结构力学习题指导

（上　册）

阳　日　郑曈灼　韦树英
蒙承军　梁　琨　合编

中国建筑工业出版社

结构力学习题指导

（上　册）

阳　日　郑曈灼　韦树英
蒙承军　梁　琨　合编

中国建筑工业出版社

本书主要介绍结构力学的解题方法及其有关理论概要。全书内容根据高等学校结构力学多学时教学大纲，并考虑工程实际应用的需要进行编写。每章均包括理论要点、例题示范及习题三个部分，以例题示范为主；例题及习题大部分属于中等难度的题目，个别题目难度较高，部分习题附有答案。

全书分上下两册。本书为上册，包括：杆系结构几何稳定分析；静定的梁、刚架、拱和桁架的计算；弹性结构的位移计算；力法、位移法、力矩分配法、迭代法等超静定结构分析方法；影响线；能量法等共九章。下册包括结构矩阵分析方法、梁和刚架的塑性分析、结构稳定和结构动力计算。

本书可供土建、机械专业大专院校师生及一般工程技术人员参考。

结构力学习题指导

（上册）

阳日　郑瞳灼　韦树英
蒙承军　梁琨　合编

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：26 字数：631 千字
1988年9月第一版　1988年9月第一次印刷
印数：1—10,300册　定价：7.45元
ISBN7—112—00146—3/TU·99

统一书号：15040·5458

目　　录

第一章 杆件体系的机动分析

杆件

一、理论概述及解题方法

§1 平面杆系的机动分析

1.平面杆系自由度计算公式

任何平面结构都可以看成是一些在平面内可以自由运动的刚片（不变形的平面体）和质点，通过相互之间的一些约束（结点约束、链杆约束和支座约束）联系而构成的几何不变体系。

图1-1a所示体系可以看成原来是在一平面内的四个刚片和一个质点（图1-1b）通过一系列的约束联系而构成的。

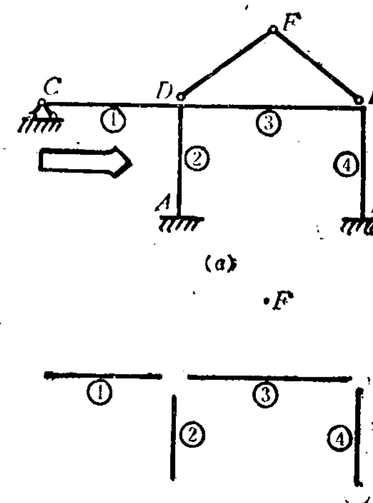


图1-1

who are you? and for who?

如果约束的数目不够，或数目虽然够但布置不合理而不足以消除体系所有的自由度时，则体系是可变的。反之，如果约束的数目足够且布置也合理，并能消除所有的自由度时，便使体系成为几何不变体系。所以，分析体系是否几何可变必须从两方面考虑。一方面是约束数量是否足够，另一方面是约束的布置是否合理。

一个刚片在平面上有三个自由度。一个质点有两个自由度。当一个体系中有m个刚片和j个质点时，体系的总的自由度数为$3m+2j$。

联结两个刚片的刚性结点称为简单刚结点，一个简单刚性结点相当于三个约束（联系），可以消除系统中的三个自由度。同时联结n个刚片的刚结点称为复杂刚结点，一个复杂刚结点可以折算成$n-1$个简单刚结点。

联结两个刚片的铰结点称为简单铰结点，一个简单铰结点可以消除体系中两个自由度，相当于两个约束。同时联结n个刚片的铰结点称为复杂铰结点。一个复杂铰结点可以折算成$n-1$个简单铰结点。

当一根杆联结两个质点时，为一根简单链杆。一根简单链杆可以消除一个自由度。当一根杆联结n个质点时称为复杂链杆。一根复杂链杆可以折算成$2n-3$根简单链杆。

因此，计算体系的自由度时，一般情况下可以用下列公式计算体系的“计算自由度”：

$$W=(3m+2j)-(3g+2h+b)-r \qquad (1\text{-}1)$$

其中 m——体系中的刚片数；

j——质点数；

g——简单刚结点数；

h ——简单铰结点数；

b ——简单链杆数；

r ——支座支杆数。

计算出的W值并不是实际上体系真正的自由度数，因为有些约束并不能有效地消除自由度。譬如，在一个已经是刚片的物体上再增加链杆，这链杆并不能消除自由度。这就是布置不合理。所以，W并不能反映真实的自由度数，而只能被称为计算自由度数。

