

考研数学题库精编

系列丛书

考研者 → 备战应考的良好益友
大学生 → 训练提高的最佳选择

高等数学



薛嘉庆

题库精编

理工类

精讲摘要
题型例析
元练习题萃
自我检测题



NEUPRESS
东北大学出版社

00010772

013-44

127

考研数学题库精编系列丛书

高等数学题库精编

——复习·训练·提高

(理工类)



东北大学出版社



C0487203

图书在版编目(CIP)数据

高等数学题库精编. 理工类/薛嘉庆. —沈阳: 东北大学出版社,
2000.3

(考研数学题库精编系列丛书)

ISBN 7-81054-469-1

I. 高… II. 薛… III. 高等数学-研究生-入学考试-解题
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 02557 号

©东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号 邮政编码 110006)

电话:(024)23890881

传真:(024)23892538

沈阳市市政二公司印刷厂印刷

东北大学出版社发行

开本:850mm×1168mm 1/32
2000 年 3 月第 1 版

字数:546 千字 印张:21
2000 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑:郭爱民
封面设计:唐敏智

责任校对:米 戎
责任出版:杨华宁

定价:28.00 元

前 言

本书是为准备参加工学硕士研究生入学的数学（一、二）考试而编写的，目标是使得学习并掌握本书内容的考生考出好成绩。本书也可供正在学习高等数学的工科一年级大学生（特别是有志于考研的学生）参考。

1. 本书编写依据

本书的编写依据和素材来自以下七个方面：

- (1) 《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》；
- (2) 《全国工科高等数学教学大纲》；
- (3) 《高等数学》（第四版）上、下册，同济大学数学教研室编（本书正文所说的“教材”专指这套书）；
- (4) 多部高等数学教学参考书和考研辅导书（见本书末的参考文献）；
- (5) 1987年以来的全国硕士研究生入学统考数学试题（在本书中出现时均冠以试题的年份）；
- (6) 作者十几年来的高等数学教学经验；
- (7) 作者教授考研数学辅导班的教学经验。

2. 历年试题特点

分析十几年来的考研数学试题，可以归纳出如下特点：

- (1) **基本性** 每年的考题覆盖面较广，所有试题均在

《考试大纲》范围之内。绝大部分试题的题型是基本的。确实有难题，但是没有偏题和怪题。

(2) **新颖性** 除个别题目外，大部分题目都是新编制出来的，亦即在各种教材和教学参考书中找不到与这种考题一模一样的题。因此，只靠压题，不可能“过关”。

(3) **综合性** 通过一道试题同时考几个知识点是考研试题的一大特点，以考查考生综合运用知识解决问题的能力。只有把知识学得系统、深入、融会贯通，才能适应研究生入学考试的要求。

(4) **灵活性** 大部分试题都有一个或几个“弯儿”，这是考研试题的又一大特点。要求考生能够灵活运用所学知识，熟谙各种题型及其解题方法和技巧。

(5) **应用性** 近年来的每套试题都包含一道应用题目，很结合实际，用来考查考生解决实际问题的能力。

以上这些特点是由研究生入学考试宗旨决定的，即通过考试选拔人才。不仅考查考生掌握知识的程度，更重要的是考查运用所学知识解决问题的能力。数学能力体现在计算能力、逻辑思维能力和空间想象能力上。在学习和复习高等数学的过程中，特别要注意对能力的培养。

3. 本书编写原则

根据两个大纲和上述对试题特点的分析，本书遵循如下编写原则：

(1) **注重基本内容、理论和方法的原则** 本书以《考试大纲》为依据，以同济大学编的《高等数学》（第四版）为蓝本，注重对基本内容、理论和方法的讲述。只有基本知识熟了，才有进一步提高的可能。

