

柔性路面设计理论和方法

朱照宏 许志鸿 编著

同济大学出版社

设计法(1963年)。自此以后,国外陆续出现了一些以层状体系理论为基础的柔性路面设计法——通常称为解析法或理论法。

总之,八十年来柔性路面设计理论和方法基本上是按古典法→经验法和半经验法→解析法或理论法发展起来的。目前各国所用的方法大体为后面两种。但在科研领域和从今后的发展趋势来看,解析法已占压倒优势。这种趋势由第十五届、十六届、十七届世界道路会议柔性路面技术委员会的报告以及第三届、第四届、第五届国际沥青路面结构设计会议论文的集中程度中表现得非常明显。

本书将首先简要叙述解析法的理论基础——柔性路面力学计算理论(第一章),及影响柔性路面设计的各种主要因素和设计方法(第二章)。然后有选择地叙述若干种典型的设计方法。在第三章经验和半经验法中,着重叙述加州承载比(CBR)法和美国各州公路工作者协会(AASHTO)设计法。在第四章解析法或理论法中,选择了壳牌(Shell)法,美国地沥青协会(AI)法和苏联运输工程部的的方法。第五章简要地介绍我国近年来研究制订的柔性路面设计方法。最后,在第六章中,对今后理论研究发展的前景,着重就有限元法,非线性弹性体系,弹粘性层状体系,断裂力学,系统工程等在路面设计研究中的应用作概略介绍。

内 容 提 要

本书着重介绍国内外柔性路面设计理论和方法的最新研究成果,探讨了今后的发展前景。它可作为道路工程专业研究生的教材,亦可供路面设计、研究人员及工程技术人员参考。

责任编辑 何云峰

封面设计 王肖生

柔性路面设计理论和方法

朱照宏 许志鸿 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 20.125 字数 515 千字

1987 年 9 月 第 1 版 1987 年 9 月 第 1 次印刷

印数: 1—3000 科技新书目: 125—188

统一书号: 15335·022 定价 3.35 元

ISBN 7-5608-0045-6/TU·9

前 言

同济大学道路工程专业于1980年开始招收硕士研究生以来，为适应路基路面研究方向的科研和教学需要，曾先后由朱照宏、林绣贤、许志鸿在硕士学位课程的教学过程中积累资料，汇集国内外在柔性路面设计理论和方法的各种流派、其研究过程和发展前景方面的资料，编写成研究生使用的多种讲义和资料，通过五年教学实践，经过修改整理，并吸收了国内柔性路面研究和制订《规范》的最新内容，编写成本书。它可作为本专业研究生的教材，也可供从事路面工程教学、科研和生产设计的教师和科技人员参考。

本书第一章属于路面力学计算理论方面的知识，由于已另设“路面力学计算”课程及有关专门著作，故在这里仅作简要叙述。第二、三、四章介绍和评述国外柔性路面设计方法。由于各国流派众多，书中仅着重叙述经验法中的CBR法和AASHO法，解析法中的Shell法、苏联法和美国AI法，其他仅作简要评述。第五章介绍我国柔性路面设计理论和方法的研究概况，其中包括同济大学道路与交通工程研究所和全国很多兄弟单位从1964年列题以来的很多研究成果，同时反映了1985年修订《规范》稿中的最新内容。第六章探讨了柔性路面研究的发展前景。

本书由许志鸿整理执笔、朱照宏详细审订成稿。编写中除引用了书末列出参考资料中的材料（为保持原文的完整性，并便于阅读，书中有关图解仍按原来的单位制绘制）外，也引用了一些柔性路面课题研究中的交流资料。在本书的编写过程中，同济大学道路与交通工程系和研究所的领导以及路基路面室的有关同志给予热情关心和大力支持，特此致谢。

作者水平有限，书中内容有不全面或不正确的地方，敬请同志们批评和指正。

朱照宏

1985年8月

概 述

“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的”。柔性路面设计理论与方法也不例外，虽然早在1805年前就有层状的柔性路面，而且1880年出现了世界上最早的汽车，但是有关路面设计方法是在大规模修筑现代路面之后才引起人们的重视，而真正开始对路面进行科学研究却是二十世纪以后的事。

最早出现的恐怕要算1901年麻省道路委员会提出的以静力平衡原理为根据的方法。其特点是把轮载假定为集中荷载，初步考虑了路面的强度，因而使荷载呈一定形状分布于路基表面，然后根据力的平衡理论定出路面厚度。与这种方法类似的还有唐氏(Downs, 1933年)公式、葛莱氏(Gray, 1934年)公式等，这些可称为古典设计法。这种方法在生产实践中用了一段时间，起过一定的作用。但由于在力学上考虑得很粗糙，同时也没有考虑路基的承载力和荷载的重复作用及其他因素，所以未能得到进一步发展。

古典设计法未能发展，自然，路面设计就只好依靠经验判断了。到了二十世纪四十、五十年代，随着土质学和土力学的进步，已经能有把握地确定土基和材料的强度，即能掌握其在现场或室内的物理力学性质并与实际路面的耐久性作比较，从而得出路面的经验厚度。这就是通常所说的经验法。在这个时期，经验法得到了迅速的发展。例如波特(Porter)的CBR法(1942年)、美国加州的维姆(Hveem)法(1947年)、利用平板荷载试验结果得出的哈费氏(Hubbard-Field)法(1940年)和加拿大的马克里奥(N. McLeod)法等都是代表性的方法。其中，尤其是CBR法至今仍为美国许多州和许多国家所采用，成为人们熟悉的方法之一。这类经验法都是在一定强度的土基上(如以CBR为指标)修筑一定厚度的面层，以防止在一定的交通量条件下在规定的使用年限内路面产生过份的不平整和过深的车辙(永久变形)。它考虑了土基和面层的强度、轮载和交通量，较之古典法大大前进了一步。到了六十年代，随着AASHO大型试验路的铺筑和试验成果的发表，更使经验法进一步完善，并得到了广泛的应用。

