2000年考研

数学

应试指导

清华大学教授　李永乐　主编

北京邮电大学出版社

2000NIAN KAOYAN SHUXUE YINGSHI ZHIDAO

2000 年考研数学应试指导

主　编　李永乐

编　者　盛祥耀
胡金德
陈　魁

北京邮电大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

2000年考研数学应试指导/李永乐主编. －北京：北京邮电大学出版社，1999．6
ISBN 7－5635－0365－X

Ⅰ．20…　Ⅱ．李…　Ⅲ．高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第15527号

2000年考研数学应试指导

主　　编　　李永乐

责任编辑　　时友芬

*

北京邮电大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

河北省高碑店市印刷厂印刷

*

787×1 092毫米　16开本　27.625印张　687千字

1999年6月第一版　　1999年6月第一次印刷

印数：1—5000册

ISBN 7－5635－0365－X/O·25

定价：36.00元

前　　言

为了满足国家建设对高层次人才的需要，近年来硕士研究生的教育发展较快，报考研究生的人数逐年增长，这当然是好事，但不少考生的考试成绩并不理想，达不到考试大纲的要求，使有关单位不能在更大范围内挑选人才．如何保证硕士生入学质量，这是当前急需解决的问题．分析其原因，一个重要因素是考生不知道怎样有效地做准备，由于准备不得法，花了不少时间和精力，但收效甚微．有针对性地复习，提高素质是解决这一问题的关键：要针对考生的实际情况；要针对考试大纲及历届考题所反映的要求；要有硕士学习阶段所需要的数学能力．

考生的实际情况是：多数考生已经多年没有系统地接触在本科阶段所学过的数学，特别是考试大纲所规定的内容，不少基本思路、方法和公式遗忘了，准备考研的时间又不多；再有，对考研的要求理解不清，这样就不能有的放矢地进行复习。我们编写此书的目的，就是想解决这些问题，为此从以下几个方面来考虑：

1．为了在较短时间内捡回最基本的思路、方法和公式，我们安排了内容提要，其中特别设置了一些典型例子，以便帮助读者较快地掌握这些内容．

2．从对考试大纲和多年来考研题目的分析，发现在某些方面如综合性较强的题，证明题和应用题超过了本科的要求，而考生在这些方面过去接触少、练习少，为此我们安排了例题分析，从多个方面、多个角度和多个层次上让考生较系统地、较全面地、较好地解决这个问题，进入佳境，使大家方法多一些，分析问题能力强一些和思路开扩一些．

3．从多年来的考研辅导和对考生入学试卷阅卷的情况看，对有些常犯的错误，我们有意识地在有关章节安排了相应的题或在题目中设置了错误的做法，以提高考生的识别能力．

在此我们愿意提醒读者，有一本较好的考研辅导书固然重要，它能使你少走弯路，但最后的成功还得靠自己的努力．

参加本书编写的是清华大学应用数学系的部分教师，其中多数都是有多年参加考研辅导和参加研究生入学考试阅卷的经历，我们还愿意告诉大家，参加编写工作的还有曾多次担任硕士研究生入学考试数学命题组工作的成员，有曾多届担任“国家教委工科数学课程教学指导委员会”的副主任，这些教师的参加无疑使本书的编写质量更有保证．

由于我们水平有限，错误与不妥之处请指正．

编　者

1999 年 4 月于清华园

目　　录

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限和连续

内容提要

1．函数定义

设有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 所考虑范围内的每一个值，变量 y 都对应着一个确定的值，那么称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$ 或 $y=F(x)$，$y=g(x)$，等等．

2．函数的有界性定义

设存在正数 M，在 x 变化范围 I 内，都有 $|f(x)|\leqslant M$．称函数 $f(x)$ 在 I 内有界．

3．函数的单调性定义

设在区间 I 内的任意两个数 x_1，x_2．如果当 $x_1<x_2$（或 $x_1>x_2$）时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称 $f(x)$ 在 D 内是单调增加的（或单调减小的）．

4．函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 定义在对称于原点的区间 I 内，如果对于 I 内任意的 x，恒有 $f(x_1)=f(-x)$[或 $f(x)=-f(-x)$]，则称 $f(x)$ 在 I 内为偶函数（或奇函数）．

5．函数的周期性

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，如果存在正数 T，恒有 $f(x)=f(x+T)$，其中 x 为任意实数，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数．

6．极限定义

如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$．则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 a 为极限．记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$．

