考研数学题库精编系列丛书

考研者→备战应考的良师益友

大学生→训练提高的最佳选择

高等数学题库精编

薛嘉庆

理工类

精讲指要

题型例析

元练习题萃

自我检测试题

NEUPRESS
东北大学出版社

考研数学题库精编系列丛书

高等数学题库精编

——复习·训练·提高

（理 工 类）

薛嘉庆

东北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学题库精编．理工类/薛嘉庆.—沈阳：东北大学出版社，2000.3

(考研数学题库精编系列丛书)

ISBN 7-81054-469-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.薛…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 02557 号

©东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110006)

电话：(024)23890881　　传真：(024)23892538

沈阳市市政二公司印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本：850mm×1168mm　1/32　　字数：546 千字　　印张：21

2000 年 3 月第 1 版　　2000 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑：郭爱民　　责任校对：米　戎

封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

定价：28.00 元

前　　言

本书是为准备参加工学硕士研究生入学的数学（一、二）考试而编写的，目标是使得学习并掌握本书内容的考生考出好成绩。本书也可供正在学习高等数学的工科一年级大学生（特别是有志于考研的学生）参考。

1. 本书编写依据

本书的编写依据和素材来自以下七个方面：

（1）《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》；

（2）《全国工科高等数学教学大纲》；

（3）《高等数学》（第四版）上、下册，同济大学数学教研室编（本书正文所说的“教材”专指这套书）；

（4）多部高等数学教学参考书和考研辅导书（见本书末的参考文献）；

（5）1987年以来的全国硕士研究生入学统考数学试题（在本书中出现时均冠以试题的年份）；

（6）作者十几年来的高等数学教学经验；

（7）作者教授考研数学辅导班的教学经验。

2. 历年试题特点

分析十几年来的考研数学试题，可以归纳出如下特点：

（1）**基本性**　每年的考题覆盖面较广，所有试题均在

《考试大纲》范围之内。绝大部分试题的题型是基本的。确实有难题，但是没有偏题和怪题。

（2）**新颖性** 除个别题目外，大部分题目都是新编制出来的，亦即在各种教材和教学参考书中找不到与这种考题一模一样的题。因此，只靠压题，不可能"过关"。

（3）**综合性** 通过一道试题同时考几个知识点是考研试题的一大特点，以考查考生综合运用知识解决问题的能力。只有把知识学得系统、深入、融会贯通，才能适应研究生入学考试的要求。

（4）**灵活性** 大部分试题都有一个或几个"弯儿"，这是考研试题的又一大特点。要求考生能够灵活运用所学知识，熟谙各种题型及其解题方法和技巧。

（5）**应用性** 近几年来的每套试题都包含一道应用题目，很结合实际，用来考查考生解决实际问题的能力。

以上这些特点是由研究生入学考试宗旨决定的，即通过考试选拔人才。不仅考查考生掌握知识的程度，更重要的是考查运用所学知识解决问题的能力。数学能力体现在计算能力、逻辑思维能力和空间想象能力上。在学习和复习高等数学的过程中，特别要注意对能力的培养。

3. 本书编写原则

根据两个大纲和上述对试题特点的分析，本书遵循如下编写原则：

（1）**注重基本内容、理论和方法的原则** 本书以《考试大纲》为依据，以同济大学编的《高等数学》（第四版）为蓝本，注重对基本内容、理论和方法的讲述。只有基本知识熟了，才有进一步提高的可能。

（2）**覆盖《大纲》、难度适当的原则** 可以肯定地说，仅仅复习教材是不够的。本书的重点在于提高。在广度方

面要覆盖《考试大纲》，在难度方面要达到考研试题的水平。不搞偏题和怪题。

(3) **便于自学的原则**　我注意到这样一个事实：即使是在校大学生准备考研，一般也是从大学三年级第二学期才开始复习，高等数学已经“扔”下一年半了，至于已经参加工作的考生“扔”的时间就更长了。因此，本书力求由浅入深，逐步提高，适于自学。

