钱吉林　蔡剑芳　李桃生　编著

高等代数
研究生试题集锦

湖北科学技术出版社

·钱吉林　蔡剑芳　李桃生　编著

·湖北科学技术出版社

高等代数研究生试题集锦

高等代数研究生试题集锦

钱吉林　蔡剑芳　李桃生　编著

湖北科学技术出版社出版发行　新华书店湖北发行所经销

咸宁市印刷厂印刷

850×1168毫米　32开本　7.75印张　1插页　188 000字

1987年2月第1版　1987年2月第1次印刷

ISBN 7—5352—0047—8/O·0002

统一书号：7304·37

印数：1—8 120　定价：1.90元

前　言

本书是我们编写的《高等代数综合题解》（湖北科技出版社出版）的姊妹篇，结构上又是单独成册的。《高等代数综合题解》主要涉及国内外高等代数教材中一些基本题。本书是在研究了一百多所高校硕士研究生的高等代数（或线性代数）考题的基础上，从中精选出三百多题，进行分类、归纳、分析并给出解答。这些题目形式多样，覆盖面广，综合性强，有一定难度。

本书不但可供报考硕士研究生的同志阅读，且对理工科院校（含电大、夜大、职大、函大、自修大学）的学生，及其他数学工作者，也是一本有益的读物。

编　者

1986.11.1

目　　录

一　矩阵与行列式……………………………………………1
二　线性方程组……………………………………………………52
三　多项式与二次型……………………………………………68
四　特征值与特征向量…………………………………………104
五　线性空间与线性变换………………………………………144
六　Jordan型与欧氏空间………………………………………203

一　矩阵与行列式

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}，求A^{-1}，A'A，$$

及 $|(4E-A)'(4E-A)|$.

（清华大学）

解

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ -6 & -4 & 2\end{pmatrix},$$

$$A'A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 20 & 12\\ 3 & 12 & 9\end{pmatrix},$$

$$|(4E-A)'(4E-A)|=|4E-A|^2=36.$$

2. 设A、B均为$n\times n$方阵，试问下列结论中哪些正确？哪些不正确？

1） 若$AB=0$，则$A=0$或$B=0$.

2） $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

3） $(AB)'=A'B'$.

4） $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$（当$|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$时）.

5） $|kA| = k|A|$ （k为常数）．

（上海机械学院）

答 除4）是正确的外，其余一般都不正确．

3. 设A是方阵，$A^p = 0$，其中p是正整数，试证A的逆矩阵必不存在．

（北京航空学院）

证 $\because$ $|A^p| = |A|^p = 0$． $\therefore$ $|A| = 0$，从而A^{-1}不存在．

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $(A+3E)^{-1}(A^2-9E)$．

（中南矿冶学院）

解 $(A+3E)^{-1}(A^2-9E)$

$$= (A+3E)^{-1}(A+3E)(A-3E)$$

$$= A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

计算A^6．

（华中工学院）

解 $A^2 = -4A$，$A^4 = 16A^2 = -64A$，$A^6 = -1024A$．

6.

当 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时，$A^6=E$。求 A^{11}。

（武汉钢铁学院）

解 $E=A^{12}=A^{11}A$

$$A^{11}=A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

7. 已知

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix},$$

求 $|A|$，A^{-1}，$(A^*)^{-1}$。

（清华大学）

解 $|A|=-\frac{1}{4}$，　　$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 6\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}$，

$$AA^*=|A|E=-\frac{1}{4}E,$$

$$\therefore \quad (A^*)^{-1}=-4A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & -4 & -10\end{pmatrix}.$$

8. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & \beta\\ 0 & 1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

试求 A^2，A^3，并进而求 A^n。

（中国科技大学）

解

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\alpha & \alpha^2+2\beta\\ 0 & 1 & 2\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 3\alpha & 3\alpha^2+3\beta\\ 0 & 1 & 3\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

今归纳假设

$$A^k=\begin{pmatrix}1 & k\alpha & \dfrac{k(k-1)}{2}\alpha^2+k\beta\\ 0 & 1 & k\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

那么 $A^{k+1}=A^kA$

$$=\begin{pmatrix}1 & k\alpha & \dfrac{k(k-1)}{2}\alpha^2+k\beta\\ 0 & 1 & k\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha & \beta\\ 0 & 1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & (k+1)\alpha & \dfrac{(k+1)k}{2}\alpha^2+(k+1)\beta\\ 0 & 1 & (k+1)\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以，对一切自然数n，都有

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & n\alpha & \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha^2+n\beta\\ 0 & 1 & n\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