但是，经验法总还存在着一定的局限性。当采用新型的路面结构或新材料时，以及随着交通荷载的变化(轴重增大，车辆增多)、多层路面的应用等等，这种方法就感到无能为力而急需研究新的更合理的设计法。

生产的需要以及随着力学理论和计算技术的发展为这种研究创造了很好的条件。虽然，古典的苟德培(Goldbeck)公式(1940年)已经把1855年布辛尼斯克(J. Boussinesq)关于地基应力传布的研究应用于路面结构，但把路面作为层状弹性体加以研究始于1943年波米斯特(D. M. Burmister)的双层弹性体系理论和1945年发表的三层弹性体系理论。第二次世界大战以后，理论研究进一步发展，1948年福克斯(L. Fox)和汉克(Hank)给出了应力的数值解，1951年阿堪姆(W. E. A. Acum)和福克斯等人及1962年琼斯(A. Jones)和皮蒂(K. R. Peattie)发表了三层体系各界面中心轴上的应力和实用图表；我国在1964年也完成了双层和三层体系应力与位移的数值解。同时，这项理论在路面设计中的应用也有了良好的开端。壳牌石油公司以这些成果为基础，结合WASHO和AASHO道路试验结果，提出了新的路面

目 录

概述	(I)
第一章 柔性路面力学计算理论	(1)
§ 1—1 路面力学模式	(1)
简单静力平衡原理 弹性半空间体 双层和三层体系 多层弹性体系	
§ 1—2 应力与位移的分析	(33)
路面表面的弯沉 面层底面的拉应力 基层底面的拉应力 面层内的剪应力	
§ 1—3 应力图谱	(43)
第二章 柔性路面设计方法	(45)
§ 2—1 对路面的要求及损坏的极限标准	(45)
路面的损坏现象及其初步分析 对路面的要求 损坏的极限标准	
§ 2—2 影响设计的主要因素	(47)
荷载与交通情况 环境影响 材料特性	
§ 2—3 设计方法的主要内容	(57)
第三章 柔性路面设计的经验法	(59)
§ 3—1 加州承载比(CBR)法	(59)
原始的 CBR 法 加州承载比(CBR)试验 CBR 设计曲线的公式化 CBR 法在机场道面设计中的应用 CBR 法的改进与推广	
§ 3—2 美国各州公路工作者协会(AASHO)柔性路面设计法	(83)
AASHO 试验路的主要成果 AASHO 的设计法 AASHO 法的改进与推广	
§ 3—3 英国第 29 号道路指示(Road Note №29)	(99)
轮载和交通量 路基条件 路面各层厚度的确定 设计方法的新发展	
§ 3—4 其他经验设计法	(106)
第四章 柔性路面设计的解析法	(108)
§ 4—1 壳牌(Shell)石油公司柔性路面设计法	(108)
1963 年版壳牌柔性路面设计图解 1978 年的壳牌设计法	

§ 4—2	苏联运输工程部柔性路面设计法	(141)
	早期(1949年)制订的方法 发展概况 苏联柔性路面设计新法	
§ 4—3	美国地沥青协会(AI)法	(167)
	1970年第八版的AI法 1981年AI第九版的新设计法	
第五章	我国的柔性路面设计法	(185)
§ 5—1	我国的柔性路面设计规范	(185)
	1958年“规范” 1966年的设计方法 1978年的设计方法	
§ 5—2	我国柔性路面设计的研究概况	(189)
	荷载图式 路面模型 设计标准	
§ 5—3	路面结构表面弯沉的计算	(197)
	理论弯沉值的计算 理论弯沉公式的修正 多层路面表面弯沉的计算	
	容许弯沉值的确定 标准轴和轴载换算	
§ 5—4	路面结构弯拉应力计算	(208)
	弯拉应力计算 多层路面的计算 路面结构层的容许弯拉应力	
§ 5—5	路面结构的剪应力计算	(218)
	剪应力计算 容许剪应力计算	
§ 5—6	路基土和路面材料的设计参数	(223)
	路基土的回弹模量值 路面材料的回弹模量值 路面材料的抗弯拉强度和弯拉模量 路面材料的抗剪强度参数	
§ 5—7	基本理论的实验验证	(234)
	路表弯沉值的验证 面层底面弯拉应力的验证 中层底面弯拉应力的验证 路基垂直应力值的验证	
§ 5—8	电算程序和结构设计示例	(239)
第六章	柔性路面设计理论研究的发展前景	(246)
§ 6—1	层状体系的有限元法	(246)
	概述 计算图式 基本公式 有限元法在柔性路面设计中的应用	
§ 6—2	非线性弹性体系的分析	(255)
	概述 增量法 迭代法 非线性分析在柔性路面设计中的应用	
§ 6—3	弹粘性层状体系	(272)
	概述 弹粘性半空间体课题 弹粘性双层体系 弹粘性体系应力与位移的分析 弹粘性层状体系理论在柔性路面设计中的应用	
§ 6—4	断裂力学在道路工程中的应用	(295)
	概述 线弹性断裂力学的基本概念 应力强度因子 K 的计算 断裂力学在路面设计中的应用	
	参考资料	(310)

第一章 柔性路面力学计算理论

§ 1-1 路面力学模式

如前所述,从路面设计方法的发展过程看,大致可分为古典方法,经验(或半经验)法和解析(或理论)法三种。与之相对应的路面力学模式大致也可分为①简单静力平衡原理,②弹性半空间体理论,③双层、三层和多层体系理论。

