概率论与数理统计

刘景泰　张克仁
郑　颖　钱君燕　蔡中元　编

GAILÜLUN
YU SHULI TONGJI

上海科学技术文献出版社

概率论与数理统计

刘景泰　张克仁
郑　颖　钱君燕　蔡中元　编

上海科学技术文献出版社

概率论与数理统计

刘景泰　张克仁
郑　颖　钱君燕　蔡中元　编

*

上海科学技术文献出版社出版发行
（上海市武康路2号）
邮政编码：200031
全国新华书店经销
上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 15.25　字数 330,000
1991年4月第1版　1991年4月第1次印刷
印数：1—8,000
ISBN 7-80513-247-1/O·57
定价：5.25元
《科技新书目》236-284

内 容 提 要

本书是根据高等工科院校“概率论与数理统计课程教学基本要求”编写而成的。包括概率论和数理统计两部分的基本内容，主要供52学时教学使用，加上打星号的章节或只讲概率论部分也可供36～72学时教学使用。

本书叙述详细，例题丰富，选材适当，各节附有习题，每章有小结和复习题，书末附习题答案，特别便于教学。

本书的概念、术语、符号和基本方法采用并统一于国家标准，为读者从事参加实际工作提供了方便。

本书也可供工程技术人员自学或举办讲习班使用。

前 言

本书是根据高等学校工科数学教学指导委员会关于对“概率论与数理统计课程教学基本要求”编写而成，主要供52学时教学使用。为适应学时较多的专业，可选择星号(*)的章节内容教学，因此它有很强的可教性。实际上可供36～72学时教学所用。

根据我们的教学经验，并结合概率论与数理统计的特点，在编写本书时，力求做到：

1. 重要概念、定理和公式采用先直观描述，再通俗解释，然后较全面、严谨地论述。以阐述清楚其实际背景为主，深入浅出，通俗而不失其科学性。

2. 吸收有关文献及现行教材中大量典型例题和习题，以显示概率论与数理统计课程的广泛应用性。

3. 重点突出，难点分散，循序渐近。要求明确，各章末都有小结，小结概括一章要点及基本要求，便于教和学。

4. 基本概念、术语、符号和基本方法，采用并统一于国家最新标准。不仅为广大学生今后参加这方面工作创造了条件，也为广大从事概率论与数理统计的实际工作者提供了方便。

全书基本内容是：概率论基本概念，随机变量及其分布，数字特征，极限定理，数理统计基本概念，参数估计，假设检验，回归分析，方差分析及试验设计等。

参加编写工作的(按章节顺序)有：浙江丝绸工学院蔡中元(第一、八章)，中国纺织大学郑颖(第二、三章)和钱君燕(第四、五

章)，天津纺织工学院刘景泰(第六、九章)，苏州丝绸工学院张克仁(第七章)等同志。编者署名以姓氏笔划为序。全书最后由中国纺织大学定稿。

由于我们水平有限，加之编写时间仓促，错误与不妥之处在所难免，热忱地欢迎同行、读者批评指正。

我们感谢为我们提供例题、习题的参考资料与教材的著者和编者。

对中国纺织大学吴让泉教授、上海交通大学陶宗英教授审阅全书所付出的辛勤劳动，编者在此谨致谢意。

编　者

1990年5月

目　录

第一章　概率论基本概念

§1.1　随机事件

1.1.1　随机试验

自然界和现实生活中有各种各样的现象。其中一类现象，在一定条件下必然发生(或必然不发生)，这类现象称为确定性现象。例如：早晨，太阳必然从东方升起。一颗石子掷到河中，必然按规律沉到河底。

另一类现象，在一次观测中，带有某种偶然性，例如：用枪射击一飞鸟，鸟被击中。某航次班机，在某次飞行中失事。某期有奖储蓄，某个号码中头奖。这类现象看上去好象纯属偶然，具有不确定性，但对上述现象进行重复多次的观测，将会发现某种规律性。例如，对某个号码中头奖这件事，如果按一万户设一个头奖，那么，其机会约为一万分之一。这一类现象，我们称之为随机现象。

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的数学分支。

为了对随机现象进行研究，经常要进行试验。一般地，一个试验，如果它有下列特性，就称它为**随机试验**，简称试验。

(1) 可以在相同的条件下重复进行。

(2) 试验的可能结果不止一个，并且在试验前能明确可知所有可能的结果。

(3) 试验前无法预知哪一个结果出现。例如，一个篮球运动员进行定点投篮，每投一次，看作一次试验，试验的所有可

能结果是两个：中或不中，然而在投球前无法预知哪个结果发生。

1.1.2 随机事件与基本事件空间

在一随机试验中，它的每一个最简单不能分解的结果称为**基本随机事件**，简称基本事件。例如掷一颗骰子这一试验，出现1点，2点，…，6点都是基本随机事件。在一个试验中，除了基本事件之外还有其它的随机事件，如出现偶数点是一随机事件，它是由出现2点、4点、6点三个基本事件复合而成，称它为**复合随机事件**。而且当且仅当上述三个基本随机事件中的一个发生，出现偶数点这一复合随机事件发生。不管是基本随机事件，还是复合随机事件，统称为随机事件，简称事件。

