

YUANZIHE JIEGOU LILUN

原子核结构 理论

曾谨言 孙洪洲编著

上海科学技术出版社
SHANGHAI KEXUE JISHU CHUBANSHE

原子核结构理论

曾谨言 孙洪洲 编著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书简要地阐述了原子核结构的一些基础理论、近年来的重要进展以及存在的主要问题。其中主要包括：原子核的费密气体模型、壳模型、转动与振动、相互作用玻色子模型、对关联、高自旋态、巨共振及同位旋多重态等。读者根据工作需要选读有关章节后，就可进一步阅读有关专门文献以及开展研究工作。

本书可作为理论物理和核物理等专业研究生的教学参考书，也可作为核物理领域的科学工作者的参考书。

原子核结构理论

曾谨言 孙洪洲 编著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

经售处：上海发行所发行

江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 16 字数 428,000

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数 1—2,800

统一书号：13119·1447 定价：4.40元

序

1979年初,教育部委托广西大学举办了一个核结构理论讲习班。北京大学的几位同志应邀就核结构理论的一些方面作了介绍,并写了一个讲稿。鉴于国内还缺少这方面的参考书,我们在这讲稿的基础上作了补充和修改,写成本书。本书除讲述核结构的一些基本知识外,对于核结构理论发展的几个前沿领域,例如高自旋态和原子核超流性,巨共振,相互作用玻色子模型等也作了初步介绍。由于我们工作的局限,还有一些重要方面没有写进去。

本书第一、四、六、七、八、九章由曾谨言执笔,第二、三、五、十章及附录由孙洪洲执笔。各章内容,关系并不密切。读者可根据需要,选读有关章节。本书可作为理论物理和核物理等专业的研究生的教学参考读物,也可供核物理工作者参考。参加讲习班教学工作的还有齐辉、钟毓澍、林纯镇等同志。

由于多种原因,本书当时未能及时出版。近几年来,核结构理论一些前沿领域又有了很大进展。所以我们对第四章(原子核的转动与振动)作了部分修改,第六章(对关联)作了较大修改和补充,第五章(相互作用玻色子模型)及第七章(高自旋态)则完全重写。

作 者

1986年春于北京

目 录

序

第一章 原子核的一些基本性质	1
§ 1.1 原子核的大小	1
§ 1.2 原子核的质量	6
§ 1.3 原子核的电磁性质	14
参考文献	22
第二章 费密气体模型简介	24
§ 2.1 原子核的波函数	24
§ 2.2 费密气体模型简介	26
§ 2.3 从费密气体模型推导质量公式	28
§ 2.4 费密气体模型下原子核的波函数	33
§ 2.5 费密气体模型下, 原子核的单核子、二核子密度矩阵	38
§ 2.6 在费密气体模型下原子核的库仑能	48
参考文献	50
第三章 原子核的壳层模型	51
§ 3.1 原子核壳层模型的基本假定	51
§ 3.2 单粒子位势 $U(i)$	53
§ 3.3 单粒子波函数	56
§ 3.4 单粒子能级	58
§ 3.5 原子核的单粒子能级	63
§ 3.6 原子核的波函数	68
§ 3.7 辛弱数与母分系数	76
§ 3.8 在 j^n 组态中, 单体不可约张量与二体标量算符的矩阵元	89
§ 3.9 原子核的能量	92
§ 3.10 原子核的低激发能谱	98
§ 3.11 原子核的磁矩, 电四极矩	106