一、简单静力平衡原理

这是古典的柔性路面设计法的理论基础,其力学图式如图 1—1 所示。假定:路面厚度为 h ; 轮载 W (kN) 为集中荷载,并且以一个圆锥面形状传入路基,圆锥面与中心垂直轴的交角为 θ (设中心垂直轴与路表面直角相交); 土基顶面承受的压力为均布的,其值为 q (MN/m²)。于是路面厚度与轮载和土基单位压力之间的关系为:

$$W = q \cdot \pi (h \cdot \operatorname{tg} \theta)^2 \quad (1-1)$$

设计时假定土基顶面的压力与土的承载力相平衡,从而求得路面厚度:

$$h = \frac{0.564}{\operatorname{tg} \theta} \sqrt{\frac{W}{q}} \quad (1-2)$$

式中: θ 值是可以变化的,为安全计,可定 $\theta = 45^\circ$ 。于是

$$h = 0.564 \sqrt{\frac{W}{q}} \quad (1-3)$$

上式成为麻省(Massachusetts)和唐氏公式的基础。经发展,最后改为:

$$h = 0.50 \sqrt{\frac{W}{q}} \quad (1-4)$$

在式(1—1)中,轮载被认为集中于一点,实际上它是分布在轮胎与路面之间的接触面上,如图 1—2 所示。如果这一接触面为圆形,则

$$W = q\pi(h+a)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta \quad (1-5)$$

其中 a 为锥形压力分布图中,在路表面上锥体的高度。于是:

$$h = \frac{0.564}{\operatorname{tg} \theta} \sqrt{\frac{W}{q}} - a \quad (1-6)$$

若设 p 为轮载 W 分布在路表面上的单位压力,即 $W = p\pi r^2$, 代入(1—6)式得:

$$h = \frac{r}{\operatorname{tg} \theta} \sqrt{\frac{p}{q}} - a \quad (1-7)$$

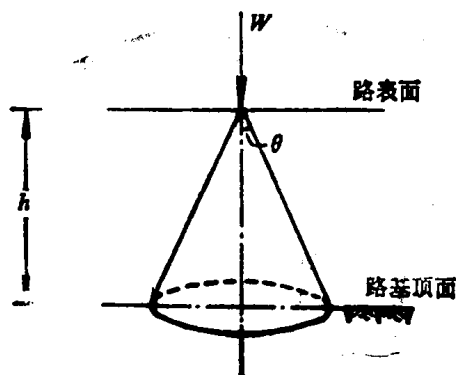


图 1—1 古型方法的力学图式

由于 $a = r/\operatorname{tg}\theta$, 所以

$$h = \frac{r}{\operatorname{tg}\theta} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - 1 \right) \quad (1-8)$$

若 $\theta = 45^\circ$, 则上式变成

$$h = r \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - 1 \right) \quad (1-9)$$

如果接触面的形状是椭圆形的, 而且 $\theta = 45^\circ$, 则在土基顶面上的压力分布面也是椭圆形的。设轮胎接触面椭圆的长轴和短轴直径为 $2r_l$ 和 $2r_s$, 则土基压力分布椭圆的长短轴直径各为 $2(r_l + h)$ 和 $2(r_s + h)$, 于是

$$W = p\pi r_l \cdot r_s = q\pi (r_l + h)(r_s + h) \quad (1-10)$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{p}{q} - 1\right)r_l \cdot r_s + \frac{1}{4}(r_l + r_s)^2} - \frac{1}{2}(r_l + r_s) \quad (1-11)$$

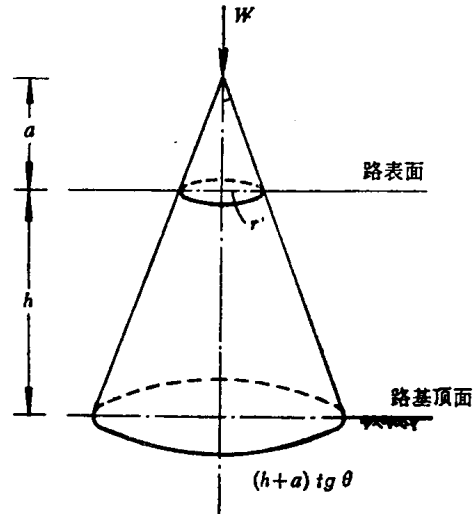


图 1-2 荷载为圆形分布面积时的古典法力学图式

在应用以上理论公式时, 还需就下列问题作出假定: (1) 轮胎接触面的形状和尺寸; (2) 标准荷载; (3) 冲击影响; (4) 土基上的分布压力; (5) 路面在轮载作用下破坏的临界状态。

二、弹性半空间体

弹性半空间体表面上作用一集中力时, 弹性体内的应力和变形分布问题最早于 1833 年由拉梅 (Lame) 和克雷派隆 (Clapeyron) 提出, 之后于 1878 年~1885 年由布辛尼斯克得到完整的解答, 故称为布辛尼斯克解。根据图 1-3 所示的符号 (拉应力为正), 以圆柱形坐标表示的应力分量为:

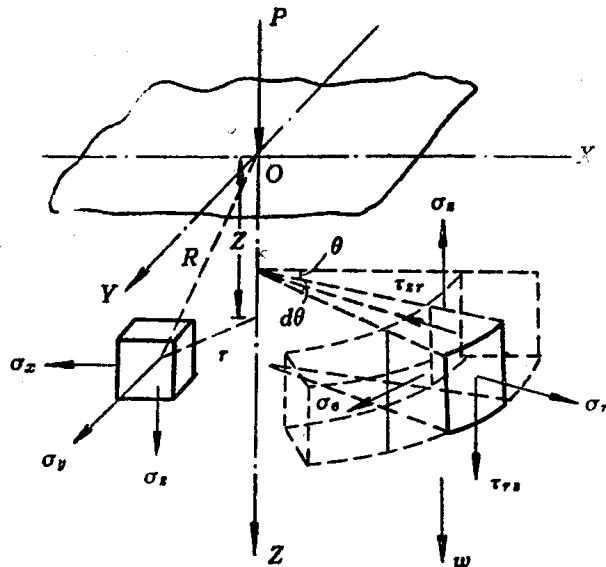


图 1-3 弹性半空间体

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} \\ \sigma_r &= -\frac{P}{2\pi} \left[\frac{3zr^2}{R^5} - \frac{1-2\mu}{R(R+z)} \right], \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta} &= -\frac{P}{2\pi}(1-2\mu)\left[-\frac{z}{R^3} + \frac{1}{R(R+z)}\right], \\ \tau_{rz} &= \frac{3Pz^2r}{2\pi R^5} \\ \tau_{zr} &= \tau_{rz} = 0, \end{aligned} \right\}$$