类似有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 的定义：如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，当 $|x|>N$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 a 为极限．

7．夹逼定理

设 $f(x)$，$g(x)$，$F(x)$ 在 x_0 的一个空心邻域内有定义 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant F(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a$$

8．单调有界数列必有极限

如果数列 u_n 单调增（或减）而有上界 M（或有下界 M）则数列 u_n 有极限，其极限不大过 M（或不小于 M）．

9．两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

10. 无穷小量的阶

设 α,β 均为无穷小,且不为 0. 如果

(1) $\lim = \frac{\alpha}{\beta} = a \neq 0$,则称 α 与 β 为同阶无穷小. 当 $a = 1$ 时,称 α 与 β 为等价无穷小,或称相当无穷小,记作 $\alpha \sim \beta$.

(2) 当 $\lim\frac{\alpha}{\beta} = 0$ 时,则称 α 是 β 的高阶无穷小或 β 是 α 的低阶无穷小,记作 $\alpha = 0(\beta)$.

11. 几个重要的等价无穷小

$$\sin x \sim x \quad (x\to 0), \qquad \tan x \sim x \quad (x\to 0)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \qquad (x\to 0)$$

$$\ln(1 + x) \sim x \quad (x\to 0) \qquad e^x - 1 \sim x \quad (x\to 0)$$

12. 等价无穷小代换定理

(1) 设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$. 如果 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'} = a$(或 ∞),则 $\lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim\frac{\alpha'}{\beta'} = a$(或 ∞).

(2) 设 $\alpha \sim \alpha'$,如果 $\lim\ \alpha' f(x) = a$(或 ∞),则 $\lim\ \alpha f(x) = \lim\ \alpha' f(x) = a$ (或 ∞) $\left(\text{或} \lim\frac{g(x)}{\alpha f(x)} = \lim\frac{g(x)}{\alpha' f(x)}\right)$,简单讲:在乘积因子中的等价无穷小量可以替换.

(3) 设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$,且 α 与 β 不是等价无穷小. 如果 $\lim\frac{\alpha' - \beta'}{r} = a$(或无穷),则

$$\lim\frac{\alpha - \beta}{r} = \lim\frac{\alpha' - \beta'}{r}$$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1 + 2x) - x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x - x} = 1$. 因为当 $x\to 0$ 时 $\ln(1 + 2x)$ 与 x 不是等价无穷小.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1$. 因为当 $x\to\infty$ 时, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$.

13. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续定义

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处的一个邻域内有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 设 $f(x)$ 在 x_0 处的一个邻域内有定义,记 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(1) 与 (2) 两个定义等价.

14. 间断点

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域有定义(x_0 也可以没有定义),如果 $f(x)$ 在 x_0 不连续,则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点.

如果 x_0 处是左右极限存在的间断点. 则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 否则称第二类间断点. 例如 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$,当 $x\to 0$ 时,左、右极限不存在,故 $x = 0$ 是 $\sin\frac{1}{x}$ 的第二类间断点. 又如 $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$. 左右极限

存在但不相等，故 $x=0$ 是 $\arctan\frac{1}{x}$ 的第一类间断点.

15. 最值存在定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上必存在最大值和最小值.

16. 中介值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，记 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，$m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，如果 $m\leqslant\mu\leqslant M$，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\mu$.

17. 罗必达法则

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 的一个邻域内（x_0 可除外）可微，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，$g'(x)\neq0$. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a$（或 ∞），则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

此法称为罗必达法则. 对于 $f(x)\to\infty$，$g(x)\to\infty$ 时，在相应条件下，上式仍成立. 即仍有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

对于 $x\to\infty$，也可使用 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

例 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$.

18. 泰勒公式

设 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有 $n+1$ 阶导数，则

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，其中 ξ 在 x_0 与 x 之间，称 n 阶泰勒公式.

例如　求 $f(x)=\ln x$ 在 $x_0=1$ 处的 n 阶泰勒公式.

$f(1)=0$，$f'(1)=(\ln x)'\Big|_{x=1}=\frac{1}{x}\Big|_{x=1}=1$，$f''(1)=\left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=1}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=1}=-1,\cdots,f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$，$f^{(n+1)}(\xi)=(-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}}$. 代入公式得

$$\begin{aligned}f(x)&=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots\\&\quad+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}\\&=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots\\&\quad+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\frac{(-1)^n}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}\end{aligned}$$

ξ 在 1 与 x 之间.