(2) **覆盖《大纲》、难度适当的原则** 可以肯定地说，仅仅复习教材是不够的。本书的重点在于提高。在广度方

面要覆盖《考试大纲》，在难度方面要达到考研试题的水平。不搞偏题和怪题。

(3) 便于自学的原则 我注意到这样一个事实：即使是在校大学生准备考研，一般也是从大学三年级第二学期才开始复习，高等数学已经“扔”下一年半了，至于已经参加工作的考生“扔”的时间就更长了。因此，本书力求由浅入深，逐步提高，适于自学。

4. 本书研读方法

如何利用本书做好复习呢？提三点意见谨供考生参考。

第一，最好先复习一遍教材，至少在阅读本书遇到困难时要参看教材。教材是基础，有基础才能提高。很难设想，连教材上的习题作起来都有困难，阅读参考书会收到好效果。

第二，本书共设七章十九单元，每单元由三部分组成：

内容精讲指要 除系统地归纳和总结教材中的重要定义、定理和公式外，还包含解题时常用的方法和技巧。总之，都是要求考生必须掌握和熟记的内容，可以说是高等数学的精华，只有通过大量作题，反复使用，才能理解、记牢。临考之前再看两三遍是肯定有益处的。

基本题型例析 这是本书的核心内容。所有例题都具有典型性。通过这些例题讲述了高等数学中的思考方法、解题方法、常用技巧和注意事项。建议你采取这样的学习方法：读过一道题（例题和练习题），不要急于看解答和提示，而要独立思考，尽量自己把题作出来，至少要思考一段时间，然后再与解答作对比。也许你的方法比书中的还好，如果不是这样，你就可以从书中学到有用的东西，提高你的解题能力。

同步训练题萃 与所讲内容和例题相配合, 本书选配了足够数量的练习题, 并有答案和必要的提示。练习题按难度分为 A、B、C 三级, 读者可根据自己的需要选作。勤能补拙, 熟能生巧, 应该尽量多作题, 以提高解题能力和速度。

此外, 在每章后还配有:

自我检测试题 全部试题选自 1987 年以来的历届考研真题。每套题在形式和时间上也都仿照考研试题。附有详细的解答, 以便于自己评分。建议你: 某一章的内容已经做了充分的复习, 自己认为有把握以后, 再集中时间来作这一章的自测题, 以衡量你所达到的水平。切忌今天作一道, 明天作一道, 这样就失去自测题的意义了。

第三, 如果有条件, 最好参加考研辅导班。这样做可以加快你的复习速度, 取得事半功倍之效。更重要的是, 辅导班会把高等数学的本科教学水平提高到适应考研的高度上去。

如果你是大学一年级学生, 开始阅读本书时可能会感到有一定困难。主要是本书起点较高, 有个别地方用到了教材偏后的内容, 你可以先跳过这些地方, 待学过有关知识后回头重新阅读就是了。本书的绝大部分内容都是按教材顺序编写的。

在成书过程中, 杨泽宽教授做了大量工作, 也得到东北大学出版社的大力支持, 本书的框架和体例都是责任编辑拟定的, 作者一并表示感谢。

由于时间仓促, 书中差错和缺欠在所难免, 欢迎批评指正。

薛嘉庆 谨识

2000 年 1 月

目 录

前 言	(1)
第一章 极限、函数及其连续性	(1)
第一单元 极 限	(1)
内容精讲指要	(1)
基本题型例析	(6)
同步训练题萃	(27)
答案与提示	(32)
第二单元 函数及其连续性	(36)
内容精讲指要	(36)
基本题型例析	(40)
同步训练题萃	(52)
答案与提示	(56)
自我检测试题	(59)
第二章 一元函数微分学	(62)
第一单元 导数概念及计算	(62)
内容精讲指要	(62)
基本题型例析	(66)
同步训练题萃	(83)
答案与提示	(88)
第二单元 微分中值定理	(92)
内容精讲指要	(92)
基本题型例析	(95)

