高等微积分及其应用

[美] 尼古拉斯·J·德利劳
黄慧力 等译
重庆出版社

高等微积分及其应用

尼古拉斯·J·德利劳 著

黄慧力 等译

重庆出版社

ADVANCED CALCULUS WITH APPLICATIONS

BY Nicholas· J· De Lillo

Macmillan Publishing Co., Inc.

Printed in the United States of America. 1982.

根据 Macmillan Publishing Co., Inc. 1982年版译出

责任编辑：尹向泽

封面设计：乔　楠

技术设计：忠　凤

[美] 尼古拉斯·J·德利劳著

黄慧力 等译

高等微积分及其应用

重庆出版社出版、发行　（重庆长江二路205号）

新华书店经销　重庆印制一厂印刷

*

开本:850×1168 1/32　印张:33　插页:4　字数:830千

1988年6月第一版　1988年6月第一版第一次印刷

印数：1—2,500

ISBN 7-5366-0438-6/O·5

科技新书目　183—319　定价：8.80元

译 者 序

这里我们介绍给读者的是纽约大学 Nicholas· J· De Lillo 所著的《高等微积分及其应用》一书。

微积分是数学的一个重要分支，几乎是一切高等数学的基础，是一切自然科学和社会科学的重要工具，是一切科学工作者必须掌握的基本知识，这是不言而喻的。过去我们习惯于数学各科自成体系，系统严谨，互不相涉，强调理论，微积分也不例外。这固然有它的长处。但时至今日，各种科学是建立在互相渗透、互相促进、互为工具和互相依赖的基础上才得到进一步发展。理论必须紧密地结合实际，理论才有生命力，才能够使科学更好地服务于人类的进步事业，从本书可以看出作者对微积分教程在内容和方法上的改革精神。我们认为本书除有一般数学教程的优点外，还具有以下突出的特点：

首先，依美国惯例，大学理工科新生在学习了初等微积分以后，再学高等微积分。但它不是初等微积分的重复，而是加深其理论基础，对初等微积分的定理法则都给以严格论证。应用了高等代数、高等几何、矢量空间、复变函数、微分方程、数理方程以及拓扑、集合论的概念、理论和方法来研究微积分的问题。反过来，又用微积分的理论和方法来研究解决这些学科中有关的问题以及其他科学和生产实际中相关的课题。这既突出了数学各科及自然科学之间的内在联系，使理论用于解决实际问题，而微积分也在较高的基础上得到进一步的发展。至于这些学科的知识，虽然有的学生还没有学过，但书中都给予适当的解释。因此，只

要具有初等微积分的知识，对于一切科学工作者，它固然是一本好的参考书；对于一切理工科大学生、函授大学、电视大学、职工大学以及广大数学爱好者通过努力都可以学懂。

其次，在编写方面，本书大多从实例出发，再上升到理论，在理论上作了尽可能严格的探讨，又强调了应用，其范围也是相当广泛的，从刚体力学、流体力学、热力学、电磁学直到工程技术的有关问题，体现了理论和实践的紧密联系。对我们如何学习和应用数学理论和科学理论来解决科学技术中的实际问题，提供了良好的典范。充分体现了“实践—理论—实践”的精神。

第三，在编写方法上，本书也体现了唯物辩证法的精神。由直观到抽象，由简单到复杂，由浅入深，由易到难，思路清晰，语言精简，便于自学。对每一个问题的分析证明，只就其主要方面，作出了正确的示范；而对其余部分，则留给读者进一步严密地论证，使学者有充分的用武之地。每节后附以大量的精选的习题，“只有做好习题，才能够学好数学”。这些习题对于加深学者对教材的理解，对于培养读者的技能技巧，无疑有很大的作用。

为便于读者阅读起见，兹对本书内容略作说明：

全书共分为九章。第一章序言主要介绍微积分理论所需要的基本知识；第二章一元函数微分学和第三章多元函数微分学则对初等微积分的对应部分在理论上作了系统而严格的论证；第四章变换的微分学、隐函数及逆变换则提出了其他书中少用的新的观点和方法；第五章积分增加了勒贝格积分，充分应用了实变函数的理论和方法；第六章线积分和面积分，第七章无穷级数，第八章一致收敛和第九章傅立叶分析都有其独到的精辟的论述。特别是第八章对微积分中的一个重要问题——一致收敛列为专章讨论，对于序列、级数、广义积分和特殊函数的研究都有极重要的意义。

