

概率论与数理统计

刘景泰 张克仁 蔡中元 编
郑颖 钱君燕

**GAILÜLUN
YU SHULI TONGJI**

上海科学技术文献出版社

概率论与数理统计

刘景泰 张克仁 蔡中元 编
郑颖 钱君燕

上海科学技术文献出版社

概率论与数理统计

刘景泰 张克仁 蔡中元 编
郑颖 钱君燕

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路2号)

邮政编码: 200031

全国各书店经销

上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 15.25 字数 330,000

1991年4月第1版 1991年4月第1次印刷

印数: 1—8,000

ISBN 7-80513-247-1/O·57

定价: 5.25元

《科技新书目》236-284

内 容 提 要

本书是根据高等工科院校“概率论与数理统计课程教学基本要求”编写而成的。包括概率论和数理统计两部分的基本内容,主要供 52 学时教学使用,加上打星号的章节或只讲概率论部分也可供 36~72 学时教学使用。

本书叙述详细,例题丰富,选材适当,各节附有习题,每章有小结和复习题,书末附习题答案,特别便于教学。

本书的概念、术语、符号和基本方法采用并统一于国家标准,为读者从事参加实际工作提供了方便。

本书也可供工程技术人员自学或举办讲习班使用。



前 言

本书是根据高等学校工科数学教学指导委员会关于对“概率论与数理统计课程教学基本要求”编写而成, 主要供 52 学时教学使用。为适应学时较多的专业, 可选择星号(*) 的章节内容教学, 因此它有很强的可教性。实际上可供 36~72 学时教学所用。

根据我们的教学经验, 并结合概率论与数理统计的特点, 在编写本书时, 力求做到:

1. 重要概念、定理和公式采用先直观描述, 再通俗解释, 然后较全面、严谨地论述。以阐述清楚其实际背景为主, 深入浅出, 通俗而不失其科学性。

2. 吸收有关文献及现行教材中大量典型例题和习题, 以显示概率论与数理统计课程的广泛应用性。

3. 重点突出, 难点分散, 循序渐近。要求明确, 各章末都有小结, 小结概括一章要点及基本要求, 便于教和学。

4. 基本概念、术语、符号和基本方法, 采用并统一于国家最新标准。不仅为广大学生今后参加这方面工作创造了条件, 也为广大从事概率论与数理统计的实际工作者提供了方便。

全书基本内容是: 概率论基本概念, 随机变量及其分布, 数字特征, 极限定理, 数理统计基本概念, 参数估计, 假设检验, 回归分析, 方差分析及试验设计等。

参加编写工作的(按章节顺序)有: 浙江丝绸工学院蔡中元(第一、八章), 中国纺织大学郑颖(第二、三章)和钱君燕(第四、五

章),天津纺织工学院刘景泰(第六、九章),苏州丝绸工学院张克仁(第七章)等同志。编者署名以姓氏笔划为序。全书最后由中国纺织大学定稿。

由于我们水平有限,加之编写时间仓促,错误与不妥之处在所难免,热忱地欢迎同行、读者批评指正。

我们感谢为我们提供例题、习题的参考资料与教材的著者和编者。

对中国纺织大学吴让泉教授、上海交通大学陶宗英教授审阅全书所付出的辛勤劳动,编者在此谨致谢意。

编 者

1990年5月

目 录

第一章 概率论基本概念	1
§ 1.1 随机事件	1
1.1.1 随机试验	1
1.1.2 随机事件与基本事件空间	2
1.1.3 事件的关系和运算	3
习题 1.1	7
§ 1.2 随机事件的概率	8
1.2.1 频率与概率	8
1.2.2 概率的定义及性质	10
1.2.3 等可能概型	12
习题 1.2	18
§ 1.3 条件概率及其应用	20
1.3.1 条件概率	20
1.3.2 乘法定理, 全概率公式, 贝叶斯公式	22
习题 1.3	28
§ 1.4 事件的独立性	29
1.4.1 两个事件的独立性	30
1.4.2 多个事件的独立性	31
习题 1.4	35
小结	35
复习题	36
第二章 离散型随机变量及其分布律	39
§ 2.1 随机变量的概念	39