9. 设方阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

1） a，b，c满足何关系，A为可逆方阵？

2） a，b，c为何值时，A为对称方阵？

3） a，b，c为何值时，A为正交方阵？

（长春光学精密机械学院）

解 1） 因为 $|A|=ab-\frac{c}{\sqrt{2}}$，所以当$ab-\frac{c}{\sqrt{2}}\neq 0$时，$A$可逆。

2） 当$a=b=0$，$c=1$时，A为对称方阵。

3） 若A为正交阵，那么，由第一列得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+b^2=1, \quad \therefore \quad b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

同理，由第一行得 $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. 再由第三行得

$$b^2+c^2=1 \qquad \therefore \quad c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

但第一列与第二列正交，这样 $\frac{1}{\sqrt{2}}a+bc=0$。所以，当a，b，c中有两个为$\frac{1}{\sqrt{2}}$，另一个为$-\frac{1}{\sqrt{2}}$时，A为正交阵，或者 $a=b=c=-\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$A$也是正交阵。

10. 设 $AXB+3C-D=0$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&1\\3&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-1&0&-\sqrt{2}\\0&2&-1\\\sqrt{3}&-\frac{2}{3}&-3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}-2&0&-3\sqrt{2}\\0&7&-3\\3\sqrt{3}&-2&-8\end{pmatrix}.$$

求X。

（北京钢铁学院）

解 $\because\quad |A|\neq 0,\ |B|\neq 0,$

$\therefore\quad X=A^{-1}(D-3C)B^{-1}=A^{-1}EB^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\2&-3&5\\-1&1&-1\end{pmatrix}.$$

√11. 证明：$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$。

（甘肃大学）

证 $(A+B)[A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}]$

$=E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}+BA^{-1}-BA^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$

$=E-B[B^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}+A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}]A^{-1}+BA^{-1}$

$=E-BEA^{-1}+BA^{-1}=E$。

$\therefore\quad (A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$。

√12. A,B都是n级矩阵，证明：当$E-AB$可逆时，$E-BA$也可逆。

（清华大学）

证 由《高等代数综合题解》的252题

$$\begin{vmatrix} E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |E-AB|, \quad \begin{vmatrix} E & A \\ B & E \end{vmatrix} = |E-BA|.$$

其次，因为

$$\begin{vmatrix} E & B \\ A & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E & A \\ B & E \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix}$$

$\therefore \qquad |E-AB| = |E-BA|$.

从而得证$E-AB$可逆时，$E-BA$也可逆。

13．A为实n级矩阵，它的每列恰有两个非零元素，对角线上元素大于1，不在对角线上的非零元素等于1．试问A是否为可逆阵？并证明之。

（西南师范大学）

证 由《高等代数综合题解》的191题，可证得$|A| \neq 0$．

$\therefore$ A可逆。

14．已知n阶实矩阵A的每行恰有两个非零元素，并且主对角线上元素全大于1，而不在主对角线上的非零元素都是大于0小于1的数，问矩阵A是否非奇异？为什么？

（吉林工业大学）

答 A是非奇异的，理由同上题。

15．设 $A=(a_{ij})$ 为$n\times n$实系数矩阵，已知$a_{ii}>0$ （$i=1,2,\cdots n$），$a_{ij}<0$ （$i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots n$），且

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}=0$ （$i=1,2,\cdots,n$）．证明：秩（A）$=n-1$．

（北京大学）

证 把所有各列都加到第一列上去，并且$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}=0$

$\therefore \quad |A|=0$．秩（A）$\leqslant n-1$．

其次，考虑a_{11}的代数余子式

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\because\quad a_{ii}=-(a_{i1}+\cdots+a_{i,\ i+1}+a_{i,\ i-1}+\cdots+a_{in})$

$$\therefore |a_{ii}|=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$$

$|>|a_{i2}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{in}|$

由《高等代数综合题解》的191题，

$\therefore\quad A_{11}\neq 0\qquad$ 秩$(A)\geqslant n-1$。

从而得证秩$(A)=n-1$。

16．证明元素为0或1的3阶行列式之值只能是0，±1 ±2。　　　　（华南工学院）

证　设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

若$a_{11}=a_{21}=a_{31}=0$，那么$|A|=0$。否则，不失一般性，可设$a_{11}\neq 0$（当$a_{11}=0$，a_{21}，a_{31}中有一不为0时。交换两行，可使a_{11}的位置不为0。而值只相差一个符号）。这时$a_{11}=1$。然后，由行列式的性质得到

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

其中b_{22}，b_{23}，b_{32}，b_{33}的值可能为0或±1。从而可得$|A|$的值只可能是0，±1或±2。

17．1）若A是n阶正交阵，那么，$|A|=\pm 1$。

2） 若A为n阶非奇异阵，A^*为伴随阵，试证

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}.$$

3） $A^2=E$，则A的特征值只能是± 1。

（安徽工学院）

证 1）∵ $A'A=E$。∴ $|A|^2=1$，$|A|=\pm 1$。

2） $AA^*=|A|E$ $A^*=|A|A^{-1}$。

$$\therefore \qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$$

3） 设λ是A的任意一个特征值，α是其相应的特征向量。那么$A\alpha=\lambda\alpha$，$A^2\alpha=A(\lambda\alpha)=\lambda^2\alpha$但$A^2=E$。从而$\alpha=\lambda^2\alpha$，再由$\alpha\neq 0$。从而$\lambda^2=1$，$\lambda=\pm 1$。