目前，我们认为在高等学校，不仅在学制、课程等大的问题

方面需要进行改革；就是在课程内容和学习方法等也需要进行改革。要吸取各国之长为我们所用。在科学上不要一边倒。要改掉过去那种专搞理论、各科互不相涉的情况，应理论结合实际，使学生应用所学知识去解决实际问题。要改掉过去那种材料过多、讲得过多、过于全面的情况，尽量精简内容，提纲挈领，重点示范，留有余地，组织学生自觉积极地学习，培养学生独立思考、独立工作的能力。应改掉过去的教材那种内容枯燥晦涩，语言平凡单调的情况，必须内容安排适当，语言流畅清新，使数学教程对于读者成为一首美丽的史诗。有鉴于此，我们认为将这本比较完整地代表英美风格的高等微积分教程介绍给广大的中国读者，不失为一本好书，一定会受到欢迎。

该书在翻译过程中，曾请罗明、费祥历、张新、王顺国同志提出了宝贵意见，谨在此一并致谢。

限于水平，译文不妥之处恐仍难免，谨希读者不吝指正。

黄慧力

一九八六年五月一日于重庆

前　言

本书作为一学期或两学期的数学分析教程，可以安排在一般的三学期或四学期的初等微积分课程之后使用*。虽然经常使用线性代数的概念，但它们不是阅读本书时必须具备的知识，因为这些概念出现时都给予了解释。

可以把本书改编为几种版本。一学期的教程只涉及单变量高等微积分，它可包括下列章节：第一章的§1.1至§1.5、§1.8，第二章、第七章至第九章，以及第五章的§5.1至§5.10，包括多变量函数理论的一个学期的专门课程的提纲应包括下列内容：第一章的§1.6至§1.10，第三、四章和第六章，以及第五章的§5.11至§5.16。讨论单变量和多变量函数理论概念时两学期的教程应当包括本教程选择的所有基本概念。

虽然，所有讨论强调严密性，但它们都是非正规的，有赖于读者的直观的数学知识和以前的初等微积分的基础以及非正式的集合的理论。另外，请读者积极参与对每一课题的研究，例如部份证明一些关键性的结果，或计算某一特例来说明一些主要命题。

给定理作标记是必要的。定理（$i\cdot j$）指的是第 i 章的第 j 条定理，而（$i\cdot j\cdot k$）指的是第 i 章第 j 节的第 k 条陈述（一般是一个方程或一个不等式）。

N·J·De L

一九八二年于纽约

---

* 译者注：美国教育制度将微积分教程分为初级阶段和高级阶段。

目　录

第一章 序　　言

高等微积分课程的主要特点是对初等微积分课程中的许多概念作更深入的研究。高等微积分课程也在初等课程与复变量或实变函数理论之间起着桥梁作用。初等微积分教程通常着重计算问题，并广泛探讨单个和多个实变量函数理论最基本的概念，而上述高等微积分的课程主要着重于抽象理论的研究。

鉴于本教程讨论定义于实数子集上的函数，我们首先阐述实数及其子集的代数及拓扑方面较为重要的一些问题。我们假定读者具有集合理论的一些基本知识，对它们很少或没有作进一步的解释。

§1.1 实　　数

我们首先假定存在一个满足下列所有公理的非空集合 R。

F1　封闭性.

符号“+”和“·”分别称为“加法”和“乘法”，并定义在R上，使得所有的a，$b\in R$，有$a+b\in R$和$a\cdot b\in R$，（下文将简单地把$a\cdot b$表示为ab）。

F2　结合性.

对于所有的 a, b, $c\in R$，有 $a+(b+c)=(a+b)+c$和$a(bc)=(ab)c$。

交换性.

对于所有的$a,b\in R$，有$a+b=b+a$和$ab=ba$。

分配性.