§ 3.12 壳层模型的进一步改进, 组态混合	115
参考文献	117
第四章 原子核的转动与振动	119
§ 4.1 原子核转动的实验证据	119
§ 4.2 内部态波函数	126
§ 4.3 转动波函数与转动谱	136
§ 4.4 γ 跃迁、分支比及选择定则	142
§ 4.5 转动惯量	148
§ 4.6 球形核的表面振动	157
§ 4.7 变形核的转动与振动, Bohr 哈密顿量	165
§ 4.8 转动谱理论的其他进展	172
参考文献	188
第五章 相互作用玻色子模型	189
§ 5.1 $U(N)$ 群及其子群	189
§ 5.2 相互作用玻色子模型	206
§ 5.3 IBM 的 $U(5)$ 极限	217
§ 5.4 IBM 的 $O(6)$ 极限	227
§ 5.5 IBM 的 $SU(3)$ 极限	236
§ 5.6 近年来 IBM 的新进展	247
参考文献	249
第六章 对关联	251
§ 6.1 对关联存在的实验证据	251
§ 6.2 配对耦合, 对力的哈密顿量	255
§ 6.3 对力的处理方法(I)——一对粒子情况	262
§ 6.4 对力的处理方法(II)——能级简并情况 准自旋	267
§ 6.5 对力的处理方法(III)——BCS 方法 准粒子	274
§ 6.6 对力的处理方法(IV)——粒子数守恒(PNC)方法	290
§ 6.7 对关联对转动惯量的影响	297
§ 6.8 对转动与对振动	301
附录 角动量本征态的时间反演态	309
参考文献	315

第七章 高自旋态	317
§ 7.1 概况	317
§ 7.2 回弯的机制	323
§ 7.3 推转壳模型与角动量顺排	331
§ 7.4 高自旋态实验资料的分析	348
§ 7.5 原子核高自旋态研究中几个关注的问题	361
参考文献	372
第八章 巨共振	374
§ 8.1 一般情况	374
§ 8.2 巨共振的宏观处理	379
§ 8.3 巨共振的微观描述	389
附录 Steinwedel-Jensen GDR 模式的频率	398
参考文献	402
第九章 同位旋相似态与多重态	404
§ 9.1 同位旋概念	40 ⁴
§ 9.2 同位旋相似态与库仑能差	406
§ 9.3 同位旋多重态的质量方程	411
附录 同位旋的数学表述	415
参考文献	419
第十章 γ 跃迁	421
§ 10.1 电磁场的平面波解, γ 跃迁几率	421
§ 10.2 多极辐射	425
§ 10.3 同位旋选择定则	433
§ 10.4 有效电荷	435
§ 10.5 γ 辐射角关联	440
§ 10.6 内转换与内对产生	442
§ 10.7 有关 γ 跃迁的一些实验结果	446
参考文献	457
附录 角动量理论	459

§ 1 角动量的代数理论	459
§ 2 旋转群及其不可约表示	478
§ 3 不可约张量算符	496
参考文献	503

第一章 原子核的一些基本性质

§ 1.1 原子核的大小

1911年, Rutherford 提出了有名的 α 粒子对原子的散射实验, 这一实验肯定了原子的“有核模型”. 在这之前, 人们已知道原子的半径约为

$$R(\text{原子}) \sim 10^{-8} \text{ 厘米.} \quad (1.1-1)$$

为解释 α 粒子散射的角分布, 特别是大角度的散射, 只能认为原子的正电荷以及几乎全部质量都集中在一个很小的区域中, 形成一个核心, 称为原子核, 其半径

$$R(\text{核}) < 10^{-12} \text{ 厘米.} \quad (1.1-2)$$

带负电的电子则围绕原子核运行, 其运动遵守量子力学规律. 可以看出, 原子内部是很“空旷”的. 原子质量密集的区域体积只占原子体积的很小一部分, $V(\text{核})/V(\text{原子}) < 10^{-12}$. 这是人们认识原子核的第一个重要的里程碑.

但是原子核究竟是什么东西? 曾经有人认为原子核由带正电的质子与带负电的电子组成. 但稍加分析就看出, 这种看法与许多实验事实以及量子力学的基本原理(原子核的统计性, 测不准关系等)是矛盾的. 1932年 Chadwick 发现中子后, Heisenberg 等立即提出原子核由质子与中子组成. 这样, 上面提到的各种矛盾随之迎刃而解. 这是人们认识原子核的第第二个重要里程碑. 从这个时候开始, 作为一个复杂的多体系的原子核的结构问题, 才提到日程上来.