例题分析

1. 概念题与计算题

例 1.1 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1,\\ 0 & |x|>1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}4-x^2 & |x|\leqslant 2,\\ 2 & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$ 及 $\varphi[f(x)]$.

解 先求 $f[\varphi(x)]$ 的表示式,因为

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}1 & |\varphi(x)|\leqslant 1\\ 0 & |\varphi(x)|>1\end{cases}$$

下面找 x 的范围,使 $|\varphi(x)|\leqslant 1$ 及 $|\varphi(x)|>1$. 先解 $|\varphi(x)|\leqslant 1$,由 $\varphi(x)$ 的表达式知,在 $|x|\leqslant 2$ 上找使 $|4-x^2|\leqslant 1$ 的 x 值,即解不等式组

$$\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ |4-x^2|\leqslant 1\end{cases}$$

容易解得 x 的变化范围: $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 2$ 及 $-2\leqslant x\leqslant -\sqrt{3}$.

再解 $|\varphi(x)|>1$. 由 $\varphi(x)$ 的表达式知,当 $|x|>2$ 时, $\varphi(x)=2$, 又在 $|x|\leqslant 2$ 内也有使 $|\varphi(x)|>1$ 的 x 值 . 即解不等式组

$$\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ |4-x^2|>1\end{cases}$$

容易解得 x 的变化范围: $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$. 所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}1 & x\in[\sqrt{3},2]\cup[-2,-\sqrt{3}]\\ 0 & x\in(-\infty,-2)\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(2,+\infty)\end{cases}$$

同理可求得, $\varphi[f(x)]$ 的表达式

$$\varphi[f(x)]=\begin{cases}3 & |x|\leqslant 1\\ 4 & |x|>1\end{cases}$$

读者可以从例 1.1 的解法中体会出,对于求分段函数的复合函数表达式,实质上就是解不等式 .

例 1.2 设 $f(x)=e^x+2$, $f[\varphi(x)]=x^2$, 求 $\varphi(x)$.

解 因为 $f(x)=e^x+2$, 得 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi(x)}+2$. 又 $f[\varphi(x)]=x^2$, 所以有下列等式

$$e^{\varphi(x)}+2=x^2$$

得

$$\varphi(x)=\ln(x^2-2),\quad x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$$

例 1.3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}$.

解

$$n\sin\frac{\pi}{n+1} < \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$< n\sin\frac{\pi}{n}$$

[左边不等式是因为 $n+1 > \sqrt{n^2+i}(i = 1,2,\cdots,n)$] 又 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{\pi}{n+1} = \pi$(上式第一个等号是利用当 $x\to 0$ 时,$\sin x \sim x$),

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\pi}{n} = \pi$$

所以,有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}} = \pi$$

例 1.4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解 利用定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \overset{令\ \Delta x = \frac{1}{n}}{=\!=\!=\!=} \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\Delta x = \int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2$$

例 1.5 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) = 0$.

证 令 $x_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$, $y_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$, 则 $0 < x_n < y_n$, $0 < x_n^2 < x_n y_n = \frac{1}{2n+1}$, 显然, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$. 由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$. 从而得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

例 1.6 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0,\\ 1 & x = 0.\end{cases}$

证 令 $y_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$,设 $x\neq 0$,两边乘 $\sin\frac{x}{2^n}$,得

$$y_n\sin\frac{x}{2^n} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2^2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\sin\frac{x}{2^{n-2}} = \cdots = \frac{1}{2^n}\sin x$$

得

$$y_n = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

当 $x = 0$ 时，$\lim\limits_{n\to 0} y_n = 1$.

例 1.7 求 $\lim\limits_{n\to\infty} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

解 考虑到

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \int_0^1 (1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1})\mathrm{d}x$$

$$= \int_0 \frac{1 + x^n}{1 + x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1 + x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x}\mathrm{d}x = \ln 2 + \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x}\mathrm{d}x$$

因为 $x \in [0,1]$，则

$$\frac{1}{2}x^n \leqslant \frac{x^n}{1 + x} \leqslant x^n$$

易得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{2}x^n\mathrm{d}x = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = 0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x}\mathrm{d}x = 0$. 从而求得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) = \ln 2$$

从例 1.8 开始到例 1.18 是求极限问题，其方法不外乎：消去“零因子”；有理化；无穷小乘有界函数；利用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$；等价无穷小代换；罗必达法则；泰勒公式；利用定积分；等等．特别要提醒读者注意，罗必达法则不是万能的，求极限要做得简捷有效，应综合起来考虑．

例 1.8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x - \sin x}$.

