

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书系统地总结了近年来国内外利用概率论、排队论和计算机模拟方法研究编组站各作业系统的最优设计和最优作业组织的成果。主要内容包括编组站排队模型及排队系统指标,车站技术作业过程的计算机模拟,编组站到解系统、编组系统及出发系统的优化,车辆停留时间标准的确定等。

本书可作为运输管理工程专业研究生和大学本科高年级学生教学用书,也可供铁路运输技术管理人员和站场设计人员参考。

高等学校教学参考书

编组站作业仿真及系统优化

北方交通大学 郑时德 杨肇夏 编著

*

中国铁道出版社出版发行

(北京市东单三条 14 号)

责任编辑 李丽娟 封面设计 陈东山

河北省遵化市胶印厂印

开本:850×1168 毫米 1/32 印张:4.75 字数:125 千

1996 年 5 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数:1—1000 册

ISBN 7-113-02252-9/U · 641 定价:7.50 元

前 言

排队论和计算机模拟方法近年来在解决生产和设计的许多问题上都发挥着非常重要的作用。而编组站各技术作业系统对车辆进行改编作业的过程,也具有一般排队系统的共同特征,因此研究利用排队论的基本原理来解决编组站最优设计(设备数量和规模、能力大小、合理负荷等)和最优作业组织方式是非常必要的。但是编组站又是一个复杂的串联排队系统,在某些情况下,有时不能利用排队论的数学模型解决问题,而要借助于计算机模拟方法。从20世纪60年代以来,国内外学者就致力于把上述两种数学方法引入铁路运输领域,研究成果累累,理论逐渐成熟。因此本书试图按车辆在站改编过程,系统介绍国内外利用排队理论和计算机模拟解决编组站作业系统优化的研究成果(其中§2.3、§2.4和§4.3系作者在“高等学校博士学科点专项科研基金资助项目”中的部分研究成果),并对它们在理论和实际应用上进行必要的分析,以期读者对排队论和计算机模拟的基本原理,以及它们在编组站工作和设计中的应用与存在问题有一个全面和系统的理解。

本书可作为运输管理工程专业研究生和大学本科高年级学生教学用书,也可供铁路运输技术管理干部和站场设计人员参考。书中内容力求深入浅出,文字力求通俗易懂,并尽量结合实际举了一些实例。我们希望通过这些努力能对读者在学习、理解和掌握书中的理论和方法上有所裨益。

本书由北方交通大学郑时德、杨肇夏编写,具体分工是:郑时德编写第一、三、四、五章,杨肇夏编写第二章。全书由西南交通大学高家驹教授主审,孔庆铃教授、吴家豪研究员和刘其斌教授也对本书提出了许多宝贵意见,在此特表谢意。

目 录

第一章 编组站排队模型及排队系统指标	1
§ 1.1 编组站技术作业系统的特征	1
§ 1.2 输入流及服务过程的特征	5
§ 1.3 输入流及服务过程的数据整理及分析	16
§ 1.4 $M/M/1$ 排队系统指标的计算	21
§ 1.5 其他排队系统指标	26
第二章 车站技术作业过程的计算机模拟	33
§ 2.1 计算机模拟概述	33
§ 2.2 随机变量的生成	48
§ 2.3 建立编组站模拟模型的基础工作	62
§ 2.4 编组站模拟模型的结构与主要内容	73
第三章 编组站到一解系统的优化	85
§ 3.1 二级串联系统的处理	85
§ 3.2 列检作业组织的优化	90
§ 3.3 驼峰解体能力与驼峰需要能力	94
§ 3.4 到达场到发线需要量及其通过能力	101
§ 3.5 到一解系统的综合优化	115
第四章 编组站编一发系统的优化	117
§ 4.1 列车集结过程和编组过程的规律	117
§ 4.2 调车场尾部编组机车台数及编组能力	120
§ 4.3 驼峰解体工作与调车场尾部编组工作的协调	124
§ 4.4 调车场线路需要量及线路固定使用方法	128
§ 4.5 出发系统作业的特点	134
§ 4.6 出发场线路数及其通过能力	135
§ 4.7 编一发系统的综合优化	139