同步训练题萃	(111)
答案与提示	(115)
第三单元 导数应用	(117)
内容精讲指要	(117)
基本题型例析	(120)
同步训练题萃	(141)
答案与提示	(144)
自我检测试题	(148)
第三章 一元函数积分学	(152)
第一单元 不定积分	(152)
内容精讲指要	(152)
基本题型例析	(156)
同步训练题萃	(178)
答案与提示	(181)
第二单元 定积分与广义积分计算	(185)
内容精讲指要	(185)
基本题型例析	(190)
同步训练题萃	(212)
答案与提示	(217)
第三单元 变上限积分与定积分证明题	(222)
内容精讲指要	(222)
基本题型例析	(223)
同步训练题萃	(250)
答案与提示	(255)
第四单元 定积分应用	(259)
内容精讲指要	(259)
基本题型例析	(261)
同步训练题萃	(278)

答案与提示	(281)
自我检测试题	(284)
第四章 空间解析几何与多元函数微分学	(288)
第一单元 空间解析几何	(288)
内容精讲指要	(288)
基本题型例析	(293)
同步训练题萃	(315)
答案与提示	(320)
第二单元 多元函数微分学	(324)
内容精讲指要	(324)
基本题型例析	(334)
同步训练题萃	(358)
答案与提示	(365)
自我检测试题	(371)
第五章 多元函数积分学	(376)
第一单元 二重积分	(376)
内容精讲指要	(376)
基本题型例析	(380)
同步训练题萃	(398)
答案与提示	(402)
第二单元 三重积分	(405)
内容精讲指要	(405)
基本题型例析	(409)
同步训练题萃	(425)
答案与提示	(429)
第三单元 曲线积分	(433)
内容精讲指要	(433)

基本题型例析	(439)
同步训练题萃	(454)
答案与提示	(458)
第四单元 曲面积分	(461)
内容精讲指要	(461)
基本题型例析	(468)
同步训练题萃	(488)
答案与提示	(493)
自我检测试题	(496)
第六章 无穷级数	(501)
第一单元 常数项级数	(501)
内容精讲指要	(501)
基本题型例析	(504)
同步训练题萃	(527)
答案与提示	(532)
第二单元 函数项级数	(537)
内容精讲指要	(537)
基本题型例析	(542)
同步训练题萃	(568)
答案与提示	(574)
自我检测试题	(580)
第七章 常微分方程	(584)
第一单元 一、二阶常微分方程	(584)
内容精讲指要	(584)
基本题型例析	(586)
同步训练题萃	(604)
答案与提示	(608)

第二单元 线性常微分方程.....	(611)
内容精讲指要.....	(611)
基本题型例析.....	(617)
同步训练题萃.....	(636)
答案与提示.....	(640)
自我检测试题.....	(644)
附 录.....	(648)
附录 1 导数公式表	(648)
附录 2 基本积分表	(649)
附录 3 常用定积分的值	(650)
附录 4 常用曲线及其方程	(651)
附录 5 常用曲面及其方程	(655)
附录 6 常用泰勒公式与泰勒级数	(656)
附录 7 常用不等式	(657)
附录 8 初等数学中某些常用公式	(658)
参考文献.....	(660)

第一章 极限、函数及其连续性

第一单元 极 限

内容精讲指要

一、数列极限

(一) 定 义

设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 a , 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 $N^\bullet$, 当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 此时称数列收敛, 不收敛称为发散.

注意 凡极限定义都由四句话构成. 例如 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ 的定义: $\forall M > 0$, $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 总有 $x_n < -M$.

(二) 关于数列极限的重要命题

命题 1 (惟一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则必惟一.

命题 2 (有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则必有界.

命题 3 (子数列的收敛性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则它的任

① $\forall$ 是 Arbitrary(任意的)的第一个字母 A 的上下翻转. $\forall \varepsilon > 0$ 表示“对于任意给定的正数 ε ”. $\exists$ 是 Exist(存在)的第一个字母 E 的左右翻转.

一子数列也收敛于 a .

命题 4 (夹逼准则) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 且 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

命题 5 (单调有界数列的收敛性) 单调有界数列必收敛.

二、函数极限

(一) 定义

1. 一般定义

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

2. 自变量趋于无穷大的定义举例

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x < -X$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

3. 函数趋于无穷大的定义举例

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $|f(x)| > M$.