解 是“$\frac{0}{0}$”型．可用罗必达法则．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

注意 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. 因而式中的 $\sin x$，$\tan x$ 不能用 x 代替.

例 1.9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$.

解 是“$\infty - \infty$”型，将它化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型后，才可用罗必达法则．

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x} = 0$$

将分母中 $\sin x$ 用 x 代替后用罗必达就显得方便了.

例 1.10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos\alpha x\cos\beta x}{x^2}$.

解 利用等价无穷小 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 (x\to 0)$ 是不行的．因为分子是 $1 - \cos\alpha x\cos\beta x$，

而不是 $1 - \cos\cos\beta x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\alpha x\cos\beta x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\alpha x+\cos\alpha x(1-\cos\beta x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x(1-\cos\beta x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\alpha^2x^2}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x\left(\frac{1}{2}\beta^2x^2\right)}{x^2} = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

在使用等价无穷小替代时应假定 $\beta \neq 0, \alpha \neq 0$,否则不能替代(想想为什么),所以计算过程中要设 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$,但当 $\alpha = 0, \beta = 0$ 时,结论仍成立.

例 1.11 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

解 是"$\infty\cdot 0$"未定型,正规思路是把它化为"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$",再用罗必达法则,显然化为除式后再用罗必达法则较为繁锁,可把题转化一下形式.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}[\ln 2^x+\ln(1+2^{-x})]\frac{3}{x} = 3\lim\frac{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})}{x}$$

$$= 3\ln 2 + 3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2^{-x})}{x} = 3\ln 2 + 3\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{-x}}{x}$$

$$= 3\ln 2$$

乘积因子 $\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$ 可用其等价无穷小 $\frac{3}{x}$ 代替($x\to\infty$).

例 1.12 求 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{e^{x^2}-1}$.

解 是"$\frac{0}{0}$"型,直接用罗必达法则不简捷.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan a+\tan x}{1-\tan a\tan x}\cdot\frac{\tan a-\tan x}{1+\tan a\tan x}-\tan^2 a}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 a-\tan^2 x-\tan^2 a(1-\tan^2 a\tan^2 x)}{x^2(1-\tan^2 a\tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x(\tan^4 a-1)}{x^2(1-\tan^2 a\tan^2 x)} \overset{*}{=} (\tan^4 a-1)\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2} = \tan^4 a-1$$

* 步:乘积因子中(不管在分子或分母)极限存在而不为 0 的因子可以先求出来.式中 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\tan^2 a\tan^2 x) = 1 \neq 0$,所以可以先求出.

例 1.13 求 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$.

解 是"1^∞"型.将它化为"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$",$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x} = \lim\limits_{x\to 1}e^{\tan\frac{\pi}{2}x\ln(2-x)}$ (此处是利用 $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\ln a}$),只要计算下式

$$\lim_{x\to1}\tan\frac{\pi}{2}x\ln(2-x)=\lim_{x\to1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x\ln(2-x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{-1}{2-x}}{\frac{-\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}$$

所以

$$\lim_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=e^{\frac{2}{\pi}}$$

例 1.14 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x-x\ln2}{3^x-x\ln3}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 是“1^∞”型.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x-x\ln2}{3^x-x\ln3}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln\frac{2^x-x\ln2}{3^x-x\ln3}}{x^2}}$$

计算下式

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{2^x-x\ln2}{3^x-x\ln3}}{x^2}$$

此式用罗必达法则是比较繁的,而利用 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0)$ 就会方便些.

$$\lim\frac{\ln\frac{2^x-x\ln2}{3^x-x\ln3}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{2^x-3^x-x\ln\frac{2}{3}}{3^x-x\ln3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-3^x-x\ln\frac{2}{3}}{x^2(3^x-x\ln3)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2^x-3^x-x\ln\frac{2}{3}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2^x\ln2-3^x\ln3-\ln\frac{2}{3}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2^x\ln^22-3^x\ln^23}{2}=\frac{1}{2}(\ln^22-\ln^23)$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x-x\ln2}{3^x-x\ln3}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}(\ln^22-\ln^23)}$$

例 1.15 问 m 等于什么时,$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^c+7x^4+2)^m-x]$ 存在,其中 c 是大于 4 的正整数,并求此极限.