第五章 车辆停留时间标准及缩短停留时间的措施	142
§ 5.1 车辆停留时间标准的确定	142
§ 5.2 缩短车辆停留时间的措施	144
参考文献	146

第一章 编组站排队模型及排队系统指标

§ 1.1 编组站技术作业系统的特征

编组站技术作业系统是一个复杂的串联排队系统。排队系统一般由“顾客”(输入流)和“服务员”(服务机构)组成。为了获得某种服务而到达的“顾客”,在不能立即获得服务时(“服务员”未空闲),就须排队等待(允许排队等待时),“顾客”获得服务之后即离开系统,因此一个简单的排队系统,可用图 1-1、图 1-2、图 1-3 表示。

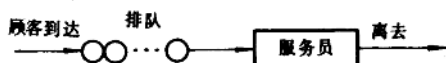


图 1-1 单服务员排队系统图

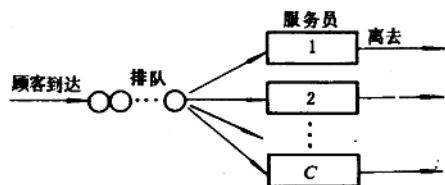


图 1-2 C 个服务员排成一队的排队系统(多服务员系统)图

在各种排队系统中,“顾客”相继到达的间隔时间与为顾客服务的时间往往是随机的,因此,随机性是排队系统的一个共性。正因为如此,排队系统有时又称为随机服务系统,而且任何一个排队系统都可用下列三个要素来反映其特征:

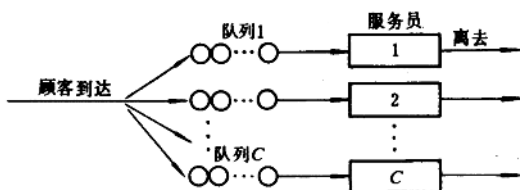


图 1-3 C 个服务员排成 C 队的排队系统(单服务员系统)图

1. 输入过程 反映“顾客”按怎样的规律到达系统，即“顾客”的总体是有限的还是无限的，“顾客”是以单个形式到达还是以成批形式到达，“顾客”相继到达间隔时间是服从什么样的概率分布。

2. 排队规则 反映“顾客”接受服务的制度和次序。当“服务员”没有空闲时，到达的“顾客”即离去或排队等待，前者即为损失制，后者即为等待制。“顾客”排队等待服务还可以分为先到先服务，后到先服务，随机服务，优先权服务等等。在多服务员的情况下，“顾客”可能要排成一个队列等待服务，或者在每个“服务员”前分别排成一队等待服务。

3. 服务机构 反映有多少“服务员”可以同时向“顾客”提供服务，对“顾客”采取什么样方式的服务(单个服务还是成批服务)和服务时间服从什么样的分布规律。

编组站各作业系统具有一般排队系统的特征。从总体上看，它的“顾客”(即列车)是无限的，并且是以单个形式到达的等待制的排队系统。按照车辆在编组站的技术作业过程，编组站作业系统可以分为到达作业子系统、解体子系统、编组子系统、出发作业子系统和发车子系统。这些子系统是相互联系并串联在一起的。前一子系统的输出流就是后一子系统的输入流，因此前一子系统的工作状况会影响后一子系统的工作条件，而后一子系统的工作状况，在一定条件下也会影响前一子系统的工作状态。编组站排

