

化学工程学丛书

# 湍流传热导论

顾毓珍 编著

上海科学技术出版社

化学工程学丛书

# 湍流传热导论

顾毓珍 编著

上海科学出版社

## 內容 提 要

本書系从边界层概念与动量傳递和热傳递的类似性出发，討論牛頓型流体的湍流傳熱問題。此外，还分章叙述液态金属的傳热与非牛頓型流体的流体力学和傳热。

湍流傳热的理論研究，毕竟須体现于換熱設備的計算与設計，以及傳热過程的如何強化。书中后两章討論這方面的問題，特別提出关于強化傳热過程的一些措施。

本書以高等工科院校的高年級学生、研究生或同等程度的科技工作者为对象，可作有关专业的补充讀物或参考之用。书中附有一些例題，有助于理解內容，并在每章附有参考文献，足供讀者进一步探索时用。

化学工程学丛书  
湍流傳热導論  
顾毓珍 編著

---

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）  
上海市书刊出版业营业許可證出093号

---

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

---

开本 787×1092 1/25 印張 9 9/25 排版字数 176,000  
1964年11月第1版 1964年11月第1次印刷  
印数 1—4,000 (其中精裝本 1,000 冊)

统一书号 15119·676 定价(科六) 1.20 元

2025/2/8

## “化学工程学丛书”編輯緣起

本书是“化学工程学丛书”的一个分册。化学工程学已由中国科学院技术科学部正式列为学科之一；在高等学校中，也設立了化学工程学专业。由于我国化学工业在党的领导下飞跃地发展，这学科的发展必将随之猛进。化学工程学不但有力地推动了化学、石油、冶金等工业技术的前进，而且在四十年代原子能工业中起了重要作用。我国社会主义建設無論在国民經濟或国防尖端方面都要求数量更多、质量更高的化学工程的人材和科学研究成果。因此化学工程学丛书的編輯出版目的亦即为本学科培养高級人材，推动研究工作和綜述我国科学研究成果。

化学工程学（过去也称为“化工原理”），是化学工业中单元操作的理論組成部分，同时还包括了化学反应工程学、傳递过程原理、化工热力学、化工动态学，以及化工設備結構及其運轉原理和流程工艺的机械化、自动控制。作为新兴的化学工业的一部分，原子能和平利用工业中，凡屬化工生产和回收的理論方面，也属于化学工程学范畴以內。因此本丛书也应是化工研究、設計、生产和使用各部門的必备参考书。

自从党八届十中全会明确提出以农业为基础、以工业为主导的发展国民經濟总方針以来，党中央和毛主席又屡次教誨坚决把工业部門的工作轉移到以农业为基础的轨道上来。化学工业与农业“八字宪法”的貫彻执行，以及与解决人民吃、穿、用品問題有密切关系，如化肥、农药的生产，合成纤维的生产，人民日用品的生产，以及用于农田排灌傳动、农村运输等天然和合成材料的生产，均与化学工业有直接的关系。而化学工程学作为化学工业的基础

理論学科，就成为使化学工业更好地支援农业生产起关键性作用的一个学科。

上海科学技术出版社鉴于化学工程学这一学科的重要性，特组织力量，成立编辑委员会，制订规划，邀请国内有关专业工作者，编写化学工程学丛书的有关分册。各分册从选题和邀请作者，以至写稿和审校工作，均分别慎重地从事。凡由化学工程学丛书编委会和上海科学技术出版社共同认为符合本丛书的主旨和要求的，就刊印为本丛书之一。

本丛书的内容，包括各单元操作、化学反应工程学、传递过程原理、化工热力学、化工动态学等方面综述或专题著作。

本丛书的读者对象为本学科的研究人员和研究生、高等学校教师及有关工程技术人员、设计工作人员，也可供大学高年级学生及进修学员参考。

化学工程学丛书编委会限于政治和业务水平，对于本学科理论处理问题不免有缺陷甚至错误，望读者予以指正。

侯德榜

1964年6月于上海

## 前　　言

近年来国外出版了一些流体动力学和傳热学合併討論的書籍，這說明傳热学方面的研究与流体动力学有很密切的关系。

作者試圖引用边界层學說，并从动量傳递与热量傳递的类似性，討論湍流傳热及其有关問題。本书命名为“湍流傳热導論”，实可視為“湍流时的动量傳递与热量傳递”的簡称。本书部分材料曾經試用为化学工程学专业課的讲义，亦可作为科技工作者对于这方面有需要时的参考。