对于所有的$a,b,c\in R$，有$a(b+c)=ab+ac$。

F3. 单位元。

对于所有的$a\in R$，存在$0,1\in R$，使得$a+0=0+a=a$和$a1=1a=a$。

分别称0，1为R的加法单位元素和乘法单位元素。

F4 逆元。

对于任意的$a\in R$。存在属于R的元素$-a$，它称为a的加法逆元素，使得$a+(-a)=(-a)+a=0$。此外，对于任意的$a\in R$，$a\neq 0$，存在属于R的元素a^{-1}，它称为a的乘法逆元素，使得$a(a^{-1})=(a^{-1})a=1$。

F5 有序性。

存在着R的一个确定的非空子集合R^{+}（称为R的正元素集合），满足：

(i) $0\notin R^{+}$。

(ii) 对任意$a\in R$，在$a\in R^{+}$，$-a\in R^{+}$，或$a=0$中仅能有一种情况成立。

(iii) 对于任意的$a,b\in R^{+}$，有$a+b\in R^{+}$和$ab\in R^{+}$。

当假定非空集合R满足性质F1至F4，则称R为域，当R还满足性质F5，称R为有序域。

对任何$a,b\in R$，令$a-b=a+(-b)$。则我们可以用符号“$>$”在非空集合R上定义一个有序关系。对任意$a,b\in R$，当且仅当$a-b\in R^{+}$时，则$a>b$。我们直接就能看出对于任意$a\in R$，$a>0$等价于$a\in R^{+}$。另外，我们假定$b<a$等价于$a>b$。下面的两条定理表明了非空集合R的基本代数性质。

定理1.1

令$a,b\in R$，于是：

(i) $a0=0a=0$；

(ii) $a(-b)=(-a)b=-(ab)$；

(iii) $(-a)(-b)=ab$;

(iv) 0是唯一的加法单位，1是唯一的乘法单位。

(v)对任何$a\in R$，$-a$是唯一确定的；如果$a\neq 0$，同样a^{-1}也唯一确定。

定理1.2

令$a,b,c,d\in R$，于是：

(i) 若$a>b$，$b>c$，则$a>c$；

(ii) 若$a>b$，则$a+c>b+c$；

(iii) 若$a>b$，$b>0$，则$ac>bc$；

(iv) 若$a>b$，$c<0$，则$ac<bc$；

(v) 若$a\neq 0$，则$a^2>0$，其中$a^2=aa$；

(vi) $1>0$；

(vii) 若$a>b$，$c>d$，则$a+c>b+d$；

(viii) 若$a>b>0$，$c>d>0$，则$ac>bd$；

(ix) 若$a>b>0$，则$b^{-1}>a^{-1}>0$。

这两个定理的证明非常简单，我们将作为习题留下。每条结论或者直接由已知的公理得出，或者由定理已经证明了的前面部分得出。

现在，我们可以正式地把2规定为$1+1$，3等于$1+2$（或当然可写为$2+1$），4规定为$3+1$，等等。则由定理1.2的第(ii)条和第(vi)条得出：$0<1$，$1<2$，$2<3$，…。于是称$N=\{0,1,2,3,\cdots\}$为自然数集合，$Z=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\}$为整数集合。

设$a,b\in Z$，且$b\neq 0$。则R中所有形如$a(b^{-1})$的元素的子集Q称为有理数集（以后用ab^{-1}或a/b来表示）。很容易看出，当在公理F1至F4中用Q取代R时，在Q中相应的加法和乘法下，Q就是满足同一组公理F1至F4的R的一个子集，因此，把Q称为R的一个子域。Q的任何元素称为有理数，而$R-Q$中的任何元素称为无

理数。

一般地，如果可以在一个非空集合 F 上定义两种运算 $+$ 和 $\cdot$ 使得当用 F 替换 R 时，F 满足 F1——F4 中的每一条，则称 F 为一个域。此外，若用 F 取代 R 能够满足 F5，这时称非空集合 F 为一个有序域，我们容易看出定理 1.1 可以推广至任意域，定理 1.2 可推广至任意的有序域。实际上，自然数，整数，有理数和无理数的概念可以推广到任意的有序域。我们应特别地注意，Q 是具有通常意义下的 $+$，$\cdot$ 和 $>$ 的 R 的有序子域。如果 r 是一个形如 $\sqrt{q}$ 的无理数，这里 q 是固定的，则集合 $A=\{x\in R: x=a+br,\ a,b\in Q\}$ 是非空集合 R 的一个有序子域。