18．设A，B为实对称矩阵，C为实反对称阵，且$A^2+B^2=C^2$。证明：$A=B=C=0$。

（安徽大学）

证 设$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$C=(c_{ij})$。那么

A^2+B^2的$(i,\ i)$元为$\sum\limits_{j=1}^{n}(a^2_{ij}+b^2_{ij})$。而$C^2$中$(i,\ i)$元为$-\sum\limits_{j\neq i}c^2_{ji}$，从而由$A^2+B^2=C^2$。所以

$$\sum_{j=1}^{n}(a^2_{ij}+b^2_{ij})+\sum_{j\neq i}c^2_{ji}=0$$

由于A，B，C都是实矩阵、可得

$$a_{ij}=b_{ij}=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots n)$$

$$\therefore \qquad c_{ji}=0 \qquad (j\neq i)$$

再由i的任意性。即证$A=B=C=0$。

19．设$A=(a_{ij})$是$n\times n$矩阵，$A^2=A$

1）证明A相似于一个对角阵。

2）求A的秩。

（云南大学）

证 1） 由《高等代数综合题解》573题知。

2） 由 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中秩$(A)=r$。

再 $$tr(T^{-1}AT)=trA=tr\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

∴ $$r=trA=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

20．若$A^2=A$，求证：$(A+E)^k=E+(2^k-1)A$。（k为任意自然数）。

（武汉钢铁学院）

证 当$k=1$时，显然结论成立、现归纳假设结论对$k=m$成立。再讨论$k=m+1$时．因为

$(A+E)^{m+1}=(A+E)^m(A+E)$

$=[A+(2^m-1)A](A+E)=A+(2^m-1)A^2+E+(2^m-1)A$

$=E+(1+2^m-1+2^m-1)A=E+(2^{m+1}-1)A$.

所以结论对一切自然数都成立。

21．设A是n级幂等阵，且秩为r，试求

1）矩阵A的相似标准形，并说明理由

2）计算$|2E-A|$。

（清华大学）

解 1） 由第19题知A与矩阵$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$相似．即

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2） 由上面一问可得

$$T^{-1}(2E-A)T=2E-\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 2E_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad |2E-A|=\begin{vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 2E_{n-r} \end{vmatrix}=2^{n-r}.$$

22. “设A为n阶矩阵，$A^3=0$，则$E-A$有逆矩阵.” 上述结论对否？试证之。

（哈尔滨工业大学）

答 结论是对的。

$(E-A)^{-1}=E+A+A^2$.

23. 在数域P上n级方阵的全体$P^{n\times n}$中，求出所有仅与自己相似的方阵。

（华东师范大学）

解 由设知对任意n级可逆阵X，总有$X^{-1}AX=A$，或者$AX=XA$. 当取

$$X=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix} \quad \text{并设} A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

那么由$AX=XA$，可证得$a_{ij}=0 \quad (i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 再取 $X=\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，又可得$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$. 从而得证$A$为纯量矩阵. 这就是说，只有纯量矩阵仅与自己相似。

24. n阶矩阵A的各行各列都只有一个元素是1或－1，其余均为0. 求证：有正整数k，使$A^k=E$.

（北京邮电学院）

证 由于A的每行每列都只有一个非零元素1或-1，从而使得

$$A,\ A^2,\ A^3,\ \cdots A^m,\ \cdots\cdots$$

矩阵列中每一个A^m仍具有这一性质，即每行每列只有一个元素是1或-1。然而这样的A^m只能作出有限多个不同的出来。所以存在两个不同的正整数$m_1>m_2$，使得$A^{m_1}=A^{m_2}$。另外，我们也知道$|A|$的值是等于1或-1，即A^{-1}存在。所以$A^{m_1-m_2}=E$。

25. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$求所有与$A$可交换的矩阵$B$。

（西安冶金建筑学院）

解 令

$$B=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix},\quad \text{由}AB=BA\text{，可得方程组}$$

$$x_1=x_5=x_9,\ x_3=x_4=x_8,\ x_2=x_6=x_7.$$

所以B形如.

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\text{，其中}a,\ b,\ c\text{为任意数.}$$

26. 设

$$A=\begin{pmatrix}a&1&\cdots&0\\&a&\ddots&\vdots\\&&\ddots&1\\0&&&a\end{pmatrix}\text{是}n\text{阶方阵，求 }A^n\text{.}$$

（武汉测绘科技大学）

解 $A=aE+B$，其中