解 粗看一下似乎无从下手,首先把它写成除式,然后再分析.

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^c+7x^4+2)^m-x]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{(x^c+7x^4+2)^m}{x}-1\right]$$

此极限存在(已知).乘积因子有 x,而 $x\to+\infty$,从而知方括号内$\left[\frac{(x^c+7x^4+2)^m}{x}-1\right]$趋向于 0,否则原式极限不存在(研究一下为什么).即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^c+7x^4+2)^m}{x}=1$$

即
$$\lim_{x\to+\infty}(x^{c-\frac{1}{m}}+7x^{4-\frac{1}{m}}+2x^{-\frac{1}{m}})^m=1$$

仅当且当 $c-\frac{1}{m}=0$,即 $c=\frac{1}{m}$ 时$\left[\text{此刻 } 4-\frac{1}{m}<0\left(\text{因 } c>4,\text{即}\frac{1}{m}>4\right),-\frac{1}{m}<0\right]$,上

式成立，所以 $m=\frac{1}{c}$. 代入原式，得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}[(x^c+7x^4+2)^{\frac{1}{c}}-x]\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(7x^{4-c}+2x^{-c}+1)^{\frac{1}{c}}-1}{\frac{1}{x}}\qquad(c>4)\end{aligned}$$

这是"$\frac{0}{0}$"型．用罗必达法则

$$\begin{aligned}上式&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{c}(7x^{4-c}+2x^{-c}+1)^{\frac{1}{c}-1}[7(4-c)x^{3-c}-2cx^{-c-1}]}{-x^{-2}}\\&=\frac{-1}{c}\lim_{x\to+\infty}[7(4-c)x^{5-c}-2cx^{1-c}]\end{aligned}$$

当 $c=5$ 时

$$\lim_{x\to-\infty}[(x^c+7x^4+2)^{\frac{1}{c}}-x]=\frac{-7}{c}(4-c)=\frac{7}{5}$$

当 $c>5$ 时

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^c+7x^4+2)^{\frac{1}{c}}-x]=0$$

注意　(1) 设 $\lim f(x)\cdot g(x)$ 存在，如果 $f(x)\to0$，则 $g(x)\to\infty$；反之，$g(x)\to\infty$，则 $f(x)\to0$.

(2) 设 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，如果 $f(x)\to0$(或 $g(x)\to0$)，则 $g(x)\to0$(或 $f(x)\to0$)；如果 $f(x)\to\infty$(或 $g(x)\to\infty$)，则 $g(x)\to\infty$(或 $f(x)\to\infty$).

例 1.16　求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(e^{t^3}-1)dt}{x^4}$.

解　根据定理：如果 $f(x)$ 连续，则 $\left(\int_0^x f(t)dt\right)'_x=f(x)$. 又因它是"$\frac{0}{0}$"型，用罗必达法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(e^{t^3}-1)dt}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{4x^3}=\frac{1}{4}(利用当\ x\to0\ 时，e^x-1\sim x)$$

例 1.17　讨论 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^{ky^2x^2}}{\int_a^b e^{ky^2t^2}dt}$　$(k>0,b>0,x>0,a<b)$.

分析　应首先了解哪个量是变量，哪个量是常量．当 $y\to+\infty$ 过程中 y 是变量，而分子中的 k 与 x 均为常数．又分母中的积分号内，t 是积分变量，积分后就无 t 了．其结果应与 k，x 有关，另外需把积分中的 y 变换到积分号外，才有可能求解．

解　积分中含有 y^2，应先把它变换出来，为此，在积分中令 $ty=u$，$ydt=du$，

t	a	b
u	ay	by

,则

$$\int_a^b e^{ky^2t^2}\mathrm{d}t = \int_{ay}^{by} e^{ku^2}\frac{1}{y}\mathrm{d}u = \frac{1}{y}\left(\int_0^{by} e^{ku^2}\mathrm{d}u - \int_0^{ay} e^{ku^2}\mathrm{d}u\right)$$

那么

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{ky^2x^2}}{\int_a^b e^{ky^2t^2}\mathrm{d}t} = \lim_{y\to+\infty}\frac{ye^{ky^2x^2}}{\int_0^{by} e^{ku^2}\mathrm{d}u - \int_0^{ay} e^{ku^2}\mathrm{d}u} = \lim_{y\to+\infty}\frac{(1+2ky^2x^2)e^{ky^2x^2}}{be^{kb^2y^2} - ae^{ka^2y^2}}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{(1+2ky^2x^2)e^{-k^2y^2(b^2-x^2)}}{b\left(1-\dfrac{a}{b}e^{-ky^2(b^2-a^2)}\right)}$$