随着現代工程技术的飞速进步，湍流傳热与其有关方面，都应为科技工作者所掌握。在化学工业中的傳热問題，显得重要的是在管內与管外（特别是在管內）的傳热，以及如何强化現有的傳热設備。此外，在化学工业中涉及的流体，除了水与空气外，还有其他气体、液体以及非牛頓型流体。在原子能工业中，还須遇到液态金属的傳热問題。至于两相傳热問題，則更較复杂，但在現代工业中亦經常遇到。

湍流傳热的理論研究，其最終目的毕竟須为換热器的設計与选择服务。因此，本书列入了“換热器的計算”一章。最后一章討論了傳热過程的强化問題，同时也提出了一些值得研究的課題，因为如能将現有的傳热過程加以强化，将对工业生产起重要作用。

在編写本书过程中，曾得到苏元复教授及同事們的鼓励，楊世銘教授曾对部分材料加以校閱，并承上海科技出版社的协作，在此作者应一并致謝。

限于作者的水平，书中如有謬誤之处，希望讀者多加指正。

顧毓珍 1964年5月

# 目 录

## 前 言

<b>第一章 湍流流动</b> .....	1
1-1 引言 .....	1
<b>第一节 流动边界层</b> .....	1
1-2 流动边界层与其发展 .....	1
1-3 平板上的边界层厚度 .....	4
1-4 湍流时平板上的滞流内层 .....	6
<b>第二节 管内流动边界层与传热边界层</b> .....	8
1-5 管内流动边界层 .....	8
1-6 湍流时圆管中的滞流内层 .....	9
1-7 传热边界层 .....	11
<b>第三节 流体在圆管中的速度分布</b> .....	13
1-8 在圆管中滞流时的速度分布 .....	13
1-9 在圆管中湍流时的速度分布 .....	14
1-10 用混合长概念的速度分布 .....	18
1-11 平均速度与平均速度点 .....	20
<b>第四节 一般速度分布线</b> .....	25
1-12 一般速度分布线的推导 .....	25
1-13 一般速度分布线的讨论 .....	28
1-14 传热时的一般速度分布线 .....	32
<b>第二章 湍流时的传热</b> .....	39
2-1 引言 .....	39
<b>第一节 动量与热量传递的类似</b> .....	39
2-2 雷诺类似律 .....	39
2-3 雷诺类似律的应用 .....	42
2-4 滞流层对传热的影响 .....	44
2-5 普兰德与戴劳的修正 .....	46

2-6 普兰德-戴劳类似律的应用.....	48
<b>第二节 类似律的进展 .....</b>	<b>50</b>
2-7 剪应力与热流率的类似 .....	50
2-8 卡門傳热公式的推演 .....	53
2-9 布叶尔脫与麦丁耐利等的傳热公式 .....	58
2-10 类似律傳热公式的討論.....	60
2-11 定性温度与其确定.....	62
<b>第三节 一般温度分布線 .....</b>	<b>65</b>
2-12 一般温度分布線的推演.....	65
2-13 在扩散度比不等于 1 的温度分布線.....	71
2-14 平均温度与平均温度点.....	74
<b>第四节 湍流扩散度的計算 .....</b>	<b>76</b>
2-15 $\epsilon_m$ 与 $\epsilon_H$ 值的計算.....	76
2-16 扩散度比的實驗数据.....	79
2-17 扩散度比与 $Pr$ 的关系 .....	81
2-18 $\epsilon_m/\nu$ 与 $\epsilon_H/a$ 比值的求解.....	82
<b>第三章 液态金属傳热.....</b>	<b>90</b>
<b>第一节 液态金属的特性 .....</b>	<b>90</b>
3-1 液态金属的物性 .....	90
<b>第二节 液态金属傳热的理論与实际 .....</b>	<b>92</b>
3-2 麦丁耐利的理論公式 .....	93
3-3 賴依翁的研究 .....	98
3-4 賽朋与希曼次寇的研究.....	100
3-5 米海耶夫等的研究.....	102
3-6 列柯迪斯与托洛金的研究.....	103
3-7 液态金属傳热理論与實驗数据的分歧.....	105
<b>第三节 液态金属傳热的扩散度.....</b>	<b>106</b>
3-8 液态金属傳热时的温度分布与速度分布.....	106
3-9 液态金属傳热的扩散度比.....	109
<b>第四章 非牛頓型流体力学与傳热 .....</b>	<b>114</b>
<b>第一节 非牛頓型流体的特性.....</b>	<b>115</b>
4-1 牛頓型与非牛頓型流体.....	115
4-2 非牛頓型流体的特性.....	117