队系统可用图 1-4 表示(该图驼峰工作组织采用顺序溜放,编组机车不固定区域作业)。

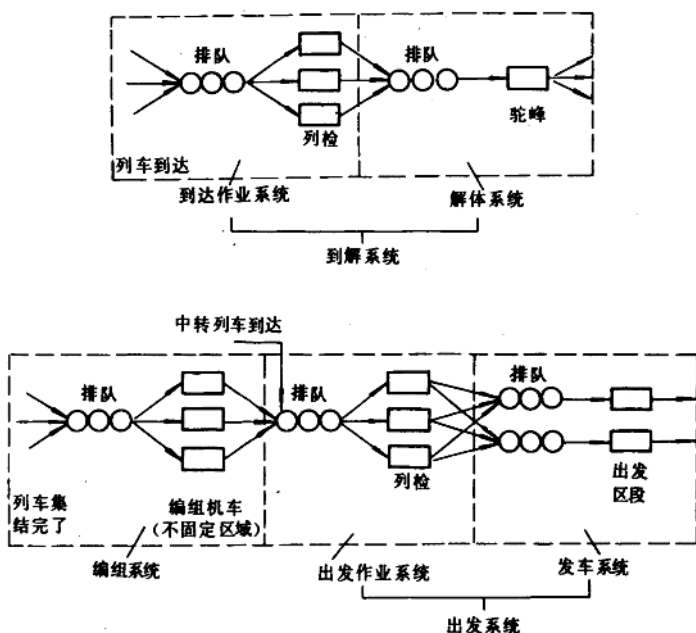


图 1-4 编组站排队系统图

由上图可见,编组站到达作业子系统,其输入流为各方向接入到达场解体的列车,服务机构为办理到达作业的各种作业人员。由于到达作业时间决定于列检组办理车列技术检修时间,因此到达作业子系统的服务机构可以用列检组来表示(出发作业子系统亦同)。根据列检组的数量,到达作业子系统可能是单通道(单服务员)或多通道(多服务员)系统。

根据车列在服务机构——驼峰上实行顺序溜放或平行溜放,解体子系统可分为排成一队的单服务员系统和排成两队的单服务

员系统,而该子系统的输入流则为技术检修完毕的车列(到达作业子系统的输出流)。

在调车场集结成列的车列为编组子系统的输入流,服务机构为担任编组工作的调车机车。按照调车机车分工的办法,编组子系统也可能分为几个单服务员系统(调车机车固定区域作业时)和不能完全自由出入的多服务员系统(调车机车不固定区域作业时)。

编组完了转入出发场的车列(编组子系统的输出流)以及到达的中转列车(直通场与出发场设在一处时),组成了出发作业子系统的输入流,列检组是这个子系统的服务机构。按照列检组的数量,出发作业子系统可能是单服务员系统,也可能是多服务员系统。

根据连接出发场的区段数,发车子系统可能是排成一队或是排成几队的单服务员系统,它们的输入流分别是发往各自区段技术检修完了的车列。从发车子系统所处的位置来看,它是车站车流改编作业过程的最后一个环节,起着联系车站和区段的作用,它的工作状况不仅决定于车站站内作业过程的节奏性,同时也决定于车站所连接区段的工作条件。

由于编组站每一个作业子系统都是随机服务系统,因此可以利用排队理论来确定车站各作业系统的最优设计(设备数量、能力大小、合理负荷)、最优作业组织方法(列检组的合理组织、调车机车的合理分工等)和车辆在站停留时间标准等。但是,由于车站各个子系统又是相互联系的,排队空间也是有限的,在某些情况下(如出发场线路不足,可能会影响列车的正常编组作业,从而影响车辆在调车场的停留时间,甚至影响驼峰正常的解体作业),有时不可能利用现有的排队理论来解决问题,因此,通常还要采用统计模拟方法。这个数学方法借助于电子计算机可以模拟任何随机过程,并可得到各种模拟结果。这些结果可以直接加以利用,也可以通过回归分析建立经验公式,以便在解决类似问题时更广泛地采用。

无论是用排队论方法或用统计模拟方法来解决编组站各作业系统的优化设计和优化作业组织方案，都要分析输入流和服务时间的分布律，以便确定各个子系统可能采用的排队模型、模拟模型或在模拟时随机形成输入流到达时间和服务机构的作业时间。

§ 1.2 输入流及服务过程的特征

在铁路日常运输工作中，由于车流的经常变化和列车运行的不平衡性，每日在编组站到发的列车车次、各次列车到达时刻、车列集结完了时刻等形成了一定的随机性。同时，由于每一列车编成车数、车辆技术状态和编组要求等不尽相同，列车的到、发作业，解体和编组作业等时间，每列也不完全相同，它们也都带有一定的随机性。因此，输入流的到达间隔（列车到达间隔、车列集结完了间隔等）和服务时间（到、发作业，解体作业，编组作业和出发间隔等）都可以认为是随机变量，它们在一定的具体条件下都将符合一定的分布规律。

编组站输入流间隔和各种服务时间通常符合负指数分布、爱尔兰分布、二阶混合爱尔兰分布、伽马分布、组合爱尔兰分布、超指数分布或正态分布，特殊情况下也可能符合其他分布律。