式中

$$R^2 = z^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

在半径为 r 的圆上、在离半空间体表面深度为 z 处的那些点，沿着半径 r 和轴 Z 的位移为：

$$\left. \begin{aligned} u(r, z) &= \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} \left[\frac{rz}{R^3} - (1-2\mu)\frac{r}{R(R+z)} \right], \\ w(r, z) &= \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} \left[\frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1-\mu)}{R} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

在半空间体表面上的那些点 ($z=0$) 的竖向位移为：

$$w(r, 0) = \frac{P(1-\mu^2)}{\pi E r} \quad (1-14)$$

应用上述理论于路面设计时，把道路假定为以道路表面 $z=0$ 为边界，在深度方向为无限的弹性体，汽车荷载则看成集中荷载。于是道路表面任意点的垂直位移可用(1-14)式计算。

1929年洛夫 (A. E. Love) 采用势能法得出了半空间体在圆形均布荷载 (即把汽车荷载看成分布半径为 a 的圆形均布荷载 (p_V) 作用下的理论解。于是在荷载轴线上任意深度 z 处的位移为：

$$w = \frac{(1+\mu)p_V}{E} \times \left\{ \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} + (1-2\mu)[(a^2+z^2)^{1/2} - z] \right\} \quad (1-15)$$

式中 $p_V = P/\pi a^2$

在半空间体表面，荷载轴线处的最大垂直位移为：

$$w_0 = \frac{2p_V a(1-\mu^2)}{E} \quad (1-16a)$$

在荷载圆边缘处 ($r=a$) 的垂直位移为：

$$w_{r=a} = \frac{2p_V a(1-\mu^2)}{E} \cdot \frac{2}{\pi} \quad (1-16b)$$

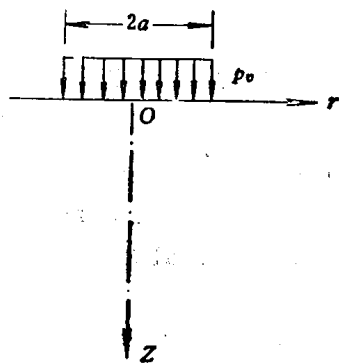


图 1-4 承受圆面积均布荷载的半空间体

可见半空间体表面的最大垂直位移 w_0 是荷载圆边缘处的垂直位移 $w_{r=a}$ 的 $\frac{\pi}{2}$ 倍。对于荷载圆以外任意点的垂直位移可用下式表示：

$$w = \frac{2p_V a}{E} (1-\mu^2) F\left(\frac{a}{r}\right) \quad (1-16c)$$

式中： r —— 计算点到荷载轴线的距离，单位 cm

$F\left(\frac{a}{r}\right)$ —— 与 a/r 有关，其值可用下式计算：

$$F\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{a}{2r} \left[1 + 0.125\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 0.047\left(\frac{a}{r}\right)^4 + 0.024\left(\frac{a}{r}\right)^6 + 0.015\left(\frac{a}{r}\right)^8 + \dots \right]$$

把上述三式(1-16a)~(1-16c)写成一个公式：

$$w = \frac{2p_V a(1-\mu^2)}{E} \alpha \quad (1-16d)$$

式中： α ——垂直位移系数，它是 r/a 的函数，可从表 1—1 查得。

在圆形均布垂直荷载作用下半空间体表面任意点垂直位移系数 α 值 表 1—1

r/a	0	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.5
α	1.000	0.638	0.468	0.386	0.356	0.330	0.290	0.259	0.204
r/a	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	
α	0.169	0.126	0.101	0.083	0.072	0.064	0.056	0.050	

在荷载轴线上，半空间体内任意点的垂直、径向、辐向应力分量为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -p_V \left\{ 1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{a}{z} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \\ \sigma_r &= -\frac{p_V}{2} \left\{ (1+2\mu) - \frac{2(1+\mu)z}{(a^2+z^2)^{1/2}} + \frac{z^3}{(a^2+z^2)^{3/2}} \right\} \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_V}{2} \left\{ (1+2\mu) - \frac{2(1+\mu)z}{(a^2+z^2)^{1/2}} + \frac{z^3}{(a^2+z^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

于是荷载轴线上任意点的最大剪应力为：

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_\theta)$$

三、双层和三层体系

柔性路面通常是一种多层体系。因此在研究柔性路面设计方法时，较为理想的力学模型应当是层状体系理论。因为它较之弹性半空间理论更能反映柔性路面的实际工作状况。所以随着数学和弹性力学的发展，到了本世纪四十~五十年代层状体系理论有了较大的发展，其中有波米斯特(D. M. Burmister)(1945年)及英国福克斯(L. Fox)、阿堪姆(W. E. A. Acum)(1948年~1951年)、苏联科岗(Коган)(1952年~1958年)及英国琼斯(A. Jones)(1962年)等人所作的贡献。他们研究了多层弹性体系问题，给出了一般表达式并将其解用于双层和三层体系，得出了参数范围较为广泛的计算图表，为发展柔性路面设计方法打下了基础。但是这些研究仅限于分析圆形均布垂直荷载的作用。1955年日本学者牟岐鹿楼，1962年美国希夫曼(R. L. Schiffman)研究了更一般的非轴对称荷载情况，包括作用于面层表面的水平力。