但是组成原子核的质子与中子究竟是怎样分布的? 原子核的较确切的大小究竟如何? 关于原子核大小的早期知识, 来源于原子核的 α 衰变以及镜核的 β 衰变, 所得出的结果相当粗糙(Blatt

& Weisskopf, 1952). 目前关于原子核的电荷分布及半径的最准确的知识是在五十年代以后从高能电子弹性散射 (Hofstadter, 1956, 1957) 以及 μ 原子的 X 射线谱 (Fitch & Rainwater, 1953;

Wu & Wilets, 1969) 的实验分析得到的。

电子散射的角分布与核电荷分布有关。由于电磁作用是人们了解得最清楚的一种相互作用，所以从电子散射可以得出关于核电荷分布的可靠知识。

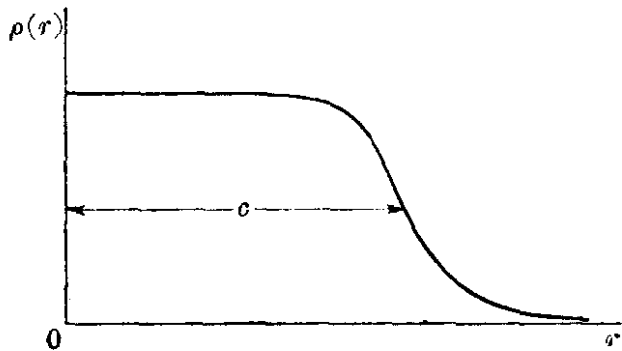


图 1.1 原子核电荷的 Fermi 型分布

在分析电子散射时，常常先假设一种合理的电荷分布 ρ (含有某些参数)，然后计算出电子的散射截面，并与实验比较以求出最佳参数，从而获得原子核电荷分布的知识。分析实验时最常用的电荷分布为 Fermi 型分布 (图 1.1)，

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}}, \tag{1.1-3}$$

ρ_0 由归一化条件定出，即

$$\int \rho(r) d\tau = \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr = Ze. \tag{1.1-4}$$

由散射角分布定出最佳参数 c 与 a 。

分析表明，对于不太轻的核， $c/a \gg 1$ 。按 (1.1-3) 式，在核中心 ($r=0$) 附近， $\rho \sim \rho_0$ ($\because e^{-c/a} \ll 1$)。在 $r=c$ 处， $\rho = \rho_0/2$ ，所以 c 称为半密度半径。 a 是表征电荷分布的表层厚度的参数¹⁾。 a 愈小，则表层愈薄。当 $a \rightarrow 0$ 时，核电荷变成一个均匀分布的球。

利用所得电荷分布 $\rho(r)$ ，可以计算出电荷分布的方均根半径

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} = \left[\frac{\int r^2 \rho(r) d\tau}{\int \rho(r) d\tau} \right]^{1/2}. \tag{1.1-5}$$

用 (1.1-3) 式代入，可求出

1) 文献中习惯取 $t = a4 \ln 3$ 表示表层厚度，相当于 ρ 从其中心值的 90% 下降到 10% 所经历的一段距离。

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} c^2 \left[1 + \frac{7}{3} \left(\frac{\pi a}{c} \right)^2 \right]. \quad (1.1-6)$$

通常还习惯引进一个等效的均匀电荷分布的半径 R , 即假设

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (1.1-7)$$

其中

$$\rho_0 = 3Ze/4\pi R^3. \quad (1.1-8)$$

此时, 按(1.1-5)式, 可得

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2. \quad (1.1-9)$$

所以

$$R = \sqrt{\frac{5}{3}} \langle r^2 \rangle^{1/2} \approx 1.291 \langle r^2 \rangle^{1/2}. \quad (1.1-10)$$

从(1.1-6)及(1.1-10)式可以看出, 当 $a \rightarrow 0$ 时, $R \rightarrow c$.

利用 μ 原子的 X 射线谱以确定核电荷分布的概念首先为 J. A. Wheeler 提出. 当一个 μ^- 粒子被原子俘获以后, 可以形成 μ 原子. 由于 μ 粒子的质量 $m_\mu \approx 207 m_e$, 它的轨道半径将比相应的电子轨道半径约小 200 倍, 所以相当靠近原子核. 特别是对于较重的原子, 处于低轨道的 μ 粒子, 渗入原子核的几率相当大. 因此 μ 原子的能级以及 μ 粒子在内层轨道之间的跃迁(例如 $2p \rightarrow 1s$) 所产生的 X 射线谱与核电荷分布有敏感的关系. 由 μ 原子的 X 射线谱可以相当精确测定核电荷分布的细节. Fitch & Rainwater (1953) 第一次作了这样的观测. 随后不少人做了大量的 μ 原子 X 射线谱的实验. 随着探测技术的进步, 它几乎成为目前测量核电荷分布的最准确的方法了 (Schaller, *et al.*, 1978).