当体系中只有质点和链杆而没有刚片时（例如平面桁架体系）自由度公式简化为

$$W = 2j - b - r \tag{1-2}$$

本章中除特别声明外，所指“自由度”的都是计算自由度W。

当$W > 0$时，表示体系是一个有自由度的几何可变机构。

当$W < 0$时，表示体系存在多余约束，但不一定就是几何不变，也可能由于杆件布置不当而体系中部分有多余约束、部分联系不够而成为几何可变体系。

当$W = 0$时，表示体系联系的数目恰好满足构成静定几何不变体系的需要。$W \leqslant 0$是构成几何不变体系的必要条件，但体系是否几何可变，还要考查体系的构造组成是否符合构成几何不变体系的基本规律。虽然体系满足$W = 0$，但组成构造不合理时，体系可能是瞬变的。

当不考虑体系与地面的连接，仅仅考虑它内部是否可变时，可采用内部可变度V这一概念。

$$V = 2j - b - 3 \tag{1-3}$$

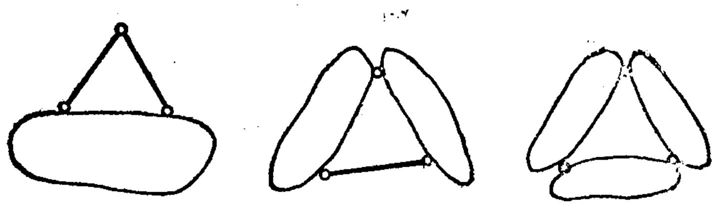
2.组成平面几何不变体系的基本规律

平面几何不变体系最基本的组成规律有如下三条：

规律一（二元体结合规律）：一个刚片用两根链杆与一个点相连，且这两链杆不在一直线上，则组成几何不变体系，并且没有多余连系(图1-2a)。

规律二（两片构造规律）：两个刚片由一个铰和一根链杆相联结，且这个铰与链杆不在同一直线上，则组成几何不变体系，且无多余联系（图1-2b）。

规律三（三片构造规律）：三个刚片用三个铰互相联结，且三个铰不在一直线上，则组成几何不变体系，且无多余联系（图1-2c）。



(a) (b) (c)

图 1-2

这里所说的无多余联系是指刚片之间无多余联系，而不是说刚片内部，或整个体系。

若体系的构成满足以上三个基本规律中的任何一个，体系就是几何不变体系。这三个规律都是构成几何不变体系的充分条件；但它仅仅是充分条件。有些复杂体系的组成并不满足这三个规律，但仍能构成几何不变体系。

瞬铰的概念：两刚片用两根链杆联结，其约束作用相当于一个铰，该铰的位置在这两根杆的交点，称为瞬铰。

由于瞬铰的存在，两片构造规律也可以叙述为：两刚片用三根互不平行，也不交于一

点的链杆联结，构成几何不变整体，且无多余联系。同样道理，三片构造也可以作相应的引伸。

瞬变体系的概念：体系满足$W=0$这一几何不变的必要条件，但由于构造不合理，而使体系可以产生微小的位移，这种体系称为瞬变体系。瞬变体系属于可变体系中的一种特殊情况。

§2 空间杆系的机动分析

1.空间杆系自由度的计算

当空间杆系全由链杆构成时（空间桁架），体系的自由度计算公式为：

$$W=3j-b-r \tag{1-4}$$

如果不考虑体系与地面的联结，只考虑系统内部可变的程度，可用内部可变度V表示：

$$V=3j-b-6 \tag{1-5}$$

当$V>0$时，表示体系内部的联系数不够，是内部几何可变体系。

当$V=0$时，若体系构造合理则为几何不变而无多余联系的体系。

当$V<0$时，体系有多余联系。

2.空间杆系构成几何不变的基本规律

1）三根不在同一平面内的链杆可将空间一点与一刚体联结成为几何不变体系。

2）联结两刚体的6根链杆中有3根不在同一平面内的链杆交于一点，而且此6根杆不交于同一直线，则两刚体联结成几何不变体系。

3）联结两刚体的6根杆中有3根在同一平面内而不交于一点，且此6根杆不交于同一直线，则两刚体联结成几何不变整体。

§3 解题方法

对体系进行机动分析一般分两步进行，首先利用公式求体系的计算自由度或内部可变度，考察体系是否满足构成几何不变的必要条件；然后再分析体系的组成是否符合构成几何不变的基本规律。