4-3 均匀系数与流态特性系数.....	118
<b>第二节 非牛頓型液体的流体力学.....</b>	<b>121</b>
4-4 非牛頓型液体的雷諾准数和摩擦系数.....	121
4-5 一般雷諾准数.....	122
4-6 拟塑性液体的速度分布.....	124
4-7 非牛頓型液体的一般速度分布線.....	126
<b>第三节 非牛頓型液体的傳热.....</b>	<b>131</b>
4-8 非牛頓型液体的傳热.....	131
4-9 动量与热量傳递的类似.....	132
4-10 动量与热量傳递类似律的进展 .....	136
<b>第五章 換热器的計算 .....</b>	<b>143</b>
<b>第一节 換热器的压强降与傳热.....</b>	<b>144</b>
5-1 管內 $St$ 准数与摩擦系数的关系 .....	144
5-2 管內湍流时的傳热公式.....	146
5-3 管壁間压强降与摩擦系数的确定.....	149
5-4 管壁間或壳方給热系数的計算.....	151
<b>第二节 傳热总系数与平均温度差.....</b>	<b>154</b>
5-5 傳热总系数与給热系数.....	154
5-6 平均温度差.....	158
5-7 折流或錯流时平均温度差的图解.....	166
<b>第三节 傳热单元数与換热器效率.....</b>	<b>170</b>
5-8 傳热单元数, $NTU$ .....	170
5-9 換热器效率, $\epsilon$ .....	172
5-10 換热器效率与傳热单元数的关系 .....	174
5-11 換热器效率与傳热单元数的应用 .....	176
<b>第六章 傳热过程的强化 .....</b>	<b>183</b>
<b>第一节 强化傳热过程与增加傳热系数.....</b>	<b>183</b>
6-1 几种强化傳热过程的途徑.....	183
6-2 增加傳热系数的方法.....	185
<b>第二节 增加管外流体給热系数.....</b>	<b>186</b>
6-3 管外流体給热系数的如何增加.....	186
6-4 增加蒸气冷凝时的給热系数.....	187
<b>第三节 增加管內流体給热系数.....</b>	<b>188</b>

6-5 增加管內流体給热系数的方法	188
6-6 添加物(强化圈)对傳热的作用	191
6-7 用旋轉流促进湍流程度	196
<b>第四节 流体中加入固体顆粒对傳热的作用</b>	<b>198</b>
6-8 气流中加入少量固体顆粒的影响	198
6-9 液体中加入少量固体顆粒的影响	204
<b>附录</b>	<b>209</b>
附图 1 摩擦系数 $\xi$ 与 $Re$ 的关系	209
附录 I 水的物理参数	210
附录 II 干空气的物理参数	211
附录 III 某些气体的主要物理性质	212
附录 IV 某些金属的主要物理性质	213
附录 V 某些液体在 $0 \sim 100 [^{\circ}\text{C}]$ 时的平均比热	213
附录 VI 某些固体在 $0 \sim 100 [^{\circ}\text{C}]$ 时的平均比热	213
附录 VII 饱和水蒸汽的性质	214
附录 VIII $e^x$ 与 $e^{-x}$ 值表	216
附录 IX 并流换热器中 $\epsilon$ 与 $NTU$ 的关系	216
附录 X 逆流换热器中 $\epsilon$ 与 $NTU$ 的关系	217
附录 XI 折流换热器中 $\epsilon$ 与 $NTU$ 的关系	217
附录 XII 错流(两边不混和)换热器中 $\epsilon$ 与 $NTU$ 的关系	218
<b>本书引用作者譯名对照表</b>	<b>219</b>
<b>索引</b>	<b>221</b>

# 第一章 湍流流动

## 1-1 引言

在现代流体力学中，特别是流体动力学，边界层学说往往被认为是这门学科的奠基石。许多比较复杂的流体动力学问题，应用数学分析方法而没有获得解决的，现在可以通过边界层概念求解，并且还可推广到传热学。