一、负指数分布

具有 4~5 个以上方向到达的合并流，其间隔时间一般都具有负指数分布的特征^[11]。负指数分布的分布密度为

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0) \quad (1-1)$$

分布函数为

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0) \quad (1-2)$$

式中 λ ——参数，表示输入（或服务）平均强度，即单位时间到达（或作业）的列车数；

t ——随机变量，即到达间隔或服务时间。

分布密度和分布函数的图形如图 1-5 和图 1-6 所示。

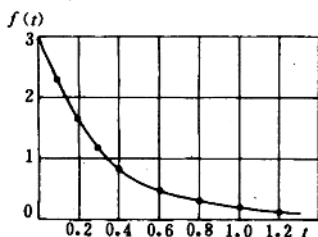


图 1-5 负指数分布密度图

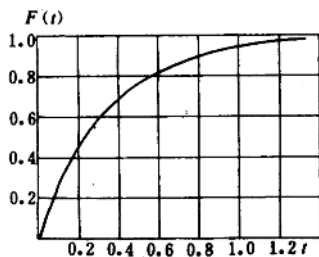


图 1-6 负指数分布函数图

负指数分布的随机变量 t 的均值 $\bar{t}$ 和均方差 σ 分别为

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda} \quad (1-3)$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \quad (1-4)$$

变异系数(表示均方差与均值偏离程度) 为

$$v = \frac{\sigma}{\bar{t}} \quad (1-5)$$

从概率理论可知,若间隔时间 t 服从参数为 λ 的负指数分布,则在 t 时间段内出现“顾客”数为 n 的概率服从参数为 λ 的普阿松分布,即

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1-6)$$

式中 $P_n(t)$ ——在 t 时间段内出现 n 个顾客的概率。

负指数分布是最简单的分布。由于它的无后效性,所以很容易确定排队系统的各项指标。此外,利用负指数分布可以构成符合不同变异系数的分布。在铁路运输工作中,许多情况都是符合负指数分布的,例如,衔接方向较多的编组站,其列车到达间隔基本接近于负指数分布,列车集结完了间隔也基本符合负指数分布。

二、爱尔兰分布

根据概率论原理, K 阶爱尔兰分布是 K 个独立的服从参数为 λ' 的负指数分布的随机变量和的分布。图 1-7 的 M 轴表示间隔时间服从参数为 λ' 的负指数分布的输入流。 E 轴则表示间隔时间服从阶数 $K=2$ 及参数为

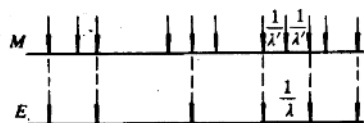


图 1-7 爱尔兰流的形成示意图

λ 的爱尔兰分布的输入流, 它的每一间隔时间由负指数分布的两个间隔时间所组成。爱尔兰流的间隔均值等于 $\frac{1}{\lambda}$, 而负指数流的间隔均值等于 $\frac{1}{\lambda'}$ 。

对于 K 阶爱尔兰流, 其分布密度为

$$f(t) = \frac{\lambda' (\lambda' t)^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\lambda' t} \quad (t \geq 0, K=1, 2, \dots) \quad (1-7)$$

由于

$$\lambda' = K\lambda$$

于是

$$f(t) = \frac{K\lambda (K\lambda t)^{K-1}}{(K-1)!} e^{-K\lambda t} \quad (t \geq 0, K=1, 2, \dots) \quad (1-8)$$

公式(1-8)称为 K 阶标准爱尔兰分布, 于是标准爱尔兰分布的数字特征为

随机变量 t 的均值

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda} \quad (1-9)$$

均方差

$$\sigma = \frac{1}{\lambda \sqrt{K}} \quad (1-10)$$

变异系数

$$\nu = \frac{\sigma}{\bar{t}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \quad (1-11)$$

众数 M_0 (即具有最大分布密度值的 t)

$$M_0 = \frac{K-1}{K\lambda} \quad (1-12)$$

由公式(1-11)可知, K 与 ν 的关系为

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	∞
ν	1	0.71	0.58	0.5	0.45	0.41	0.38	0.35	0.33	...	0

由此可见, 当 $K=1$ 时, 爱尔兰分布就是变异系数等于 1 的负指数分布, 随着 K 的增大, 流也渐趋均衡, 而当 $K=\infty$ 时, 爱尔兰流则成为变异系数等于零的定长流。

图 1-8 列举了 $\lambda=4$ 的不同阶数的标准爱尔兰分布密度曲线。由图可见, 随着 K 的增大, 流的不均衡程度逐渐降低, 众数也将从零逐渐趋近于均值。

例如, 当

$K=1$ 时, $M_0=0$

$K=2$ 时, $M_0=0.125$

...

$K=25$ 时, $M_0=0.24$

...