高能电子散射及 μ 原子的 X 射线谱的大量实验分析表明: 原子核内部的密度基本上是均匀的. 随着质量数 A 增大, 原子核体积 V 也相应成比例地增大, $V \propto A$. 所以核半径 R 遵守下列 $A^{1/3}$ 律,

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \approx 1.20 \times 10^{-13} \text{ cm}. \quad (1.1-11)$$

按此公式, 原子核内的核子平均密度

$$\rho_{\text{平均}} = \frac{A}{V} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \approx 1.38 \times 10^{38} \text{ 核子/cm}^3$$

$$\approx 2.3 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3. \quad (1.1-12)$$

即一个火柴盒那样大体积的核物质的重量约为 10 亿吨!

更仔细的分析表明, 公式(1.1-11)中的半径常数 r_0 并不能保持为常数, 而是有系统的变化. 即

$$r_0 \approx (1.20 \sim 1.35) \times 10^{-13} \text{ cm}. \quad (1.1-13)$$

对于轻核, $r_0 \sim 1.35 \times 10^{-13} \text{ cm}$, 随原子核增大, r_0 逐渐减小. 对于重核, r_0 下降为 $1.20 \times 10^{-13} \text{ cm}$. 见图 1.2.

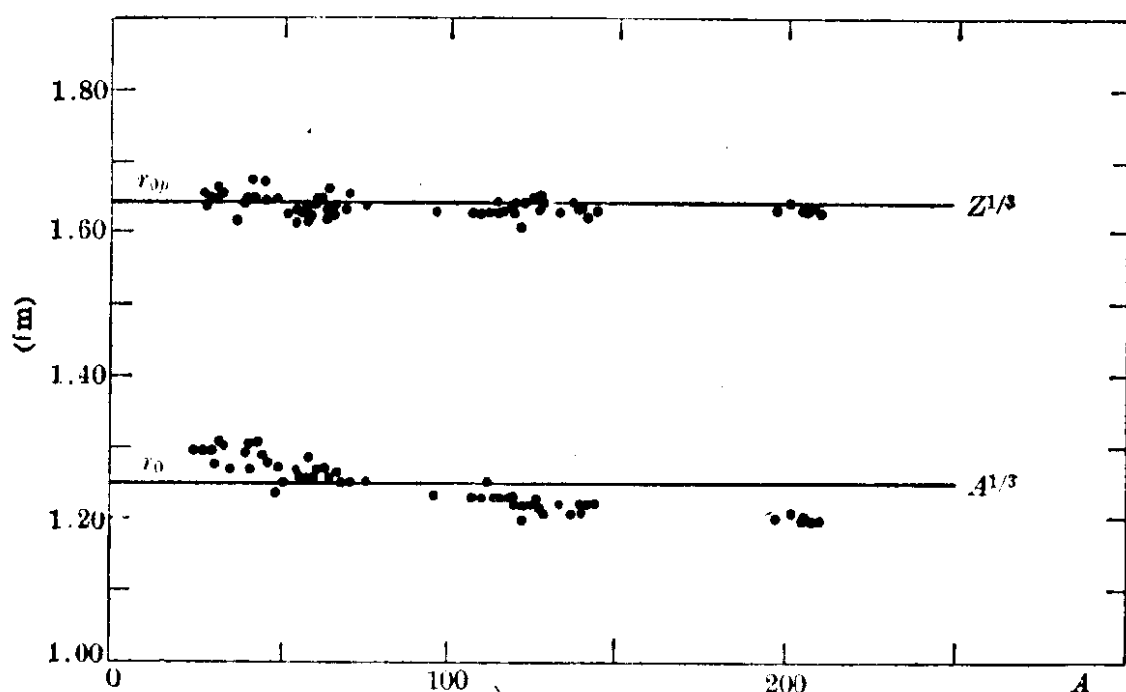


图 1.2 核电荷分布半径的 $A^{1/3}$ 律与 $Z^{1/3}$ 律

大量的实验分析结果表明: 从轻核到重核的总的变化趋势来看, 核电荷半径较好地遵守 $Z^{1/3}$ 律(曾谨言, 1957, 1975)