4. 本书研读方法

如何利用本书做好复习呢？提三点意见谨供考生参考。

第一，最好先复习一遍教材，至少在阅读本书遇到困难时要参看教材。教材是基础，有基础才能提高。很难设想，连教材上的习题作起来都有困难，阅读参考书会收到好效果。

第二，本书共设七章十九单元，每单元由三部分组成：

内容精讲指要　除系统地归纳和总结教材中的重要定义、定理和公式外，还包含解题时常用的方法和技巧。总之，都是要求考生必须掌握和熟记的内容，可以说是高等数学的精华，只有通过大量作题，反复使用，才能理解、记牢。临考之前再看两三遍是肯定有益处的。

基本题型例析　这是本书的核心内容。所有例题都具有典型性。通过这些例题讲述了高等数学中的思考方法、解题方法、常用技巧和注意事项。建议你采取这样的学习方法：读过一道题（例题和练习题），不要急于看解答和提示，而要独立思考，尽量自己把题作出来，至少要思考一段时间，然后再与解答作对比。也许你的方法比书中的还好，如果不是这样，你就可以从书中学到有用的东西，提高你的解题能力。

同步训练题萃 与所讲内容和例题相配合，本书选配了足够数量的练习题，并有答案和必要的提示。练习题按难度分为 A、B、C 三级，读者可根据自己的需要选作。勤能补拙，熟能生巧，应该尽量多作题，以提高解题能力和速度。

此外，在每章后还配有：

自我检测试题 全部试题选自 1987 年以来的历届考研真题。每套题在形式和时间上也都仿照考研试题。附有详细的解答，以便于自己评分。建议你：某一章的内容已经做了充分的复习，自己认为有把握以后，再集中时间来作这一章的自测题，以衡量你所达到的水平。切忌今天作一道，明天作一道，这样就失去自测题的意义了。

第三，如果有条件，最好参加考研辅导班。这样做可以加快你的复习速度，取得事半功倍之效。更重要的是，辅导班会把高等数学的本科教学水平提高到适应考研的高度上去。

如果你是大学一年级学生，开始阅读本书时可能会感到有一定困难。主要是本书起点较高，有个别地方用到了教材偏后的内容，你可以先跳过这些地方，待学过有关知识后回头重新阅读就是了。本书的绝大部分内容都是按教材顺序编写的。

在成书过程中，杨泽宽教授做了大量工作，也得到东北大学出版社的大力支持，本书的框架和体例都是责任编辑拟定的，作者一并表示感谢。

由于时间仓促，书中差错和缺欠在所难免，欢迎批评指正。

薛嘉庆 谨识

2000 年 1 月

目　　录

第一章　极限、函数及其连续性

第一单元　极　　限

内容精讲指要

一、数列极限

(一) 定　义

设有数列$\{x_n\}$和常数 a，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 N❶，当 $n>N$ 时，总有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称 a 是数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 此时称**数列收敛**，不收敛称为**发散**.

注意　凡极限定义都由四句话构成. 例如 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$ 的定义：$\forall M>0$，$\exists$正整数 N，当 $n>N$ 时，总有 $x_n<-M$.

(二) 关于数列极限的重要命题

命题 1　(惟一性)　若数列$\{x_n\}$收敛，则必惟一.

命题 2　(有界性)　若数列$\{x_n\}$收敛，则必有界.

命题 3　(子数列的收敛性)　若数列$\{x_n\}$收敛于 a，则它的任

---

❶　$\forall$是 Arbitrary(任意的)的第一个字母 A 的上下翻转. $\forall\varepsilon>0$ 表示“对于任意给定的正数 ε”. $\exists$是 Exist(存在)的第一个字母 E 的左右翻转.

一子数列也收敛于 a.

命题 4 (夹逼准则) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 且 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

命题 5 (单调有界数列的收敛性) 单调有界数列必收敛.

二、函数极限

(一) 定义

1. 一般定义

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. 自变量趋于无穷大的定义举例

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $x < -X$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

3. 函数趋于无穷大的定义举例

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $|f(x)| > M$.