我国从1962年起也进行了这方面的研究工作，获得了一定成果。这些成果已成为制订我国柔性路面设计方法的基础。

在求解弹性层状体系应力与位移时，采用下列基本假设：

1. 各层都是由均质的各向同性的材料组成，其弹性模量和泊松比为 E 和 μ ；
2. 假定土基在水平方向和向下的深度方向均为无限，其上的路面各层厚度均为有限，但水平方向仍为无限；
3. 假定路面上层表面作用有垂直荷载和水平荷载，同时认为水平方向与最下层的无限远处应力与位移都等于零；
4. 在层次之间的接触面上采用两种假定：
 - ① 层间接触完全连续，它们共同工作如同一个天然组成的弹性体；

② 层间接触完全光滑，其上剪应力为零。

根据以上四点基本假设，按柱坐标体系采用弹性力学和汉格尔(Hankel)积分变换方法，可解出层状半空间体系中应力和位移分量的一般表达式，然后按照各个力学模式与荷载图式不同定解条件，可确定一般表达式中的待定积分常数。以下就圆形均布荷载作用下的三层体系为例，列出其结果。双层体系的解与此类似，在此从略。

(一) 在圆形均布垂直荷载作用下的三层体系

三层体系在圆形均布荷载作用下的计算简图如图1—5所示。图中 p_v 表示单位面积上的垂直荷载， δ 为荷载作用圆半径， h_1, E_1, μ_1 和 h_2, E_2, μ_2 分别为面层和基层的弹性模量和泊松比。

由于表面荷载与整个弹性体均对称于坐标轴 Z ，故宜用柱面坐标。求解时，采用苏斯威尔(R. V. Southwell)给出的轴对称课题基本方程式：

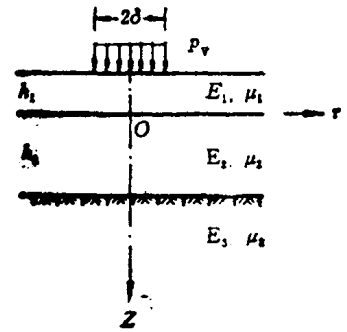


图 1—5 承受圆形均布垂直荷载的三层体系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\psi + \phi) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\psi + \phi) - \frac{\mu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} [\psi + (1 - \mu)\phi] \\ \sigma_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ u &= \frac{1 + \mu}{E} \frac{1}{r} [\psi + (1 - \mu)\phi] \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} [\psi - (1 - \mu)\phi] \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

式中： $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ ——垂直于 r, θ, Z 轴之平面上的正应力分量；

τ_{rz} ——垂直于 Z 轴之平面上与 r 轴方向平行的剪应力分量；

u, w ——分别为 r 轴与 Z 轴方向的位移分量；

ϕ, ψ ——应力函数，它们满足柱面坐标系内的下列二阶偏微分方程：

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \nabla^2 \psi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

其中：
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

式(1—19)可用汉格尔积分变换来求解，其结果如下：

应力函数：

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \int_0^\infty r J_1(\xi r) (A_i e^{\xi z} + B_i e^{-\xi z}) d\xi \\ \psi_i &= \frac{1}{2} \int_0^\infty r J_1(\xi r) [(2C_i + \xi z A_i) e^{\xi z} + (2D_i - \xi z B_i) e^{-\xi z}] d\xi \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

为求得应力与位移的积分表达式，亦需对(1—18)式进行汉格尔变换和其他一系列演算过程，并以式(1—20)代入，其最后结果如下：

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ri} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \{ e^{\xi z} [2C_i + (2 + \xi z) A_i] + e^{-\xi z} [2D_i + (2 - \xi z) B_i] \} d\xi - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(\xi r)}{r} \{ e^{\xi z} [2C_i + (2 - 2\mu_i + \xi z) A_i] + e^{-\xi z} [2D_i + (2 - 2\mu_i - \xi z) B_i] \} d\xi \\
 \sigma_{\theta i} &= \mu_i \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) [e^{\xi z} A_i + e^{-\xi z} B_i] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(\xi r)}{r} \times \{ e^{\xi z} [2C_i + (2 - 2\mu_i + \xi z) A_i] + e^{-\xi z} [2D_i + (2 - 2\mu_i - \xi z) B_i] \} d\xi \\
 \sigma_{zi} &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \{ e^{\xi z} [2C_i + \xi z A_i] + e^{-\xi z} [2D_i - \xi z B_i] \} d\xi \\
 \tau_{zri} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi J_1(\xi r) \{ [2C_i + (1 + \xi z) A_i] e^{\xi z} - [2D_i + (1 - \xi z) B_i] e^{-\xi z} \} d\xi \\
 \varepsilon_{ri} &= \frac{1}{2} \frac{1 + \mu_i}{E_i} \int_0^\infty \xi \left[J_0(\xi r) - \frac{J_1(\xi r)}{\xi r} \right] \{ [2C_i + (2 - 2\mu_i + \xi z) A_i] \times e^{\xi z} + [2D_i + (2 - 2\mu_i - \xi z) B_i] e^{-\xi z} \} d\xi \\
 w_i &= -\frac{1}{2} \frac{1 + \mu_i}{E_i} \int_0^\infty J_0(\xi r) \{ e^{\xi z} [2C_i - (1 - 2\mu_i - \xi z) A_i] - e^{-\xi z} [2D_i - (1 - 2\mu_i + \xi z) B_i] \} d\xi \\
 u_i &= \frac{1}{2} \frac{1 + \mu_i}{E_i} \int_0^\infty J_1(\xi r) \{ [2C_i + (2 - 2\mu_i + \xi z) A_i] e^{\xi z} + [2D_i + (2 - 2\mu_i - \xi z) B_i] e^{-\xi z} \} d\xi
 \end{aligned} \tag{1—21}$$