1909年，普兰德(L. Prandtl)首先提出了边界层的概念。按照他的论点，流体沿着固体壁面的流动可分为两个区域：一个是紧靠固体壁面的区域，称为边界层，在其中摩擦力是重要的；另一是边界层以外的区域，在其中摩擦力可以忽略不计。因此，在研究粘性流体沿着固体壁面运动时，只须集中注意于边界层内，这样的区域称为流动边界层。同样的概念已被应用到传热方面，称为传热边界层（或简称热边界层），并可应用到传质方面，称为传质边界层。

在普兰德提出这个概念后，每年仅有几篇关于边界层研究的论文发表，迨至1950年后，则每年增至几十篇的有关文章。这是由于边界层学说的应用在科学上和工程上，特别对流体的湍流流动问题的日趋重要所致。

本章将在第一节先讨论流动边界层，在第二节讨论管内流动边界层与热边界层。第三节为圆管中的速度分布，最后一节为一般速度分布线。

## 第一节 流动边界层

### 1-2 流动边界层与其发展

当流体流经固体壁面时，由于真实流体（非理想流体）具有粘

性，就产生剪应力和垂直于运动方向的速度梯度  $du/dy$ 。牛頓粘性定律表达了流体的剪应力  $\tau$  和速度梯度間的关系，即

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-1)$$

式中  $\tau$ ——剪应力，[公斤/米<sup>2</sup>]；

$u$ ——流体流动速度，[米/秒]；

$y$ ——离固体壁的距离，[米]；

$\mu$ ——粘度，[ $\frac{\text{公斤}\cdot\text{秒}}{\text{米}^2}$ ]。

凡是服从式(1-1)关系的流体，称为牛頓型流体，如空气、气体、水和許多通常遇到的液体。

正由于粘性流体在运动时与固体壁面产生了剪应力，以致靠近壁面的流体流动速度减低而形成边界层。图 1-1 为在平板上边界层的形成。图中虚綫为边界层的厚度，可知是随着流动方向而逐渐增加的，并且在平板起点边界层厚度等于零。从图还可观察到，当  $y=0$  时， $u=0$ ；而当  $y=\delta$  时， $u=u_s$ ； $u_s$  是指边界层外緣处的流速， $\delta$  是指边界层的厚度。边界层学說指出：当  $y \leq \delta$  时，那里粘度起着作用，意即在边界层以外的流体运动，可以简化地当作无粘性即理想流体来考虑。既然如此假定，则边界层以外的流体运动，才可应用柏努利公式，因为柏努利公式是从理想流体的欧拉运动方程式推导出的。

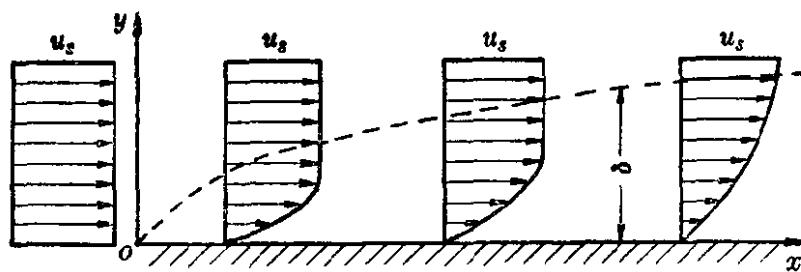


图 1-1 平板上边界层的形成

在流体运动时的边界层称为流动边界层，其中流体速度  $u$  随着离固体壁面距离  $y$  而有显著的变化。这种具有显著变化的厚度

称之为边界层厚度。边界层厚度的定义也有取  $u/u_s = 0.99$  处离壁面垂直距离的，这就是所謂“有限边界层”的概念。

图 1-2 所示为流动边界层在平板上的发展。由于边界层毕竟是較薄的（与平板长度比較），故图中的  $y$  軸是放大了很多倍数。在平板的左端，边界层开始时的厚度为零，随着  $x$  方向边界层厚度逐渐增加，由于这部分流体的流动类型是滞流，故称为滞流边界层。当达到某一距离  $X_c$  处（如图 1-2），流动类型由滞流轉变为湍流，此后的边界层則称为湍流边界层。由于流体流动类型的变更， $X_c$  称为临界距离。实际上，从  $X_c$  以后先有一段过渡流存在，然后再达到湍流区域。从流体力学得知，即使在湍流区域，靠近平板的极薄一层中仍作滞流流动，这一层称为滞流内层。在滞流内层与湍流边界层之間，还存在着一个緩冲区域称为过渡层。