当 $x < b$ 时,$(1+2ky^2x^2)e^{-k^2y^2(b^2-x^2)}\to 0, e^{-ky^2(b^2-x^2)}\to 0$,所以

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{ky^2x^2}}{\int_a^b e^{ky^2t^2}\mathrm{d}t} = 0$$

当 $x = b$ 时,则

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{ky^2x^2}}{\int_a^b e^{ky^2t^2}\mathrm{d}t} = \infty$$

例 1.18 在半径为 r 的圆周上一点 O 处引切线,其上截取线段 ON,其长等于弧长 OM,直线 MN 与直径 OP 之延长线交于 B 点 . P 为圆心 . 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0} PB$. α 是 PM 与 PO 的夹角 .

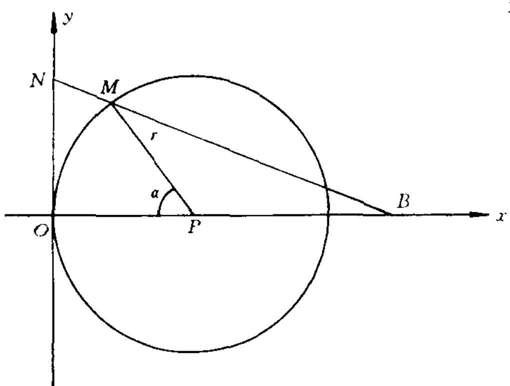

图 1.1

分析 建立坐标系如图 1.1. 建立点 B 的坐标与 α 的关系就能求出其极限 .

解 弧长 $OM = r\alpha$,所以点 N 与 M 的坐标为 $N(0, r\alpha)$, $M(r - r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. 从而得直线 NM 的方程

$$y - r\alpha = \frac{r\sin\alpha - r\alpha}{r - r\cos\alpha}x$$

令 $y = 0$,得 B 的横坐标 $x = \dfrac{r\alpha(1-\cos\alpha)}{\alpha - \sin\alpha}$ $PB = \dfrac{r\alpha(1-\cos\alpha)}{\alpha - \sin\alpha} - r$.

$$\lim_{\alpha\to 0} PB = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{r\alpha(1-\cos\alpha)}{\alpha-\sin\alpha} - r\right] = \lim_{\alpha\to 0}\frac{r\alpha(1-\cos\alpha)}{\alpha-\sin\alpha} - r$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{r\alpha\,\frac{1}{2}\alpha^2}{\alpha - \sin\alpha} - r = \lim_{\alpha\to 0}\frac{r\,\frac{3}{2}\alpha^2}{1-\cos\alpha} - r = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{3}{2}r\alpha^2}{\frac{1}{2}\alpha^2} - r = 2r$$

2．证明题与杂题

例 1.19 设 $\varphi(x),g(x),f(x)$ 均为增函数，且满足 $\varphi(x)\leqslant g(x)\leqslant f(x)$，证明 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant f[f(x)]$．

证 将 x 换为 $\varphi(x)$，由 $\varphi(x)\leqslant g(x)$ 得 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant g[\varphi(x)]$．又因 $g(x)$ 是增函数及 $\varphi(x)\leqslant g(x)$，有 $g[\varphi(x)]\leqslant g[g(x)]$．因而有

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant g[g(x)]$$

同理可得

$$g[g(x)]\leqslant f[f(x)]$$

于是证得

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant f[f(x)]$$

例 1.20 设曲线 $y=f(x)$ 对称于直线 $x=a$ 和 $x=b(b>a)$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，证明函数 $y=f(x)$ 是周期函数，并求出其周期．

分析一下题目的几何意义．设 $x=a$ 与 $x=b$ 之间的图形如图 1.2 所示，因其对称于 $x=a$ 及 $x=b$．可以看出 $x\in[c,b]$ 上的图形会重复出现，从而知是周期函数，且其周期为 $2(b-a)$．

