使用的方法判定一个图是否存在Hdamilton回路，但是，直到现在为止，还没有找到一个理想的方法。特别是Hamilton问题在运筹学中有着非常实际的意义，例如求Hamilton回路中总距离中最短的问题，就是有名的旅行商问题（Travlling Salesman Problem）或者叫做传播塞尔斯曼问题，到目前为止，没有一个有效算法去解这个问题。1956年加拿大的Tnlle给出了一个定理："4一连通的平面图存在Hamilton回路"。到1977年他对此又给出了一个新的证明（利用了桥的理论），这个证明写了三节，共十五个子定理，可以算得上是当今世界上图论方面的最好成果之一。过去有人构造了一个具有380个点的反例，否定了"5一连通平面图存在Hamilton回路"。至于"3一连通平面图存在Hamilton回路也早已被否定。奇怪的是由"4一连通平面图存在Hamilton回路"推证不出"四色定理"；相反，若由"3一连通平面图存在Hamilton回路"却可以推出"四色定理"。这实在是费人深思！

关于Hamilton"周游世界"这一游戏问题的解决也是颇