但是，因为体系符合构成几何不变的基本规律已经满足够成几何不变体系的充分条件，有时候，不必计算结构的自由度，而直接分析体系的几何构造组成。

进行平面体系的组成分析时，首先在体系中找出基本的几何不变部分(刚片)，观察是否能按构成二元体规律将这基本的几何不变部份加以扩展；或者观察体系中有几个这样的刚片，是否符合两片构造或三片构造的组成规律。必须注意，刚片和链杆必要时是可以互相转化的，有时一根链杆可以把它当作刚片处理；而一刚片如果只有两点与其它物体联结，必要时也可以当作链杆处理。

在某些体系中找不到合适的基本部分时，可以用拆除二元体的方法来判断。因为在平面体系中添加或拆除二元体并不影响体系的几何不变性。

对于空间杆系的分析，首先也是寻找几何不变部分。最基本的几何不变部分是在一刚体上用三根不在同一平面的链杆联

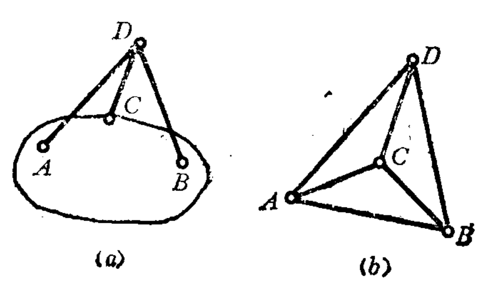


图 1-3

结一结点（图1-3a），或由六根杆组成的四面体（图1-3b）。从基本的几何不变部分出发，考察其能否按三根杆联结一铰结点的原则扩展其几何不变部分，或者观察其两个几何不变部分的联结方式是否符合组成几何不变体系的规则。

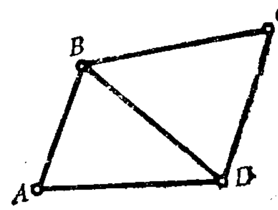


图 1-4

对于平面杆系和空间杆系的几何不变刚片的概念不能相混淆。图1-4所示的体系属于平面体系的一部分时是几何不变的，可以作为刚片，属于空间体系的一部分时则不能作为刚片。因为它还可以绕BD杆摺叠，是几何可变的。

有些结构，虽然满足计算自由度为零这一几何不变的必要条件，但其构造组成并不符合上述规律的任何一个，这时还不能作出肯定的结论。对于这种复杂体系的分析还可以采用零载法，这将在第三章中详述。

二、例 题 示 范

［例题 1-1］ 试求图示体系的计算自由度

［解］ 1）解法一：

把杆AB和杆DE视为具有运动自由度的两刚片。杆CF为约束链杆。其它为支座支杆。所以

$m = 2$,

$b = 1$,

$r = 6$

$W = 3m - b - r = 3\times2 - 1 - 6 = -1$

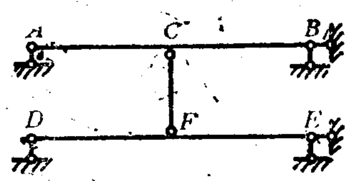


图 例题1-1

即结构有一个多余联系。

2）解法二，把点A、B、C、D、E、F视为运动质点，而杆AB、DE，和CF则视为约束，其中杆AB和DE视为联系三个点的复杂链杆，按每个复杂链杆可折算成$2n-3$个简单链杆，则共相当于$2(2\times3-3) = 6$根简单链杆，杆CF为简单链杆，所以体系的自由度为

$$W = 2j - b - r$$
$$= 2\times6 - 7 - 6 = -1$$

与解法一的结果相同。

这两种解法不同之点在于把不同的物体作为运动对象。把运动对象和约束明确区别开来，就都能获得正确的结果。同样，还可以有其它方法。例如，把AB、DE和CF都作为运动刚片，这时C铰和F铰必定是约束。就不能把它们再作为运动质点来对待了。否则刚片AB,CF，和刚片ED、CF之间就没有约束了，如果把AB、ED、CF作为刚片，则$m = 3$，$h = 2$，$r = 6$，算得W仍为-1。