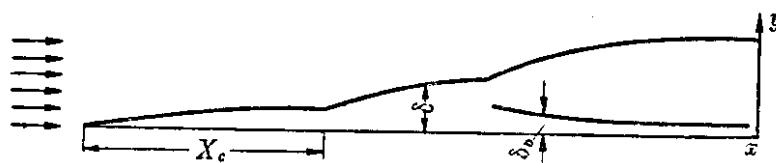


图 1-2 流动边界层的发展(在平板上)

临界距离  $X_c$  是与平板前緣的形状、板面的光滑度、流体的性质和流体的流动速度有关。前緣愈鈍、板面愈粗糙，则临界距离愈短。对于給定的平板，不論何种流体，滞流边界层的临界距离决定于临界雷諾准数的数值，其定义为

$$Re_x = \frac{u_s X_c}{\nu} \quad (1-2) \textcircled{1}$$

从实验得知，最低的  $Re_x$  为 32,000，最高值达 500,000 或更大一些，而一般的  $Re_x$  可从 80,000 开始。

必須指出，在薄的平板上，板的上面和下面应当存在相对称的滞流边界层和湍流边界层。

① 凡未指出符号的定义，请参阅本章后的命名表，以后各章均如此。

### 1-3 平板上的边界层厚度<sup>[1][4]</sup>

从上述边界层的簡要概念，可进一步估計边界层厚度的公式。茲分別將滯流边界层厚度与湍流边界层厚度予以介紹。

(一) 滯流边界层厚度 在滯流边界层中，速度分布側形呈拋物綫狀，即

$$\frac{u}{u_s} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (1-3)$$

从流体力学得知，边界层的動量方程式①可寫为

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta (u_s - u) u dy \quad (1-4)$$

上式中的积分可改写为

$$\rho \int_0^\delta (u_s - u) u dy = \rho \int_0^\delta u_s^2 \left( \frac{u}{u_s} \right) \left( 1 - \frac{u}{u_s} \right) dy$$

如代入式(1-3)的关系，积分后得

$$\rho \int_0^\delta (u_s - u) u dy = \frac{39}{280} \rho u_s^2 \delta$$

于是从式(1-4)可得

$$\tau_0 = \frac{39}{280} \rho u_s^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (1-4a)$$

从滯流边界层的速度分布側形式(1-3)，可知

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{d\mu}{dy} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{u_s}{\delta} \quad (1-3a)$$

将上式关系代入式(1-4a)而加以积分，得出

$$\delta = 4.64 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_s}} + C_1$$

式中  $x$  是从平板前緣算起的距离，很明显地当  $x=0$ ,  $\delta=0$ ，故上式中的积分常数  $C_1=0$ ，于是滯流边界层厚度  $\delta$  为

① 推导可參閱[1] 295~297 頁(中譯本)。此处[1]指本章参考文献的序次，附在本章末尾，以后各章均是如此。

$$\delta = 4.64 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_s}} = 4.64 \sqrt{\frac{\nu x}{u_s}} \quad (1-5)$$

或

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\frac{x u_s}{\nu}}} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}} \quad (1-5a)$$

上式中的  $Re_x$  是以离平板前缘算起的距离作为几何尺寸的雷诺准数。因以上解法为近似解，故上式中的常数 4.64，在文献中亦有用常数为 5.2 的。无论如何，从上式估计的湍流边界层厚度，说明了  $\delta/x$  比值与  $\sqrt{Re_x}$  的关系呈反比例。

(二) 湍流边界层厚度 在上述的湍流边界层，假定了仅有粘性作用力，故其中动量传递全赖于分子运动。与此相反，在湍流边界层中的湍流主体内，动量传递基本上赖于湍流运动。假定在湍流边界层中的速度分布侧形可以用普兰德建议的公式

$$\frac{u}{u_s} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (1-6)$$

将上式的关系代入式(1-4)中，得

$$\rho \int_0^{\delta} (u_s - u) u dy = \rho u_s^2 \int_0^{\delta} \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \right] dy = \frac{7}{72} \rho u_s^2 \delta$$

于是式(1-4)的右边部分为

$$\tau_0 = \frac{7}{72} \rho u_s^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (1-4b)$$

应用布拉修斯 (Blasius) 的剪应力在光滑壁面上的公式 (湍流而  $Re < 10^5$ )，

$$\tau_0 = 0.0228 \rho u_s^2 \left( \frac{\nu}{u_s \delta} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1-7)$$

代入式(1-4b)而加以积分，得到

$$\delta = 0.376 x \left( \frac{\nu}{u_s x} \right)^{\frac{1}{5}} + C_2$$

如假定  $C_2=0$ , 則

$$\delta = 0.376x \left( \frac{\nu}{u_s x} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (1-8)$$

或

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.376}{(Re_x)^{\frac{1}{5}}} \quad (1-8a)$$

必須指出, 在上述計算中, 沒有考慮从滯流邊界層發展到湍流邊界層的過渡層, 因為過渡層是不穩定的.