式(1—20,1—21)中的 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 为积分常数 (i 为层次编号, $i=1,2,3$), 它们都是积分变量 ξ 的函数, 需由问题的定解条件来确定。

对于三层连续体系, 其定解条件为:

上层表面的边界条件 ($z = -h_1$):

$$\sigma_z^{(1)} = \begin{cases} -p_V & (r < \delta) \\ 0 & (r > \delta) \end{cases} \\
 \tau_{zr}^{(1)} = 0
 \end{aligned} \tag{1—22}$$

层间结合条件:

当 $z = 0$ 时, 有

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}; \quad \tau_{zr}^{(1)} = \tau_{zr}^{(2)}$$

$$w^{(1)} = w^{(2)}; \quad u^{(1)} = u^{(2)}$$

当 $z = h_2$ 时, 有

$$\sigma_z^{(2)} = \sigma_z^{(3)}; \quad \tau_{zr}^{(2)} = \tau_{zr}^{(3)}$$

$$w^{(2)} = w^{(3)}; \quad u^{(2)} = u^{(3)}$$

(1—23)

对于上中滑动、中下连续的三层体系, 其定解条件除边界条件同于三层连续体系的式(1—22)外, 层间结合条件应为:

当 $z = 0$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned}
 &\sigma_z(1) = \sigma_z(2); \quad \tau_{zr}(1) = 0 \\
 &\tau_{zr}(2) = 0; \quad w(1) = w(2) \\
 &\sigma_z(2) = \sigma_z(3); \quad \tau_{zr}(2) = \tau_{zr}(3) \\
 &u(2) = u(3); \quad w(2) = w(3)
 \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

当 $z = h_2$ 时, 有

此外, 这两种定解条件中还有: 当 $z \rightarrow \infty$ 时, 所有应力、变形与位移分量均应趋近于零, 因此必有 $A_3 = C_3 = 0$ 。

将式(1-20)中有关公式代入定解条件式(1-22, 1-23) 或 (1-22, 1-24), 并对它们进行相应的变换, 可得两组包含 10 个未知数和 10 个方程的线性代数方程组。解该两方程组, 可得三层连续体系与上中滑动、中下连续的三层体系中 10 个非零积分常数。限于篇幅, 下面仅列出三层连续体系的结果, 其余可见有关参考文献[2]:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{2p_V(\xi)}{\Delta_1}(\rho x - \beta\eta); \\
 B_1 &= \frac{2\bar{p}(\xi)}{\Delta_1}(\alpha\eta - \lambda x); \\
 C_1 &= \frac{p_V(\xi)}{2\Delta_1}[(\alpha\rho - \beta\lambda)e^{\xi h_1} - (1 - 2\xi h_1)(\rho x - \beta\eta) + (\alpha\eta - \lambda x)e^{2\xi h_1}]; \\
 D_1 &= \frac{p_V(\xi)}{2\Delta_1}[(\alpha\rho - \beta\lambda)e^{-\xi h_1} - (1 + 2\xi h_1)(\alpha\eta - \lambda x) + (\rho x - \beta\eta)e^{-2\xi h_1}]; \\
 A_2 &= -\frac{2\bar{p}(\xi)}{\Delta_2}[Le^{-2\xi h_2} - (1 + 2\xi h_2)] + \frac{2S(\xi)}{\Delta_2}[Le^{-2\xi h_2} - (1 - 2\xi h_2)]; \\
 B_2 &= -\frac{2\bar{p}(\xi)}{\Delta_2}[Me^{2\xi h_2} - (1 - 2\xi h_2)] - \frac{2S(\xi)}{\Delta_2}[Me^{2\xi h_2} - (1 + 2\xi h_2)]; \\
 C_2 &= \frac{\bar{p}(\xi)}{2\Delta_2}[2Le^{-2\xi h_2} - (1 + 2\xi h_2)^2 - ML] + \frac{S(\xi)}{2\Delta_2}(1 - ML - 4\xi^2 h_2^2); \\
 D_2 &= \frac{\bar{p}(\xi)}{2\Delta_2}[2Me^{2\xi h_2} - (1 - 2\xi h_2)^2 - ML] - \frac{S(\xi)}{2\Delta_2}(1 - ML - 4\xi^2 h_2^2); \\
 B_3 &= -\frac{2\bar{p}(\xi)}{\Delta_2}(L-1)[(1 - 2\xi h_2) - Me^{2\xi h_2}] - \frac{2S(\xi)}{\Delta_2}(L-1)[(1 \\
 &\quad + 2\xi h_2) - Me^{2\xi h_2}]; \\
 D_3 &= -\frac{\bar{p}(\xi)}{2\Delta_2}\{(M-1)L - (L-1)(1 - 2\xi h_2)^2\} - [2M - (1 + 2\xi h_2) \\
 &\quad - (1 - 2\xi h_2)ML]e^{2\xi h_2} - \frac{S(\xi)}{2\Delta_2}\{(1 - ML)[1 - (1 - 2\xi h_2)e^{2\xi h_2}] \\
 &\quad + 4(L-1)\xi^2 h_2^2\}; \quad (1-25)
 \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}(\xi) &= \frac{p_V(\xi)}{2\Delta_1}[(\alpha\eta - \lambda x)e^{2\xi h_1} + (\alpha\rho - \beta\lambda)e^{\xi h_1} - (1 - 2\xi h_1)(\rho x \\
 &\quad - \beta\eta) - (1 + 2\xi h_1)(\alpha\eta - \lambda x) + (\alpha\rho - \beta\lambda)e^{-\xi h_1} + (\rho x \\
 &\quad - \beta\eta)e^{-2\xi h_1}]; \\
 S(\xi) &= \frac{p_V(\xi)}{2\Delta_1}[(\alpha\eta - \lambda x)e^{2\xi h_1} + (\alpha\rho - \beta\lambda)e^{\xi h_1} + (1 + 2\xi h_1)(\rho x
 \end{aligned}$$