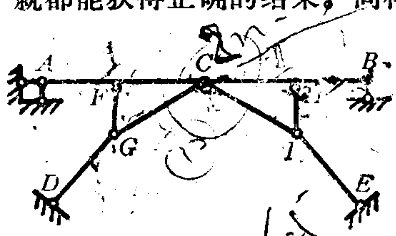


图 例题1-2

［例题 1-2］ 试计算图示体系的自由度

［解］ 1）解法一，

把杆AC、CB、CG和CI视为在平面上运动的四刚片，C铰是联系这四刚片的复杂铰，它相当于$4-1=3$个简单铰，杆FG和HI为链杆，其余为支座支杆。所以

$$W=3m-2h-b-r$$
$$=3\times4-2\times3-2-5=-1$$

体系有一个多余联系。

2）解法二，把点A、F、C、H、B、G、I视为运动质点，各杆视为约束；其中杆AC和CB为复杂链杆，各联结3个点，故可折算为$2(2\times3-3)=6$个简单链杆，因而

$$W=2j-b-r$$
$$=2\times7-(6+4)-5=-1$$

与解法一的结果相同。

3）解法三，把杆AC、CB视为刚片，点G和I视为运动质点，这些都是产生自由度的物体；除此之外，其它物体均为约束。其中C为铰，杆FG、CI、CG、HI为链杆，其余为支杆。则

$$W=3m+2j-2h-b-r$$
$$=3\times2+2\times2-2\times1-4-5=-1$$

结果亦相同。

［讨论］ 1）解法三中，G点与I点必须当作运动质点，否则杆FG、CG、DG等便不能作为约束。因为没有物体可供它们约束，只有把G、I作为运动质点后这些约束才有意义。

2）点D和E与地面直接联结，不能把它们也视为运动质点。如果要把它们算作运动质点则还需计入约束它们未画出的四根支杆。

［例题 1-3］ 试对图示体系进行机动分析

对体系进行机动分析时需分两步进行。首先计算自由度，当自由度数小于或等于零时说明体系满足构成几何不变体系的必要条件，然后再进行组成分析。若自由度大于零则体系必然可变，就没有必要分析其组成了。

［解］ 1）计算体系的自由度。因体系没有与地基相连，只计算其内部可变度

$$V=2j-b-3$$
$$=2\times6-9-3=0$$

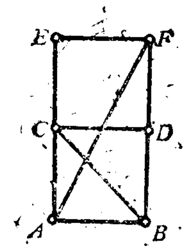


图 例题1-3

2）进行结构组成分析

首先观察出$\triangle ABC$为基本的几何不变部分，然后扩展二元体。用链杆CD、DB将D点固定于$\triangle ABC$，再依次扩展二元体A-F-D和C-E-F。所以，体系是几何不变且无多余联系。

［讨论］ 对体系进行组成分析的方法是很灵活的，对上述体系可以作为二元体构造，也可作为两片构造进行分析。只要把EF当作刚片，则刚片$ABCD$与刚片EF用三根链杆（EC、FA和FD）联结，这三根杆既不平行又不汇交于一点，所以符合两片构造规律，体系是几何不变的。

[例题 1-4] 对图示体系进行机动分析。

[解] 1）计算体系的自由度

$$W=2j-b-r$$
$$=2\times4-4-4=0$$

2）对体系进行组成分析。

在基础A、F上逐步添加二元体ABF、ADF、BCD和BED而构成几何不变体系且无多余联系。

[讨论] 在这里只把B、C、D、E作为有自由度的铰，AB、AD、FB、FD则作为支杆计算。如果把A、F也作为铰，由于它们与地基联结，是不能动的，所以其中包含了四根没有画出的杆，这时自由度的计算公式为