**例 1-1** 當空氣的流速為 90 [米/秒] 與離平板前緣距離  $x$  為 6 厘米時, 和當水的流速為 3 [米/秒] 與離平板前緣  $x$  為 17 厘米時, 試分別求常溫時滯流邊界層的厚度.

[解] 假定取常溫為  $15^{\circ}\text{C}$ , 對空氣查附錄表, 得  $\nu = 1.52 \times 10^{-5}$  [米<sup>2</sup>/秒]. 从式(1-2), 知對於空氣:

$$Re_x = \frac{0.06 \times 90}{1.52} \times 10^5 = 3.55 \times 10^5 \quad \text{或} \quad \sqrt{Re_x} = 596$$

从式(1-5a)求空氣的邊界層厚度:

$$\delta = \frac{4.64 \times 6}{596} = 0.047 \text{ [厘米]}$$

在  $15^{\circ}\text{C}$ , 水的  $\nu = 1.15 \times 10^{-6}$  [米<sup>2</sup>/秒]. 从式(1-2), 對於水

$$Re_x = \frac{0.17 \times 3}{1.15} \times 10^6 = 44.4 \times 10^4 \quad \text{或} \quad \sqrt{Re_x} = 667$$

引用式(1-5a)求水的邊界層厚度:

$$\delta = \frac{4.64 \times 17}{667} = 0.12 \text{ [厘米]}$$

#### 1-4 湍流時平板上的滯流內層 ①

前已述及, 在平板上當流體作湍流流過時, 緊靠壁面依舊存在着一層極薄的滯流層, 稱為滯流內層或滯流層, 以  $\delta_b$  表示之. 次一問題, 為如何估計  $\delta_b$ , 因為雖然極薄, 但對於傳熱和傳質的影響很大.

① 亦可稱滯流底層(laminar sublayer).

假定在滞流內层中,由于厚度极薄,速度与离平板的距离間可作为直線关系,則

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{u}{y} = \mu \frac{u_b}{\delta_b} \quad (1-1a)$$

式中  $u_b$  为在  $\delta_b$  处的流体速度.

对光滑壁面的剪应力,可应用式(1-7)的关系,代入上式得

$$0.0228 \rho u_s^2 \left( \frac{\nu}{u_s \delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \mu \frac{u_b}{\delta_b}$$

故

$$u_b = \frac{0.0228 \rho u_s^2}{\mu} \left( \frac{\nu}{u_s \delta} \right)^{\frac{1}{4}} \delta_b$$

簡化后得

$$\frac{\delta_b}{\delta} = \frac{1}{0.0228} \frac{u_b}{u_s} \left( \frac{\nu}{u_s \delta} \right)^{\frac{3}{4}} = 43.8 \frac{u_b}{u_s} (Re_\delta)^{-\frac{3}{4}} \quad (1-9)$$

再应用式(1-6)的关系,对滞流內层而論应为

$$\frac{u_b}{u_s} = \left( \frac{\delta_b}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (1-6a)$$

或

$$\frac{\delta_b}{\delta} = \left( \frac{u_b}{u_s} \right)^7 \quad (1-6b)$$

将式(1-6b)的关系代入式(1-9)中而加以簡化, 得

$$\frac{u_b}{u_s} = 1.878 Re_\delta^{-\frac{1}{8}} = 1.878 \left( \frac{\nu}{u_s \delta} \right)^{\frac{1}{8}} \quad (1-10)$$

如果将式(1-8)中的  $\delta$  值代入上式,則得

$$\frac{u_b}{u_s} = \frac{2.12}{\left( \frac{u_s x}{\nu} \right)^{0.1}} = \frac{2.12}{(Re_x)^{0.1}} \quad (1-10a)$$

而按式(1-6b), 則

$$\frac{\delta_b}{\delta} = \left( \frac{u_b}{u_s} \right)^7 = \frac{194}{Re_x^{0.7}} \quad (1-11)$$