证 关于 $x=a$ 及 $x=b$ 对称可表示为 $f(x)=f(2a-x)$ 及 $f(x)=f(2b-x)$．于是

$$f(x+2b-2a)=f[2b-(2a-x)]=f(2a-x)=f(x)$$

即 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数．

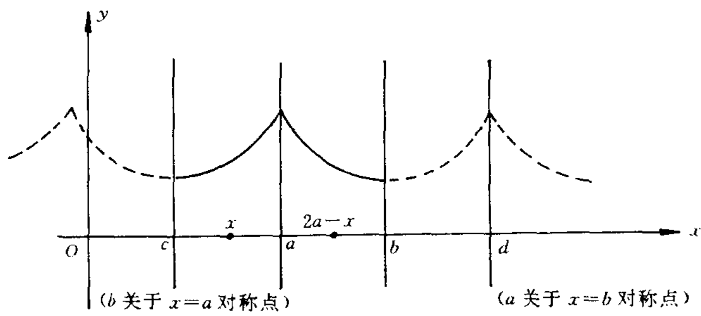

图 1.2

例 1.21 证明函数 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数．

证 用反证法，设 $f(x)=x\cos x$ 是以 T 为周期的周期函数，那么对于任意 x 恒有

$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$ 即

$$\left(\frac{\pi}{2}+T\right)\sin T=0\quad 得\ \sin T=0\tag{1}$$

再令 $x=0$，得

$$T\cos T=0$$

即

$$\cos T=0\tag{2}$$

比较(1)式与(2)式，两式矛盾，所以 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数．

例 1.22 设数列 $x_1=1,x_n=\dfrac{x_{n-1}+3}{x_{n-1}+1}(n=2,3,\cdots)$，证明数列 x_n 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

解 思路：先假设数列 x_n 收敛，由此求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，然后再证明数列收敛．

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，在 $x_n = \dfrac{x_{n-1}+3}{x_{n-1}+1}$ 的两边求极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}+3}{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}+1}$$

得

$$a = \frac{a+3}{a+1} \Leftrightarrow a^2 = 3$$

由于 $a \geqslant 0$，得 $a = \sqrt{3}$.

下面证数列收敛于$\sqrt{3}$.

$$\left| x_n - \sqrt{3} \right| = \left| \frac{x_{n-1}+3}{x_{n-1}+1} - \sqrt{3} \right| = \left|\sqrt{3}-1\right| \left| x_{n-1} - \sqrt{3} \right|$$
$$= (\sqrt{3}-1)^2 \left| x_{n-1} - \sqrt{3} \right| = \cdots = (\sqrt{3}-1)^n$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{3}-1)^n = 0$，知数列 x_n 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

例 1.23 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\cdots\sin\sin}_{n个} x = 0$.

证 设 $a_n = \underbrace{\sin\sin\cdots\sin\sin}_{n个} x$，那么数列 a_n 可以认为是由下列式子递归而得，即

$$\begin{cases} a_n = \sin a_{n-1} \quad (n = 2,3,\cdots) \\ a_1 = \sin x \end{cases}$$

因为函数$\sin x$ 是以 2π 为周期的奇函数，因而只需证 $x \in [0,\pi]$ 就可以了(读者可以考虑一下为什么).

当 $x = 0$ 或 π 时，对应的$\sin x = 0$，从而知道 $a_n = 0 (n = 2,3,\cdots)$. 显然数列 a_n 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

当 $x \in (0,\pi)$ 时，$\sin x > 0$，由于当 $x > 0$ 时 $\sin x < x$. 所以

$$a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1} = \sin a_{n-2} < a_{n-2} < \cdots < \sin x < x$$

即数列 a_n 递减且有下界($a_n > 0$)，从而知数列 a_n 有极限，记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对 $a_n = \sin a_{n-1}$ 两边取极限，考虑到$\sin x$ 的连续性，得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin a_{n-1} = \sin \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$$

得

$$a = \sin a$$

即 a 是方程 $x = \sin x$ 的根，容易知道该方程有根且仅有一个根 $x = 0$. 由此得到

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\cdots\sin\sin}_{n个} x = 0$$

例 1.24 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\cos\cos\cos\cdots\cos\cos}_{n个} x$ 存在，其极限是方程 $x = \cos x$ 的根．

分析 设 $a_n = \underbrace{\cos\cos\cdots\cos\cos}_{n个} x$，那么数列 a_n 可以认为是由下列式子所定义

$$\begin{cases} a_n = \cos a_{n-1} \quad (n = 2,3,\cdots) \\ a_1 = \cos x \end{cases}$$