$K=\infty$ 时, $M_0=\bar{t}=0.25$

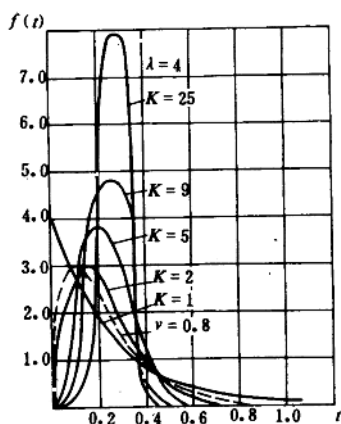


图 1-8 不同阶数 K 的标准爱尔兰分布密度曲线图

利用爱尔兰分布来表示流的规律, 参数 K 只限于正

整数 ($K=1, 2, 3, \dots$), 即相应的变异系数只限于 $1, 0.71, 0.58, \dots$ 。当我们采集的样本资料, 其变异系数在 $(1, 0.71)$ 、 $(0.71, 0.58)$ 、 $\dots$ 区间内时, 通常不能用爱尔兰分布来拟合, 这时可以采

用伽马(γ)分布, 其分布密度为

$$f(t) = \frac{K\lambda(K\lambda t)^{K-1}}{\Gamma(K)} e^{-K\lambda t} \quad (t \geq 0) \quad (1-13)$$

式中 K ——任意正数, 即 $K > 0$;

$\Gamma(K)$ —— Γ 函数, 其表达式为

$$\Gamma(K) = \int_0^{\infty} t^{K-1} e^{-t} dt \quad (1-14)$$

当 K 为正整数时, $\Gamma(K) = (K-1)!$, 表达式(1-13)就是标准爱尔兰分布密度, 当 $K=1$ 时, 式(1-13) 就是负指数分布。

尽管伽马分布能表示很大范围的数据特征, 但是在 K 值不是整数的情况下, 实际应用仍是不十分方便。例如, 在统计模拟中, 要确定伽马(γ) 分布的随机变量时, 首先要确定彼塔(β) 分布的随机变量。因此为了近似描述 K 介于两个正整数间的流的分布规律, 通常采用二阶混合爱尔兰分布或组合爱尔兰分布。而对于变异系数大于 1 (即 $0 < K < 1$) 的流, 则采用超指数分布来表示。

三、二阶混合爱尔兰分布

对于变异系数在 0.71~1 范围内的流 (即 $1 < K < 2$), 其间隔时间 (或作业时间) 可用二阶混合爱尔兰分布来拟合。二阶混合爱尔兰分布是两个独立的服从不同参数的负指数分布的随机变量和的分布。设 X 、 Y 为两个独立的非负随机变量, 它们的分布密度分别为

$$h(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$$

$$g(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$$

由于 X 、 Y 独立, 故 $X+Y=Z$ 的分布密度可按卷积公式求得, 即

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^z h(x)g(z-x)dx = \int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-x)} dx \\ &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \int_0^z e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}) \end{aligned}$$

所以
$$f(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad (1-15)$$

表达式(1-15)即为二阶混合爱尔兰分布。

由于我们可以根据样本资料确定实际的 λ 和 ν ，而不知道 λ_1 和 λ_2 ，故要采用二阶混合爱尔兰分布，就必须根据 λ 与 ν 来确定 λ_1 和 λ_2 。

因为二阶混合爱尔兰分布的均值

$$\bar{t} = E(t) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (1-16)$$

所以
$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 \lambda}{\lambda_1 - \lambda}$$

二阶原点矩

$$\begin{aligned} E(t^2) &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^{\infty} t^2 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) dt \\ &= \frac{2(\lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1^2)}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \end{aligned}$$

方差

$$D(t) = E(t^2) - [E(t)]^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \quad (1-17)$$

于是

$$\nu^2 = \frac{D(t)}{\bar{t}^2} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} = \frac{2\lambda^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda}{\lambda_1^2} \quad (1-18)$$

公式(1-18)整理后得

$$(1 - \nu^2) \lambda_1^2 - 2\lambda \lambda_1 + 2\lambda^2 = 0$$

所以
$$\lambda_{1,2} = \frac{\lambda[1 \pm \sqrt{1 - 2(1 - \nu^2)}]}{1 - \nu^2} \quad (1-19)$$