$$R = r_p Z^{1/3}, \quad r_p = 1.64 \times 10^{-13} \text{ cm}. \quad (1.1-14)$$

为更具体说明这点, 表 1.1 中给出几个典型的例子. ^{40}Ca 、 ^{48}Ca 及 ^{208}Pb 都是球形核, 它们的半径相当好地遵守 $Z^{1/3}$ 律, 而明显偏离 $A^{1/3}$ 律. 特别是 ^{40}Ca 与 ^{48}Ca , 它们的质子数 Z 都为 20, 但中子数相差达 40%, 而实验测出它们的电荷半径几乎完全相同, 这是很能说明问题的.

表 1.1

核	$\langle r^2 \rangle^{1/2}(\text{fm})$	$r_0(\text{fm})$	$r_p(\text{fm})$	观测方法及数据出处
$^{40}_{20}\text{Ca}$	3.4800	1.314	1.655	μ , Wohrfahlt, <i>et al.</i> , 1978.
$^{48}_{20}\text{Ca}$	3.4809	1.236	1.656	μ , Wohrfahlt, <i>et al.</i> , 1978.
$^{208}_{82}\text{Pb}$	5.497(± 2)	1.202	1.634	μ , Barrett & Jackson, 1977.
	5.509(± 29)	1.204	1.637	(e, e), C. W. de Jager, <i>et al.</i> , 1974.
$^{207}_{82}\text{Pb}$	5.504(± 1)	1.201	1.634	μ , Barrett & Jackson, 1977.
	5.513(± 32)	1.203	1.638	(e, e), C. W. de Jager, <i>et al.</i> , 1974.
$^{208}_{82}\text{Pb}$	5.501(± 1)	1.201	1.638	μ , Barrett & Jackson, 1977.
	5.489(± 10)	1.199	1.634	(e, e), C. W. de Jager, <i>et al.</i> , 1974.

还有许多方面的实验事实支持电荷半径的 $Z^{1/3}$ 律。例如原子核质量公式(Zeng, Cheng & Yang, 1980), 同位旋相似态的库仑能差的变化规律(Zeng, Lin & Yang, 1982), 原子核巨共振能量的变化规律(Zeng & Yang, 1982)等。

应该提到, 核半径还呈现出微弱的壳效应(Zeng, 1983), 其中以形变对半径的影响最为明显。如果假设(Bohr & Mottelson, 1975): (1) 核形变为四极轴对称型, (2) 发生变形时, 等密度面包围的体积不变, (3) 所有等密度面的偏心率相同, 则可以证明,

$$\langle r^2 \rangle = \langle r^2 \rangle_0 \left(1 + \frac{5}{4\pi} \beta^2 \right), \quad (1.1-15)$$

其中 β 是平常习惯用的四极形变参数¹⁾。 $\beta=0$ 时, $\langle r^2 \rangle^{1/2} = \langle r^2 \rangle_0^{1/2}$, 即球形情况下的核半径方均根值。实验资料表明, 大变形核 ($\beta \geq 0.20$) 的半径常数 r_p 系统地略大一点 (1~2%)。这个事实在 $A^{1/3}$ 律中被 r_0 的系统偏离 ($\sim 10\%$) 所掩盖, 没有引起人们注意。

1) 设原子核为一个不可压缩的液滴, 则表面用下式描述

$$R(\theta) = R_0 \left[1 - \frac{\beta^2}{4\pi} + \beta Y_{20}(\theta) \right]$$

方括号中第二项是为保持体积不变而引进的。

§ 1.2 原子核的质量

(一) 结合能与核力的饱和性

原子核的质量(或结合能)是原子核最基本的性质之一。通常核质量表中所列出的 M 是原子质量。原子核的质量为

$$M_{\text{核}} = M - [Zm_e - B_e(Z)], \quad (1.2-1)$$

其中 m_e 是电子质量, $m_e = (0.511006 \pm 0.000002) \text{ MeV}$, $B_e(Z)$ 是中性原子中的电子的结合能。按 Thomas-Fermi 模型可求出 (Foldy, 1951)