§ 2.2 一维离散型随机变量及其分布律	43
2.2.1 一维离散型随机变量的分布律	43
2.2.2 几个常用的离散型分布	45
习题 2.2	54
§ 2.3 二维离散型随机变量及其分布律	56
2.3.1 联合分布律和边缘分布律	56
2.3.2 条件分布律	60
2.3.3 随机变量的独立性	62
习题 2.3	63
§ 2.4 离散型随机变量函数的分布律	64
习题 2.4	69
小结	70
复习题	71
第三章 连续型随机变量及其分布	73
§ 3.1 一维连续型随机变量及其概率分布	73
3.1.1 分布函数概念	73
3.1.2 连续型随机变量和密度函数概念	78
3.1.3 几个常用的一维连续型随机变量	85
习题 3.1	93
§ 3.2 二维连续型随机变量及其概率分布	95
3.2.1 联合分布函数和边缘分布函数	95
3.2.2 联合密度函数和边缘密度函数	98
3.2.3 条件密度函数	104
3.2.4 随机变量的独立性	106
3.2.5 二维正态分布	110
习题 3.2	112
§ 3.3 连续型随机变量函数的密度函数	115
3.3.1 一维随机变量函数的密度函数	115
3.3.2 多维随机变量函数的密度函数	120

3.3.3 数理统计中的某些常用分布	130
附录	135
习题 3.3	136
小结	138
复习题	139
第四章 随机变量的数字特征	141
§ 4.1 数学期望	141
习题 4.1	151
§ 4.2 随机变量函数的数学期望	153
习题 4.2	162
§ 4.3 方差	164
4.3.1 方差的定义	164
4.3.2 方差的性质	168
4.3.3 一些常见的概率分布的数学期望和方差	173
习题 4.3	175
§ 4.4 协方差和相关系数	177
4.4.1 协方差和相关系数的定义	179
4.4.2 协方差和相关系数的性质	181
4.4.3 独立性和不相关性之间的关系	183
习题 4.4	186
§ 4.5 矩	187
小结	191
复习题	191
第五章 大数定律与中心极限定理	194
§ 5.1 大数定律	194
5.1.1 契比雪夫定理的特殊情况	195
5.1.2 贝努里大数定律	197
5.1.3 辛钦大数定律	199

§ 5.2 中心极限定理	199
小结	205
复习题	206
第六章 数理统计的基本概念与参数的点估计	208
§ 6.1 基本概念	208
6.1.1 总体和样本	208
6.1.2 样本统计量和样本矩	214
6.1.3 试验数据整理和频率分布	216
习题 6.1	219
§ 6.2 参数的点估计	221
6.2.1 矩估计法	222
6.2.2 极大似然法	225
6.2.3 顺序统计量法	233
6.2.4 估计量的评价标准	235
习题 6.2	238
小结	240
复习题	241
第七章 假设检验	243
§ 7.1 正态总体的抽样分布	243
7.1.1 抽样分布定理	243
7.1.2 概率分布的 α 分位数	250
习题 7.1	254
§ 7.2 假设检验的基本问题	255
7.2.1 问题的提出	255
7.2.2 假设检验的基本原理	258
7.2.3 单侧检验	261
7.2.4 假设检验的步骤	265
7.2.5 两类错误	266

习题 7.2	272
§ 7.3 期望的假设检验	273
7.3.1 单个正态总体期望的假设检验	273
7.3.2 双正态总体期望之差的假设检验	277
7.3.3 非正态总体大样本下期望的检验	281
习题 7.3	287
§ 7.4 正态总体方差的假设检验	289
7.4.1 单个正态总体方差的假设检验	289
7.4.2 两个正态总体方差比的假设检验	292
7.4.3 各类参数检验法小结	296
习题 7.4	298
§ 7.5 参数的区间估计	299
7.5.1 区间估计的概念	299
7.5.2 正态总体参数的区间估计	303
7.5.3 非正态总体大样本下期望的区间估计, 单侧置信限	305
习题 7.5	310
§ 7.6 拟合检验	312
7.6.1 皮尔逊 χ^2 检验	312
7.6.2 数理统计方法的国家标准简介, 正态性检验	318
习题 7.6	325
小结	327
复习题	328
*第八章 回归分析	332
§ 8.1 一元线性回归方程	333
§ 8.2 显著性检验	336
§ 8.3 预测和控制	340
§ 8.4 可化为线性的非线性回归	344
小结	348