$$W=2\times6-8-4=0$$

结果也是一样的。

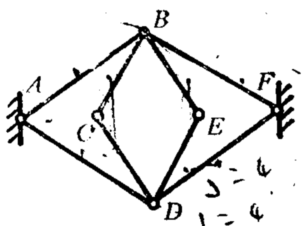


图 例题1-4

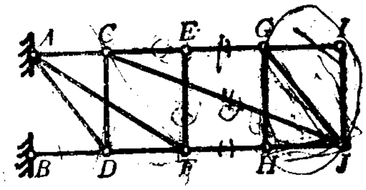


图 例题1-5

[例题 1-5] 试分析图示体系的几何组成。

[解] 1）从体系中找出基本的三角形，即$\triangle GIJ$。

2）在此三角形的基础上添加二元体G-H-J构成刚片$GHJI$。

3）从地基A、B上逐步添加二元体A-D-B、A-C-D、A-F-D和C-E-F构成刚片$AEFB$。

4）此两刚片用三根既不平行又不汇交的链杆EG、CJ和FH联结成几何不变又无多余联系的体系。

[例题 1-6] 试对图示体系进行几何组成分析。

[解] 1）$\triangle ACE$和$\triangle BDF$分别为刚片，这两刚片间用既不平行又不汇交于一点的三链杆AD、BC和EF联结，符合两片构造规律，所以体系内部是几何不变的。

2）体系的外部，即与地面的联结也符合两片构造规律，所以外部也是几何不变的。

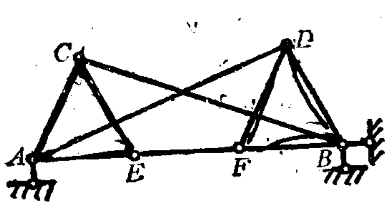


图 例题1-6

[例题 1-7] 试对图示体系进行机动分析。

[解] 计算自由度

$$W=2j-b-r$$
$$=2\times7-7-2=5$$

即体系有5个自由度，肯定是几何可变体系，不必再进行构造分析。

[讨论] 如果进行构造分析可以看出，添加五根链杆，例如添加EF、CD、HF、FD和DB，可使体系变成几何不变，而且添加方法还有很多种。

［例题 1-8］ 对图示体系进行几何组成分析

［解］ 1）由于结构与地面用三根不平行亦不汇交于一点的链杆联结，所以结构的外部是几何不变的。

2）采用拆除二元体的方法对结构内部进行分析。把体系从1-13-8-6从支座联系中取出，并依次拆除二元体9-8-7，7-6-5，9-7-5……最后剩下杆13-14和14-1，而这是几何可变的，所以原体系内部是几何可变的。

［讨论］ 如果计算体系的自由度则

$$W = 2j - b - r = 2\times 17 - 30 - 3 = 1$$

可见体系有一个自由度，肯定是几何可变的。还可以看出，只要在结构内部四个平行四边形中的任何一对角线上添加一根链杆便可使结构变成几何不变体系。由这例题还可以发现，有时候不必计算体系的自由度而直接从构造分析中发现多余的或欠缺的联系。

［例题 1-9］ 对图示结构进行几何组成分析

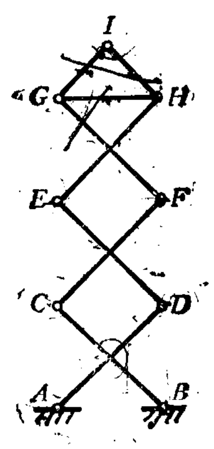


图 例题1-7

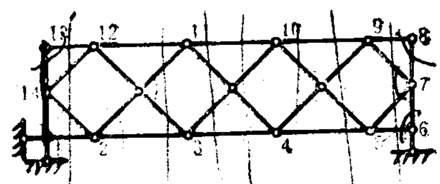


图 例题1-8

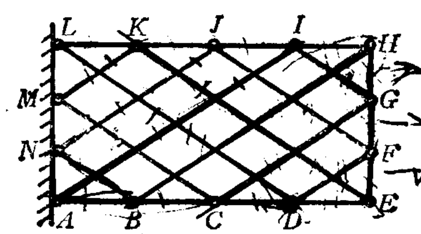


图 例题1-9

［解］ 1）从基础上开始，逐次增加二元体A-B-N、B-C-M和C-D-L。

2）逐次添加二元体L-K-M、K-J-N和J-I-A。

3）再逐次添加二元体I-H-B、D-E-K、I-G-C和D-F-J。

4）以上部分已经消除了所有结点的自由度构成几何不变体系。所以杆HG、GF和FE都是多余联系，整个体系是具有三个多余联系的几何不变体系。

［思考问题］ 什么情况下应采用拆除二元体的方法，什么情况下应采用添加二元体的方法进行分析？本题能否用“拆除”的方法，而［例题1-8］能否用“添加”的方法进行分析？