为明确起见，以后用E表示随机试验，用ω表示它的一个可能结果，用字母A, B, C等表示事件，基本事件也可直接用ω表示，而用Ω表示所有基本事件的集合，并称Ω为**基本事件空间**。

每次试验中必然发生的事件称为**必然事件**，必然不发生的事件称为**不可能事件**。由于任何一次试验的结果必然出现全部基本事件中的一个，这样，基本事件空间作为一个复合事件是必然事件，故我们仍用符号Ω表示必然事件，而用符号$\varnothing$表示不可能事件。

在具体问题中，十分重要的是，要认清基本事件空间是由哪些基本事件构成的，我们举一些例子。

例 1.1.1 E_1——掷一枚普通的硬币，令ω_1为“正面朝上”，ω_2为“反面朝上”，则有

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}$$

例 1.1.2 E_2——从标号为1, 2, …, 10的十个完全相同的球中任取一个，令ω_i为“取得i号球”，则

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_{10}\}$$

例 1.1.3 E_3——将一枚硬币连掷两次，观测正反面朝上的情况，令 ω_1 为“正面，正面”，ω_2 为“反面，正面”，ω_3 为“正面，反面”，ω_4 为“反面，反面”，则

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\}$$

例 1.1.4 E_4——你的一个同学约定在某天晚上 7 点到 8 点之间来你家作客。令 ω_t 为“来到你家的时间”，则

$$\Omega=\{\omega_t \mid 19\text{ 时}\leqslant\omega_t\leqslant 20\text{ 时}\}$$

必须注意的是试验内容不同，基本事件空间不同。如 E_1 与 E_3，虽然都是掷硬币，但 E_1 只掷一次，E_3 掷两次，是两个完全不同的试验，因此基本事件空间也完全不相同。另外，从例 1.1.2 中我们可以分清基本事件与复合事件的差异，如果令

A 为“球的标号为 6”；

B 为“球的标号是偶数”；

C 为“球的标号$\geqslant$8”。

$A=\{\omega_6\}$ 是一个基本事件，而 $B=\{\omega_2,\ \omega_4,\ \omega_6,\ \omega_8,\ \omega_{10}\}$，由五个基本事件组成，$C=\{\omega_8,\ \omega_9,\ \omega_{10}\}$ 由三个基本事件组成，B、C 是复合事件。

如果从集合的角度出发，每一个事件都是 Ω 的一个子集，如事件 $A=\{\omega_6\}$ 是 Ω 的单元素子集，B、C 当然也是 Ω 的子集。由于 Ω 有很多子集，也就是说，一个随机试验 E，可以有很多随机事件。概率论的任务之一是研究随机事件的规律，通过对较简单事件规律的研究去掌握复杂事件的规律。为此，需要掌握事件之间的关系和事件之间的一些运算。

1.1.3 事件的关系和运算

1. 包含和相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称 A 是 B 的特款，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

如在例 1.1.2 中，A=“球的标号为 6”，这一事件发生必然导致事件 B=“球的标号是偶数”发生，所以 B 包含 A。

$A\subset B$

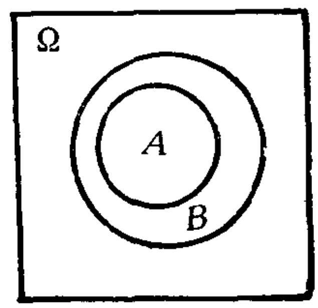

图 1.1

这可用图 1.1 给出直观的几何解释，图中矩形表示基本事件空间 Ω，圆 A 与 B 分别表示事件 A 与 B。

显然，若 $A\subset B$，则 A 所包含的基本事件是 B 所包含的基本事件的一部分。

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$。

2．和事件

先看一例，有两个战士向同一目标射击，那么，命中目标就意味着两个战士中至少有一个命中目标。如记事件 A=“第一个战士命中目标”，事件 B=“第二个战士命中目标”，事件 C=“命中目标”，则事件 C 发生意味着 A、B 中至少有一个发生。事件 C 表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，则称事件 C 为 A 与 B 的**和事件**，记为 $A\cup B$。

$A\cup B$

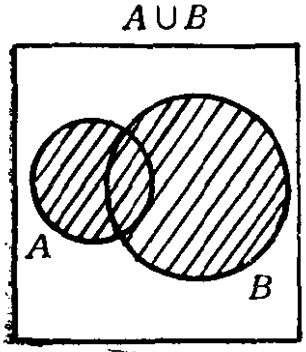

图 1.2

图 1.2 为和事件的几何解释，图中阴影部分即为 A 与 B 的和事件。

类似地，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生这一事件，称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$。

有可列个事件时，它们的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

3．积事件

“事件 A 与 B 同时发生”也是一个事件，称它为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$，或 AB。前例中的两战士射击，“两战