复习题	349
*第九章 方差分析与正交试验设计	351
§ 9.1 单因素试验及其方差分析	351
9.1.1 几个引例	351
9.1.2 方差分析的基本思想	354
9.1.3 单因素试验的一般形式	355
9.1.4 离差平方和的分解	357
9.1.5 显著性检验	358
9.1.6 方差分析表	359
9.1.7 分析实例	360
习题 9.1	364
§ 9.2 双因素全面试验及其方差分析	367
9.2.1 引例	367
9.2.2 双因素全面试验的一般形式	369
9.2.3 离差平方和及其分解	370
9.2.4 交互作用及其意义	371
9.2.5 各离差平方和计算公式	373
9.2.6 显著性检验及方差分析表	373
9.2.7 分析实例	374
习题 9.2	379
§ 9.3 方差分析的数学模型与分析	381
9.3.1 单因素试验的数学模型与分析	381
9.3.2 双因素试验的数学模型与分析	384
附录	387
§ 9.4 正交试验设计及其方差分析	388
9.4.1 正交试验设计与正交表	389
9.4.2 单项试验的简单对比法与正交试验	393
9.4.3 正交表的自由度及交互作用列	395
9.4.4 正交表的选用与表头设计	395

9.4.5 二水平正交试验及其方差分析	393
9.4.6 三水平正交试验及其方差分析	402
习题 9.4	406
小结	409
复习题	410
附录	
习题解答	451
附表 1 泊松分布表	442
附表 2 标准正态分布表	444
附表 3 χ^2 分布表	445
附表 4 t 分布表	448
附表 5 F 分布表	450
附表 6 计算统计量 W 必需的系数 $\alpha_k(W)$	456
附表 7 W 检验, 统计量 W 的 p 分位数 Z_p	458
附表 8 D 检验, 统计量 Y 的 p 分位数 Z_p	459
附表 9 偏度检验, 统计量 b_s 的 p 分位数 Z_p	460
附表 10 峰度检验, 统计量 b_k 的 p 分位数 Z_p	461
附表 11 相关系数检验表	462
附表 12 常用正交表	463
参考书目	473

第一章 概率论基本概念

§ 1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

自然界和现实生活中有各种各样的现象。其中一类现象，在一定条件下必然发生(或必然不发生)，这类现象称为确定性现象。例如：早晨，太阳必然从东方升起。一颗石子掷到河中，必然按规律沉到河底。

另一类现象，在一次观测中，带有某种偶然性，例如：用枪射击一飞鸟，鸟被击中。某航次班机，在某次飞行中失事。某期有奖储蓄，某个号码中头奖。这类现象看上去好象纯属偶然，具有不确定性，但对上述现象进行重复多次的观测，将会发现某种规律性。例如，对某个号码中头奖这件事，如果按一万户设一个头奖，那么，其机会约为一万分之一。这一类现象，我们称之为随机现象。

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的数学分支。

为了对随机现象进行研究，经常要进行试验。一般地，一个试验，如果它有下列特性，就称它为随机试验，简称试验。

- (1) 可以在相同的条件下重复进行。
- (2) 试验的可能结果不止一个，并且在试验前能明确可知所有可能的结果。
- (3) 试验前无法预知哪一个结果出现。例如，一个篮球运动员进行定点投篮，每投一次，看作一次试验，试验的所有可

能结果是两个：中或不中，然而在投球前无法预知哪个结果发生。

1.1.2 随机事件与基本事件空间

在一随机试验中，它的每一个最简单不能分解的结果称为**基本随机事件**，简称基本事件。例如掷一颗骰子这一试验，出现1点，2点， $\dots$ ，6点都是基本随机事件。在一个试验中，除了基本事件之外还有其它的随机事件，如出现偶数点是一随机事件，它是由出现2点、4点、6点三个基本事件复合而成，称它为**复合随机事件**。而且当且仅当上述三个基本随机事件中的一个发生，出现偶数点这一复合随机事件发生。不管是基本随机事件，还是复合随机事件，统称为随机事件，简称事件。

为明确起见，以后用 E 表示随机试验，用 ω 表示它的一个可能结果，用字母 A, B, C 等表示事件，基本事件也可直接用 ω 表示，而用 Ω 表示所有基本事件的集合，并称 Ω 为**基本事件空间**。

每次试验中必然发生的事件称为**必然事件**，必然不发生的事件称为**不可能事件**。由于任何一次试验的结果必然出现全部基本事件中的一个，这样，基本事件空间作为一个复合事件是必然事件，故我们仍用符号 Ω 表示必然事件，而用符号 $\emptyset$ 表示不可能事件。