我们也应该注意到并非任何一个域都是有序的。实际上，若 F 是一个有序域，能够证明 F 一定是无限的。从而，任何仅包含有限个元素的域不可能是有序的。

对任意 $a,b\in R$，我们用 $a\geqslant b$ 的记法去表示 $a>b$ 或 $a=b$ 成立。认为 $b\leqslant a$ 等价于 $a\geqslant b$，则我们可以观察到在定理 1.2 的(i)至(viii)条中把 $>$ 符号全部替换为 $\geqslant$ 符号，该定理仍成立。另外，定理1.2的第(ix)条也可写为 $a\geqslant b>0$，则 $b^{-1}\geqslant a^{-1}>0$，我们也可以观察到：

$$\boxed{\text{对任意}a、b\in R，\text{如果}a\geqslant b\text{和}b\geqslant a，\text{则}a=b} \tag{1.1.1}$$

令 $a,b\in R$，$a<b$。则集合 $\{x\in R: a<x \text{和} x<b\}$ 称为左端点是 a，右端点为 b 的开区间；集合 $\{x\in R: a\leqslant x \text{和} x<b\}$ 和集合 $\{x\in R: a<x \text{和} x\leqslant b\}$ 分别叫做左端点为 a，右端点为 b 的半开区间；集合 $\{x\in R: a\leqslant x \text{和} x\leqslant b\}$ 称为左端点是 a，右端点为 b 的闭区间；并依次将这些区间表为 (a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$ 和 $[a,b]$。

按照初等微积分教程的一般作法，可把非空集合 R 描述为在一条向两端无限延长的横线上的所有点的集合，则 R 的元素 a,b 就是位于这条线上的两个特殊点，若假定 $a<b$，则对应于 a 的点

将位于对应于b的点的左端。以上定义的任一区间可描述为位于a和b之间直线上所有点的集合，判定该区间是否包含点a或点b，取决于所考虑区间的特殊类型。例如区间$[a,b)$包含点a而不包含点b，区间(a,b)不包含a,b两点。

对任一实数a，它的绝对值用$|a|$表示，若$a\geqslant 0$，则a的绝对值就是它本身，若$a<0$，则a的绝对值为$-a$。对于所有$a\in R$，$|a|=\sqrt{a^2}$，认识到这一点是很有益的。因此对于所有的a，$a^2=|a|^2$。因为在初等微积分中已经深入地研究了绝对值，我们仅证明下述定理的第(vi)条，其前面的部分留作练习。

定理1.3 令$a,b\in R$，则：

(i) $|a|=|b|$则$a=b$或$a=-b$；

(ii) $|ab|=|a||b|$；

(iii) $a\neq 0$ 则$|a^{-1}|=|a|^{-1}$；

(iv) $|ab^{-1}|=|a||b|^{-1}$ $(b\neq 0)$；

(v) $a\leqslant |a|$；

(vi) $||a|-|b||\leqslant |a+b|\leqslant |a|+|b|$；

证明(vi)

为了建立不等式$|a+b|\leqslant |a|+|b|$，根据$|a+b|^2=a^2+2ab+b^2\leqslant |a|^2+2|a||b|+|b|^2=(|a|+|b|)^2$，并使用该定理的第(v)条即可。若我们在不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$里令$a=(a-b)+b$，就能得到不等式$||a|-|b||\leqslant|a+b|$。

(vi)中的不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$称为三角不等式。

区间和绝对值的概念以一定的方式结合在后面的讨论中将证明是有用的。若a是任一实数，b是一正数，则满足$|x-a|<b$的所有$x\in R$的集合即是$(a-b, a+b)$。因为$|x-a|$可以从几何角度考虑为横线上x和a之间的距离。类似地，满足$|x-a|\leqslant b$的所有实数x的集合是闭区间$[a-b, a+b]$。

练习1.1