双层连续体系在圆形均布垂直荷载作用下, 上层表面 ($z = -h$) 不同点处的应力、变形与位移系数表 表 1-2

E_2/E_1	h/δ	各种系数	r/δ									
			0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	
0.1	0.5	$\bar{\sigma}_r(i)$	-2.514	-2.434	-2.232	-1.751	-0.715	0.156	0.374	0.442	0.426	
		$\bar{\sigma}_\theta(i)$	-2.514	-2.471	-2.337	-2.107	-1.554	-0.911	-0.620	-0.423	-0.294	
		$\bar{\sigma}_x(i)$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	
		$\bar{\tau}_{rz}(i)$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
		$\bar{\epsilon}_r(i)$	-1.635	-1.566	-1.349	-0.975	-0.202	0.383	0.529	0.548	0.499	
		$\bar{W}(i)$	6.037	5.931	5.623	5.135	4.447	3.753	3.206	2.753	2.385	
0.2	1.0	$\bar{\sigma}_r(i)$	-1.307	-1.284	-1.239	-1.123	-0.512	0.006	0.049	0.086	0.111	
		$\bar{\sigma}_\theta(i)$	-1.307	-1.294	-1.238	-1.205	-0.890	-0.432	-0.369	-0.283	-0.213	
		$\bar{\sigma}_x(i)$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	
		$\bar{\tau}_{rz}(i)$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
		$\bar{\epsilon}_r(i)$	-0.730	-0.710	-0.654	-0.571	-0.164	0.127	0.141	0.157	0.166	
		$\bar{W}(i)$	2.509	2.477	2.380	2.221	1.930	1.639	1.453	1.296	1.159	
0.3	1.5	$\bar{\sigma}_r(i)$	-0.963	-0.958	-0.941	-0.915	-0.385	0.058	0.041	0.040	0.045	
		$\bar{\sigma}_\theta(i)$	-0.963	-0.960	-0.955	-0.937	-0.669	-0.353	-0.241	-0.192	-0.155	
		$\bar{\sigma}_x(i)$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	
		$\bar{\tau}_{rz}(i)$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
		$\bar{\epsilon}_r(i)$	-0.473	-0.467	-0.453	-0.432	-0.093	0.154	0.101	0.088	0.083	
		$\bar{W}(i)$	1.636	1.616	1.555	1.449	1.226	1.008	0.884	0.805	0.729	
0.5	2.0	$\bar{\sigma}_r(i)$	-0.818	-0.817	-0.813	-0.807	-0.300	0.119	0.079	0.058	0.044	
		$\bar{\sigma}_\theta(i)$	-0.818	-0.817	-0.815	-0.812	-0.557	-0.213	-0.158	-0.125	-0.100	
		$\bar{\sigma}_x(i)$	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	
		$\bar{\tau}_{rz}(i)$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
		$\bar{\epsilon}_r(i)$	-0.364	-0.363	-0.359	-0.352	-0.340	0.172	0.119	0.089	0.072	
		$\bar{W}(i)$	1.188	1.172	1.094	1.032	0.830	0.635	0.546	0.482	0.433	

$$\begin{aligned}
& -\beta\eta) - (1 - 2\xi h_1)(\alpha\eta - \lambda x) - (\alpha\rho - \beta\lambda)e^{-\xi h_1} - (\rho x - \beta\eta)e^{-\xi h_1}]; \\
p_V(\xi) &= \frac{p_V \delta J_1(\xi \delta)}{\xi}; \\
\alpha &= 2\xi(h_1 + h_2 N) + 2\xi h_1 k (Le^{-2\xi h_2} - 1) - 2\xi h_2 k e^{-2\xi h_2}; \\
\beta &= (e^{2\xi h_2} - 1) + (Le^{-2\xi h_2} - 1)(ke^{2\xi h_2} - N) + 4\xi^2 h_1 h_2 k; \\
\lambda &= -[(e^{-2\xi h_2} - 1) + (Me^{2\xi h_2} - 1)(ke^{-2\xi h_1} - N) \\
&\quad + 4\xi^2 h_1 h_2 k]; \\
\rho &= 2\xi(h_1 + h_2 N) + 2\xi h_1 k (Me^{2\xi h_2} - 1) - 2\xi h_2 k e^{2\xi h_1}; \\
x &= 2\xi h_2 k e^{-\xi h_1} - [1 + (Le^{-2\xi h_2} - 1)k]e^{\xi h_1}; \\
\eta &= 2\xi h_2 k e^{\xi h_1} + [1 + (Me^{2\xi h_2} - 1)k]e^{-\xi h_1}; \\
L &= \frac{(3 - 4\mu_3) - (3 - 4\mu_2)n}{(3 - 4\mu_3) + n}; \\
M &= \frac{1 + (3 - 4\mu_2)n}{1 - n}; \quad k = \frac{1 - m}{4(1 - \mu_2)}; \\
N &= \frac{1 + (3 - 4\mu_1)m}{4(1 - \mu_2)}; \\
m &= \frac{(1 + \mu_1)E_2}{(1 + \mu_2)E_1}; \\
n &= \frac{(1 + \mu_2)E_3}{(1 + \mu_3)E_2}; \\
\Delta_1 &= \alpha\rho - \beta\lambda; \\
\Delta_2 &= Me^{2\xi h_2} - (1 + ML + 4\xi^2 h_2^2) + Le^{-2\xi h_2}
\end{aligned}$$