在具体问题中，十分重要的是，要认清基本事件空间是由哪些基本事件构成的，我们举一些例子。

例 1.1.1 E_1 ——掷一枚普通的硬币，令 ω_1 为“正面朝上”， ω_2 为“反面朝上”，则有

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

例 1.1.2 E_2 ——从标号为 1, 2, $\dots$, 10 的十个完全相同的球中任取一个，令 ω_i 为“取得 i 号球”，则

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}\}$$

例 1.1.3 E_3 ——将一枚硬币连掷两次,观测正反面朝上的情况,令 ω_1 为“正面,正面”, ω_2 为“反面,正面”, ω_3 为“正面,反面”, ω_4 为“反面,反面”,则

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

例 1.1.4 E_4 ——你的一个同学约定在某天晚上 7 点到 8 点之间来你家作客。令 ω_t 为“来到你家的时间”,则

$$\Omega = \{\omega_t | 19 \text{ 时} \leq \omega_t \leq 20 \text{ 时}\}$$

必须注意的是试验内容不同,基本事件空间不同。如 E_1 与 E_3 ,虽然都是掷硬币,但 E_1 只掷一次, E_3 掷两次,是两个完全不同的试验,因此基本事件空间也完全不同。另外,从例 1.1.2 中我们可以分清基本事件与复合事件的差异,如果令

A 为“球的标号为 6”;

B 为“球的标号是偶数”;

C 为“球的标号 ≥ 8 ”。

$A = \{\omega_6\}$ 是一个基本事件,而 $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8, \omega_{10}\}$,由五个基本事件组成, $C = \{\omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$ 由三个基本事件组成, B, C 是复合事件。

如果从集合的角度出发,每一个事件都是 Ω 的一个子集,如事件 $A = \{\omega_6\}$ 是 Ω 的单元子集, B, C 当然也是 Ω 的子集。由于 Ω 有很多子集,也就是说,一个随机试验 E ,可以有很多随机事件。概率论的任务之一是研究随机事件的规律,通过对较简单事件规律的研究去掌握复杂事件的规律。为此,需要掌握事件之间的关系和事件之间的一些运算。

1.1.3 事件的关系和运算

1. 包含和相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A ,或称 A 是 B 的特款,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。

如在例 1.1.2 中, A = “球的标号为 6”, 这一事件发生必然导致事件 B = “球的标号是偶数”发生, 所以 B 包含 A 。

这可用图 1.1 给出直观的几何解释, 图中矩形表示基本事件空间 Ω , 圆 A 与 B 分别表示事件 A 与 B 。

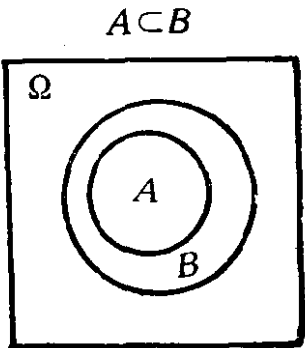


图 1.1

显然, 若 $A \subset B$, 则 A 所包含的基本事件是 B 所包含的基本事件的一部分。

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记为 $A = B$ 。

2. 和事件

先看一例, 有两个战士向同一目标射击, 那么, 命中目标就意味着两个战士中至少有一个命中目标。如记事件 A = “第一个战士命中目标”, 事件 B = “第二个战士命中目标”, 事件 C = “命中目标”, 则事件 C 发生意味着 A 、 B 中至少有一个发生。事件 C 表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生, 则称事件 C 为 A 与 B 的和事件, 记为 $A \cup B$ 。

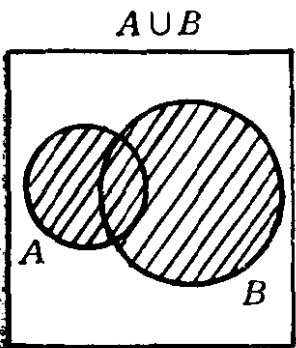


图 1.2

图 1.2 为和事件的几何解释, 图中阴影部分即为 A 与 B 的和事件。

类似地, 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生这一事件, 称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件, 记为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, 简记为

$$\bigcup_{i=1}^n A_i.$$

有可列个事件时, 它们的和事件记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

3. 积事件

“事件 A 与 B 同时发生”也是一个事件, 称它为事件 A 与事件 B 的积事件, 记为 $A \cap B$, 或 AB 。前例中的两战士射击, “两战