$$B_e(Z) = 15.73 Z^{7/3} \text{ eV}. \quad (1.2-2)$$

这一项很小, 在实际应用中常忽略不计。

原子核的结合能定义为

$$B(Z, N) = ZM_p + NM_n - M_{\text{核}}(Z, N), \quad (1.2-3)$$

其中 $M_p = (938.256 \pm 0.005) \text{ MeV}$ (质子质量),

$M_n = (939.550 \pm 0.005) \text{ MeV}$ (中子质量)。

通常不考虑各原子中的电子结合能的微小差别, 把 $B(Z, N)$ 写成

$$B(Z, N) = ZM_H + NM_n - M(Z, N), \quad (1.2-4)$$

其中 $M_H = (938.767 \pm 0.005) \text{ MeV}$ (氢原子质量)。

有时质量表中还给出质量盈余 (mass excess) 这个量,

$$\text{质量盈余} = M - A, \quad (1.2-5)$$

这里 M 用原子单位表示。所谓原子单位是规定 ^{12}C 的质量为 12 而定出的单位。

$$\begin{aligned} 1 \text{ 原子单位 (MU)} &= (1.66043 \pm 0.00002) \times 10^{-24} \text{ g} \\ &= (931.478 \pm 0.005) \text{ MeV}. \end{aligned}$$

随着测量技术的改进, 原子质量的观测值的精确度不断提高。而且由于新的测量方法的使用, 不仅 β 稳定线邻近的核质量可以准确测定, 远离 β 稳定线的原子核以及在自然界中不存在的重元素的原子质量也不断被测出。所以每隔几年就有新的原子质量汇编问世。最近的原子质量表见 Wapstra, *et al.*, 1985。

根据结合能的实验资料,在三十年代人们就知道,当 $A > 12$ 以后,原子核中每个核子的平均结合能接近一常数,即

$$B/A \sim 8 \text{ MeV}. \quad (1.2-6)$$

根据这一事实,人们认识到核子之间的相互作用具有“饱和性”.因为如假设任何两个核子之间的相互作用都对结合能有大致相同的贡献,则系统的结合能应该大致与核子对的数目成比例,即 $B \propto A(A-1)/2$,而每个核子的平均结合能大致与 A 成比例,因而不能保持为常数.原子核内每个核子的平均结合能近似为常数的事实表明,在原子核内一个核子最多只能与一定数目(与 A 无关)的相邻核子作用.这称为核力的饱和性.这与分子共价键的饱和性有类似之处.基于这种考虑,Heisenberg 提出核子之间有交换力的概念.

(二)原子核质量的半经验公式

Weizsäcker(1935)基于理论上的一些考虑,提出了下列结合能的半经验公式

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 / A^{1/3} - a_{sy} (N - Z)^2 / A + B_p, \quad (1.2-7)$$

其中第一项与 A 成线性关系.按照核半径的 $A^{1/3}$ 律,这一项能量也就与核体积成比例,故称为体能项.第二项为表面能.因为对于处于核表面的核子,相邻核子的数目要少一些,核子之间的吸引力未能充分发挥出来,所以表面附近的每个核子对结合能的贡献要小一些,因而要从线性项中减去这一部分.第三项为库仑排斥能.若认为核电荷 Ze 均匀分布于半径为 R 的球内,则库仑能为

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R} \propto Z^2 / A^{1/3}. \quad (1.2-8)$$

若核电荷分布不均匀,则系数略异.例如对于 Gauss 分布,系数 $3/5$ 应改为 0.67 (Sengupta, 1960).第四项为对称能项,是与泡利原理有密切关系的一种量子效应,无经典对应.在第二章中,将在费密气体模型下讨论对称能的形式.第五项为对能,它反映原

子核结合能的奇偶效应。实验表明：偶偶核最稳定，奇 A 核次之，奇奇核最不稳定。 B_P 通常取为。

$$B_P = \begin{cases} \varepsilon(A), & \text{偶偶核} \\ 0, & \text{奇 } A \text{ 核} \\ -\varepsilon(A), & \text{奇奇核.} \end{cases} \quad (1.2-9)$$

$\varepsilon(A)$ 有各种取法，但与实验符合的情况都差不多。例如 A. E. S. Green(1955) 取 $\varepsilon(A) = 12 A^{-1/2} \text{ MeV}$ 。