［例题 1-10］ 对图示体系进行几何组成分析。

［解］ 1）体系中$ADEG$和$DBHF$均为刚片。在刚片$ADEG$上逐步添加二元体E-I-G和I-C-D使刚片扩大为$ADCIE$。在刚片$DBHF$上添加二元体H-J-F，使扩大为$DBFJH$。

2）这两刚片用铰和链杆CJ联结符合二片构造规律，所以体系是几何不变又无多余联系的体系。

［例题 1-11］ 对图示结构进行机动分析。

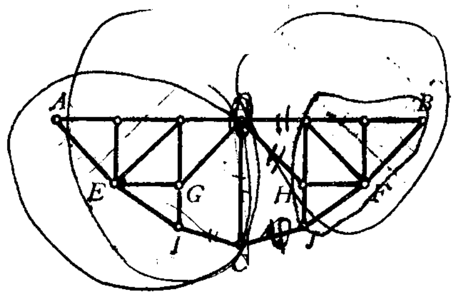


图　例题1-10

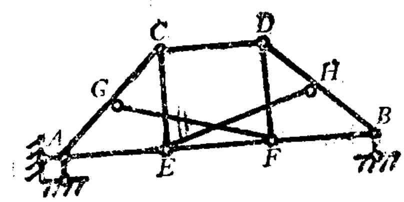


图　例题1-11

［解］　1）计算自由度。由于G铰并未将AC杆断开，所以在计算自由度时，AC杆应作为复杂链杆处理。AC杆联结了三个铰，故它相当于$2\times3-3=3$根简单链杆。同理，DB杆亦如此，结构中其余8根杆均为简单链杆，所以体系的自由度为：

$$W=2j-b-r=2\times8-(3+3+8)-3=-1$$

即体系有一个多余联系。

2）组成分析：结构中$\triangle ACE$和$\triangle BDF$分别构成二个几何不变的刚片，两者用4根既不平行又不汇交的铰杆联结，可以看出这四根链杆中可以任意去掉一根杆，二刚片的联结便符合二片构造规律，使结构成为几何不变且无多余联系的体系。

［例题 1-12］　对图示结构进行机动分析。

［解］　1）计算自由度，把AB、BC、CD视为刚片。B、C为联结刚片的铰。其余为支杆。所以

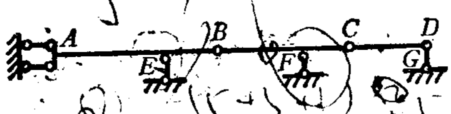


图　例题1-12

$$W=3m-2h-r=3\times3-2\times2-5=0$$

2）分析组成构造。AB杆用三根既不平行又不汇交的链杆与地面连接成几何不变整体，在AB杆的基础上用铰B和支杆F将BC杆联结成几何不变的整体。最后，CD杆用铰C和杆DG与这一几何不变的整体相联，所以整个结构是几何不变且无多余联系的体系。

［例题 1-13］　对图示体系进行机动分析。

［解］　1）计算体系的内部可变度

$$V=2j-b-3$$

其中　$j=20$

结构中除杆HL、JD、ID和GK为复杂链杆外其余均为简单链杆。每根复杂链杆联系4个铰，每根杆相当于$2\times4-3=5$根简单链杆。

所以，总共$b=4\times5+17=37$则

$$V=2\times20-37-3=0$$

2）分析结构的几何组成

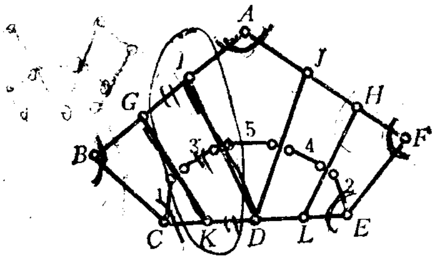


图　例题1-13

依次拆除单元体I-A-J、C-B-G、K-C-1、H-F-E和L-E-2。把杆GK和ID看成刚片，这两刚片由链杆GI、KD和3联结成几何不变部分，所以$GIDK$可视为刚片。同理，$JDLH$也是刚片。这两刚片用D铰和链杆5联结，符合两片构造规律。所以，整个体系是无多余联系的几何不变体系。