4. 左、右极限定义举例

左极限: $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

右极限: $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

注意 在考试大纲中并没有对“极限定义”本身提出要求, 大纲指出“理解极限的定义, 理解函数右极限与左极限的概念, ……”, 为了达到这个要求, 必须对极限定义本身有深刻理解. 应该能够写出各种极限的定义, 例如 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 等.

(二) 极限运算法则

法则 1 若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在, 则 $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

法则 2 若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在, 则 $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.

法则 3 若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在, 且 $\lim g(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

注意 上述法则成立的前提是各自极限存在, 否则不可以进行极限的四则运算.

(三) 关于极限的重要命题

命题 1 极限存在 $\Leftrightarrow$ 左、右极限存在且相等.

命题 2 (保号性) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ (或 $A < 0$) $\Rightarrow$ 存在 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0)$, 使得 $\forall x \in \dot{U}(x_0)$, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

命题 3 在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

注意 $f(x) > g(x) \Rightarrow \lim f(x) \geq \lim g(x)$, 而不是 $\lim f(x) > \lim g(x)$.

命题 4 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ (其中 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小).

三、无穷小及其比较

(一) 定义

以 0 为极限的函数是无穷小, 即若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, 则 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

(二) 无穷小比较

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则 β 是 α 的高阶无穷小, 记为 $\beta = o(\alpha)$.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则 β 与 α 为等价无穷小, 记为 $\beta \sim \alpha$.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则 β 与 α 为同阶无穷小, 记为 $\beta \sim c\alpha$.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

(三) 等价无穷小代换命题及其公式

命题 设 $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$, 且 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则

$$\lim \frac{\alpha(x)f(x)}{g(x)} = \lim \frac{\beta(x)f(x)}{g(x)}.$$

注意 当无穷小 $\alpha(x)$ 作为因子出现在极限式中时, 可以用它的等价无穷小代换. 但是在加减情况下不能代换.

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有如下十个常用公式:

- (1) $\sin x \sim x$; (2) $\tan x \sim x$; (3) $\arcsin x \sim x$;
 (4) $\arctan x \sim x$; (5) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$; (6) $\ln(1+x) \sim x$;
 (7) $e^x - 1 \sim x$; (8) $a^x - 1 \sim x \ln a$; (9) $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$;
 (10) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

(四) 无穷小阶的判定

“设 $\beta = \beta(x)$ 是无穷小, 判定它是 x 的几阶无穷小”是一种题型, 求解的基本方法是使用定义. 即

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{x^k} = c \neq 0$, 则 β 是 x 的 k 阶无穷小.

此外, 下列命题对判定无穷小的阶也是有用的.

命题 1 $\beta = o(\alpha) \Rightarrow \alpha + \beta \sim \alpha$, 即无穷小的阶不会因为加上高阶无穷小 β 而改变.

命题 2 设 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha = \alpha(x)$ 是 x 的 m 阶无穷小, $\beta = \beta(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则

- (1) $\alpha\beta$ 是 x 的 $m+n$ 阶无穷小;
- (2) 当 $m > n$ 时, $\alpha + \beta$ 是 n 阶无穷小.

命题 3 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x^n} = c_1 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{x^n} = c_2 \neq 0$, 则

- (1) 若 $c_1 + c_2 \neq 0$, 则 $\alpha + \beta$ 仍是 x 的 n 阶无穷小.
- (2) 若 $c_1 + c_2 = 0$, 则 $\alpha + \beta = o(x^n)$. 函数出现这种情况时可以用泰勒公式找出它的更高阶的等价无穷小.

四、极限的不定型

极限的不定型共有七种: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 , 0^0 , 1^∞ . 计算的基本方法归纳如下:

- (1) $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 是基本型. 求其极限的一种有效方法是洛必达法则.

其他五型都要通过适当变形将其转化为 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型才能计算出结果.

- (2) $0 \cdot \infty$ 型可转化为 $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ 或 $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$.