4. 左、右极限定义举例

左极限: $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

右极限: $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

注意 在考试大纲中并没有对“极限定义”本身提出要求, 大纲指出“理解极限的定义, 理解函数右极限与左极限的概念, ……”, 为了达到这个要求, 必须对极限定义本身有深刻理解. 应该能够写出各种极限的定义, 例如 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ 等.

(二) 极限运算法则

法则 1 若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$.

法则 2 若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

法则 3 若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，且 $\lim g(x)\neq 0$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

注意 上述法则成立的前提是各自极限存在，否则不可以进行极限的四则运算.

(三) 关于极限的重要命题

命题 1 极限存在 $\Leftrightarrow$ 左、右极限存在且相等.

命题 2 (保号性) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或 $A<0$) $\Rightarrow$ 存在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使得 $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

命题 3 在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)\geqslant g(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

注意 $f(x)>g(x)\Rightarrow\lim f(x)\geqslant\lim g(x)$，而不是 $\lim f(x)>\lim g(x)$.

命题 4 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ (其中 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小).

三、无穷小及其比较

(一) 定　义

以 0 为极限的函数是无穷小，即若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则 $\alpha(x)$是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

(二) 无穷小比较

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则 β 是 α 的高阶无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则 β 与 α 为等价无穷小，记为 $\beta\sim\alpha$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则 β 与 α 为同阶无穷小，记为 $\beta\sim c\alpha$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0$，则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

(三) 等价无穷小代换命题及其公式

命题 设 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，且 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则

$$\lim\frac{\alpha(x)f(x)}{g(x)}=\lim\frac{\beta(x)f(x)}{g(x)}.$$

注意 当无穷小 $\alpha(x)$作为因子出现在极限式中时，可以用它的等价无穷小代换. 但是在加减情况下不能代换.

当 $x\to0$ 时，有如下十个常用公式：

(1) $\sin x\sim x$；(2) $\tan x\sim x$；(3) $\arcsin x\sim x$；

(4) $\arctan x\sim x$；(5) $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；(6) $\ln(1+x)\sim x$；

(7) $e^x-1\sim x$；(8) $a^x-1\sim x\ln a$；(9) $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$；

(10) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

(四) 无穷小阶的判定

"设 $\beta=\beta(x)$ 是无穷小，判定它是 x 的几阶无穷小"是一种题型，求解的基本方法是使用定义．即

若 $\lim \dfrac{\beta}{x^k}=c\neq 0$，则 β 是 x 的 k 阶无穷小．

此外，下列命题对判定无穷小的阶也是有用的．

命题 1　$\beta=o(\alpha)\Rightarrow \alpha+\beta\sim\alpha$，即无穷小的阶不因为加上高阶无穷小 β 而改变．

命题 2　设 $x\to 0$ 时 $\alpha=\alpha(x)$ 是 x 的 m 阶无穷小，$\beta=\beta(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小，则

(1) $\alpha\beta$ 是 x 的 $m+n$ 阶无穷小；

(2) 当 $m>n$ 时，$\alpha+\beta$ 是 n 阶无穷小．

命题 3　设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{x^n}=c_1\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta}{x^n}=c_2\neq 0$，则

(1) 若 $c_1+c_2\neq 0$，则 $\alpha+\beta$ 仍是 x 的 n 阶无穷小．

(2) 若 $c_1+c_2=0$，则 $\alpha+\beta=o(x^n)$．函数出现这种情况时可以用泰勒公式找出它的更高阶的等价无穷小．

四、极限的不定型

极限的不定型共有七种：$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，∞^0，0^0，1^∞．计算的基本方法归纳如下：

(1) $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 是基本型．求其极限的一种有效方法是洛必达法则．其他五型都要通过适当变形将其转化为 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型才能计算出结果．

(2) $0\cdot\infty$ 型可转化为 $\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}$ 或 $\dfrac{\infty}{\frac{1}{0}}$．