［例题 1-14］ 对图示体系进行几何组成分析。

［解］ $\triangle ACD$和$\triangle BKL$可看成刚片，梯形$FGHJ$也可看成刚片。此刚片分别用三根链杆DF、DI、EH和GK、IK、JM，与$\triangle ACD$和$\triangle BKL$联结，符合两片构造规则，所以结构内部是几何不变且无多余联系。

结构外部用两个固定铰与地基相联系，则有一个多余联系。

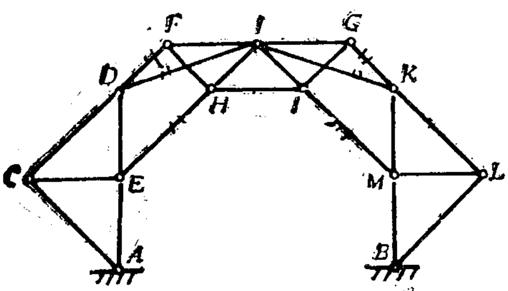


图 例题1-14

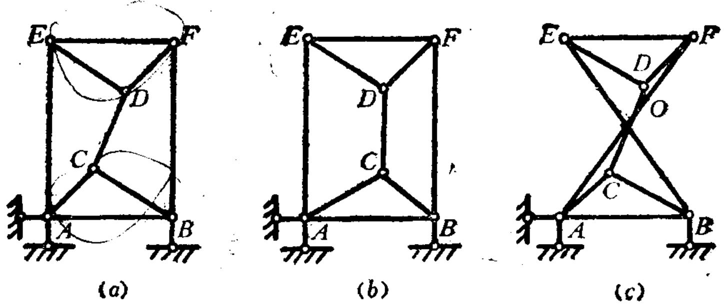


图 例题1-15

［例题 1-15］ 对图（a）所示体系进行几何组成分析。

［解］ 把$\triangle ABC$和$\triangle DEF$看作刚片。这两刚片用三根互不平行亦不汇交于一点的链杆AE、DC和FB联结，构成几何不变体系。而整个体系是无多余联系的几何不变体系。

若三链杆互相平行（图b）则体系为瞬变体系，$\triangle DEF$可以作一微小的水平移动。若三链杆汇交于一点（图c），则体系亦为瞬变体系，$\triangle DEF$可绕O点作一瞬时微小的转动。

［例题 1-16］ 对图示体系作几何组成分析。已知体系中杆DE、FG、AB互相平行。

［解］ 1）拆除二元体D-C-E

2）剩下部份中$\triangle ADF$与$\triangle BEG$是两刚片，这两刚片用互相平行的三根链杆联结，故构成瞬变体系。

［讨论］ 还可以用另外的观点分析此体系。如把$\triangle CDE$、$\triangle ADF$和$\triangle EGB$分别视为刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，而Ⅰ，Ⅱ之间用D铰联结，Ⅰ，Ⅲ之间用E铰联结，Ⅱ，Ⅲ之间用由FG和AB两根平行杆所决定的位于无穷远处的瞬铰相联结。这样，体系似乎符合三片构造的原则，但前面已经分析出体系是瞬变的。由此可以得出结论，三片构造中若构成瞬铰的两链杆互相平行且平行于另两铰之间的联线，则可将此三铰视为在一直线上，体系是瞬变的。

［例题 1-17］ 试对体系作几何组成分析。

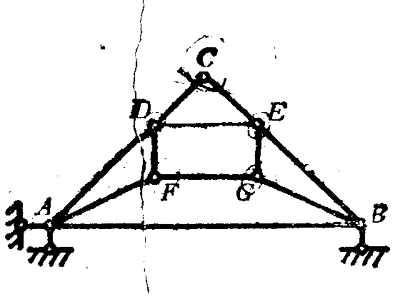


图 例题1-16

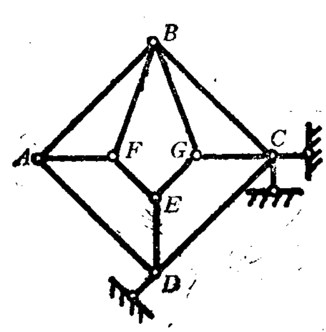


图 例题1-17