表(1—2)~(1—4)列出了双层连续体系和三层连续体系在圆形均布垂直荷载作用下,应力、变形和位移系数的若干计算结果。为了求得相应的应力、变形和位移值,尚须应用下式计算:

$$\begin{aligned}
\sigma_{r(i)} &= p_V \bar{\sigma}_{r(i)}; \\
\sigma_{\theta(i)} &= p_V \bar{\sigma}_{\theta(i)}; \\
\sigma_z(i) &= p_V \bar{\sigma}_z(i); \\
\tau_{rz(i)} &= p_V \bar{\tau}_{rz(i)}; \\
\varepsilon_r(i) &= \frac{p_V}{E_i} \bar{\varepsilon}_r(i); \\
w(i) &= \frac{2p_V \delta}{E(i)} \bar{w}(i)
\end{aligned}$$

(二) 在圆形均布水平荷载作用下的三层体系

三层体系在圆形均布水平荷载作用下的计算简图如图 1—6 所示。图中 p_H 为单位面积上的荷载。其余符号意义同前。

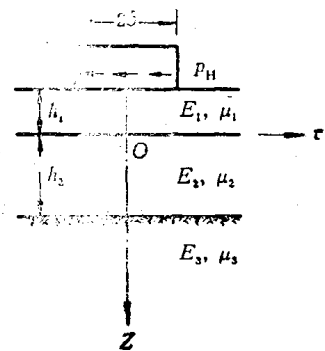


图 1—6 承受圆形均布水平荷载的三层体系

三层体系表面作用有单向水平荷载时,问题远比轴对称课题复杂,一般可归结为非轴对称空间课题。

对于非轴对称课题,其基本方程可用米切尔(Michell)应力函数表示:

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} \right) \\
\sigma_{\theta} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} \right)
\end{aligned} \right\}$$

双层连续体系在圆形均布垂直荷载作用下，上层内部 ($z = -0.75h$) 不同点处的应力、变形与位移系数表 表 1-3

E_2/E_1	h/δ	各种系数	r/δ								
			0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.1	0.5	$\bar{\sigma}_r(i)$	-1.436	-1.388	-1.234	-0.932	-0.507	-0.113	0.092	0.164	0.179
		$\bar{\sigma}_\theta(i)$	-1.436	-1.410	-1.328	-1.171	-0.832	-0.530	-0.373	-0.267	-0.195
		$\bar{\sigma}_z(i)$	-0.958	-0.956	-0.951	-0.939	-0.470	-0.028	-0.017	-0.011	-0.006
		$\bar{r}_{rz}(i)$	0.000	-0.085	-0.173	-0.291	-0.553	-0.241	-0.125	-0.060	-0.025
		$\bar{e}_r(i)$	-0.838	-0.797	-0.664	-0.404	-0.182	0.027	0.189	0.233	0.229
		$\bar{W}(i)$	6.038	5.931	5.618	5.116	4.445	5.768	3.211	2.753	2.384
0.2	1.0	$\bar{\sigma}_r(i)$	-0.693	-0.669	-0.592	-0.451	-0.356	-0.242	-0.105	-0.033	0.007
		$\bar{\sigma}_\theta(i)$	-0.693	-0.680	-0.637	-0.549	-0.391	-0.266	-0.204	-0.162	-0.129
		$\bar{\sigma}_z(i)$	-0.942	-0.941	-0.930	-0.858	-0.446	-0.070	-0.017	-0.010	-0.008
		$\bar{r}_{rz}(i)$	0.000	-0.060	-0.131	-0.251	-0.398	-0.223	-0.123	-0.080	-0.053
		$\bar{e}_r(i)$	-0.284	-0.264	-0.200	-0.099	-0.147	-0.158	-0.050	0.011	0.041
		$\bar{W}(i)$	2.448	2.415	2.316	2.146	1.903	1.657	1.462	1.300	1.163
0.3	1.5	$\bar{\sigma}_r(i)$	-0.420	-0.404	-0.352	-0.281	-0.266	-0.230	-0.141	-0.078	-0.041
		$\bar{\sigma}_\theta(i)$	-0.420	-0.410	-0.376	-0.312	-0.223	-0.156	-0.123	-0.101	-0.085
		$\bar{\sigma}_z(i)$	-0.932	-0.924	-0.890	-0.765	-0.427	-0.123	-0.033	-0.012	-0.007
		$\bar{r}_{rz}(i)$	0.000	-0.055	-0.128	-0.243	-0.323	-0.215	-0.117	-0.073	-0.051
		$\bar{e}_r(i)$	-0.083	-0.070	-0.035	-0.012	-0.104	-0.159	-0.102	-0.050	-0.018
		$\bar{W}(i)$	1.515	1.495	1.433	1.324	1.173	1.022	0.904	0.811	0.734
0.5	2.0	$\bar{\sigma}_r(i)$	-0.263	-0.250	-0.219	-0.190	-0.201	-0.193	-0.140	-0.090	-0.056
		$\bar{\sigma}_\theta(i)$	-0.263	-0.254	-0.227	-0.182	-0.130	-0.092	-0.071	-0.059	-0.050
		$\bar{\sigma}_z(i)$	-0.901	-0.887	-0.831	-0.686	-0.412	-0.166	-0.058	-0.022	-0.010
		$\bar{r}_{rz}(i)$	0.000	-0.061	-0.136	-0.231	-0.276	-0.202	-0.116	-0.068	-0.044
		$\bar{e}_r(i)$	0.028	0.034	0.046	0.026	-0.066	-0.170	-0.108	-0.070	-0.040
		$\bar{W}(i)$	1.009	0.993	0.944	0.860	0.748	0.639	0.553	0.488	0.438