(1.2-7) 式中的参数可以根据结合能的观测值用最小二乘法定出。例如 Green(1955) 定出的参数值为

$$\begin{aligned} a_V &= 15.7586 \text{ MeV}, \\ a_S &= 17.810 \text{ MeV}, \\ a_C &= 0.7105 \text{ MeV}, \\ a_{Sy} &= 23.701 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

自从 Weizsäcker 公式提出后，有各种不同的改进公式相继提出。1955 年以前的工作总结可参阅 A. E. S. Green(1955) 的书。1968 年以前工作可参阅 J. Wing(1968) 及 J. Wing & P. Fong(1964) 的文章。迄今，已提出的公式不下三十多个。其中有一些公式相当繁杂，应用起来不很方便，而且不是每一项的物理意义都很清楚。值得提到的有下列几个公式。它们都比较简单，各具有一定的特点，比 Weizsäcker 公式有不同程度的改进。

Myers & Swiatecki(1966) 公式

$$\begin{aligned} B(A, Z) &= a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2 / A^{1/3} - a_{Sy} (N - Z)^2 / A \\ &\quad + C_D Z^2 / A - a_{S,S} (N - Z)^2 / A^{4/3} + B_P + B_{\pi}, \end{aligned} \quad (1.2-10)$$

$$a_V = 15.68 \text{ MeV}, \quad a_S = 18.56 \text{ MeV},$$

$$a_C = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} = 0.717 \text{ MeV} \quad (r_0 = 1.2049 \text{ fm}),$$

$$a_{Sy} = 28.06 \text{ MeV},$$

$$C_D = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{a_0}{r_0} \right)^2 \frac{e^2}{r_0} = 1.211 \text{ MeV} \quad (a_0 = 0.546 \text{ fm}),$$

$$a_{s,s}=33.22 \text{ MeV}.$$

$U_D Z^2/A$ 是核表面的弥散所导致的对库仑能项的修正. $a_{s,s}$
 $(N-Z)^2/A^{4/3}$ 是表面对称能, 因考虑了表面效应之后对于对称能的修正.

Danos & Gillet(1977)公式

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2/A^{1/3} - a_{C2} C2(A, Z)/A^\alpha + B_\pi, \quad (1.2-11)$$

其中

$$C2(A, Z) = \begin{cases} (T+2)^2 - 4, & \text{偶偶核} \\ (T+2)^2 - 5/2, & \text{奇 } A \text{ 核} \\ (T+2)^2, & \text{奇奇核} \end{cases}$$

是 SU_4 群的最低阶的 Casimir 算子的本征值, T 是原子核同位旋. 对于核基态, $T = |N-Z|/2$. 参数值为

$$a_V = 15.889 \text{ MeV}, \quad a_S = 17.939 \text{ MeV}, \quad a_C = 0.72 \text{ MeV},$$

$$a_{C2} = 27.802 \text{ MeV}, \quad \alpha = 0.79.$$

这个公式的特点是把对称能与对能合并起来考虑, 因而参数少一个. 他们发现, 计算所得结合能与实验观测值符合的程度比 Weizsäcker 公式有改进.

曾谨言等(Zeng, Cheng & Yang, 1980)提出的公式

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \cdot Z^{5/3} - a_{Sy} T(T+1)/A^\alpha + B'_p + B_\pi, \quad (1.2-12)$$

$$a_V = 15.703 \text{ MeV}, \quad a_S = 18.410 \text{ MeV},$$

$$a_C = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_p} = 0.526 \text{ MeV},$$

$$a_{Sy} = 35.776 \text{ MeV}, \quad \alpha = 0.86.$$

这个公式的特点是: a) 按照电荷半径的 $Z^{1/3}$ 律, 对库仑能项形式作了修改, b) 对称能项用 B'_p 而不用 B_p , B'_p 形式见(1.2-20)式. c) 对称能项采用 $T(T+1)/A^\alpha$ 形式. 计算表明, 不仅结合能计算值有改进, 在其它方面, 例如 β 稳定线位置, 可裂变度随 A 的变化, 库仑能差的变化规律, 同位旋多重态的质量方程等方面都有改进(Zeng, Lin & Yang, 1982).