例如，列车到达车站间隔时间的变异系数 $\nu = 0.8$ ，到达强度 $\lambda = 4$ 列/h，则我们可以考虑采用二阶混合爱尔兰分布来表示间隔时间的分布规律。这时

$$\lambda_1 = \frac{4 - 4 \sqrt{1 - 2(1 - 0.8^2)}}{1 - 0.8^2} = 5.24$$

$$\lambda_2 = \frac{4 + 4 \sqrt{1 - 2(1 - 0.8^2)}}{1 - 0.8^2} = 17$$

二阶混合爱尔兰分布密度为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{5.24 \times 17}{17 - 5.24} (e^{-5.24t} - e^{-17t}) \\ &= 7.56(e^{-5.24t} - e^{-17t}) \end{aligned}$$

图 1-8 中用点线表示的曲线就是按 $\lambda=4$ 和 $\nu=0.8$ 画出的二阶混合爱尔兰分布密度，它的位置正好介于 $K=1$ 和 $K=2$ 的曲线之间。

二阶混合爱尔兰分布是应用很广泛的一种分布，多数编组站列车到达间隔分布均服从于该分布。

四、组合爱尔兰分布

当输入流或服务时间的变异系数为

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \nu < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n=2, 3, \dots)$$

时，最简单的是采取 n 阶和 $n+1$ 阶组合的爱尔兰分布，即

$$f(t) = cf_n(t) + (1-c)f_{n+1}(t) \quad (1-20)$$

式中 $f_n(t)$ —— n 阶标准爱尔兰分布密度；

$f_{n+1}(t)$ —— $n+1$ 阶标准爱尔兰分布密度；

c —— 比例系数， $0 \leq c \leq 1$ 。

也就是说，这个组合爱尔兰分布是由带有比例系数 c 的 n 阶标准爱尔兰分布和带有比例系数 $1-c$ 的 $n+1$ 阶标准爱尔兰分布所组成的。

c 值可按如下关系确定。根据公式(1-20)，组合爱尔兰分布的数学期望

$$\begin{aligned} E(t) &= cE_n(t) + (1-c)E_{n+1}(t) \\ &= c \cdot \frac{1}{\lambda} + (1-c) \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

二阶原点矩

$$\begin{aligned} E(t^2) &= cE_n(t^2) + (1-c)E_{n+1}(t^2) \\ &= c\{D_n(t) + [E_n(t)]^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1-c) \{D_{n+1}(t) + [E_{n+1}(t)]^2\} \\
& = c \left(\frac{1}{n\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) + (1-c) \left[\frac{1}{(n+1)\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right] \\
& = \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{n^2 + 2n + c}{n(n+1)} \right]
\end{aligned}$$

方差

$$\begin{aligned}
D(t) &= E(t^2) - [E(t)]^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{n^2 + 2n + c}{n(n+1)} \right] - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{n+c}{n(n+1)} \right]
\end{aligned}$$

于是，变异系数的平方

$$v^2 = \frac{D(t)}{[E(t)]^2} = \frac{n+c}{n(n+1)}.$$

$$\text{所以 } c = n(n+1)v^2 - n \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} < v < \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (1-21)$$

例如，根据样本的统计资料求得 $v=0.65$ ， $\lambda=4$ 列/h，则因 $0.58 < v < 0.71$ ，可以考虑采用二阶和三阶标准爱尔兰分布来组合，其 c 值等于 $2 \times 3 \times 0.65^2 - 2 = 0.54$ ，组合的爱尔兰分布密度为

$$\begin{aligned}
f(t) &= 0.54 \frac{2 \times 4 (2 \times 4t)^{2-1}}{(2-1)!} e^{-2 \times 4t} \\
&+ 0.46 \frac{3 \times 4 (3 \times 4t)^{3-1}}{(3-1)!} e^{-3 \times 4t} \\
&= 34.56te^{-8t} + 397.44t^2e^{-12t}
\end{aligned}$$

图 1-9 虚线表示该分布密度的曲线，可以看出这条曲线也处于 $K=2$ 和 $K=3$ 的标准爱尔兰分布曲线之间。

在通常情况下，每个方向的列车出发间隔分布，一般服从二、三阶或三、四阶组合爱尔兰分布。

五、超指数分布

当变异系数大于 1 时，可以考虑采用超指数分布。

超指数分布是带权的负指数分布的组合，其分布密度为

$$\begin{aligned}
f(t) &= \alpha_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} + \dots + \alpha_K \lambda_K e^{-\lambda_K t} \quad (1-22) \\
\sum_{i=1}^K \alpha_i &= 1
\end{aligned}$$

其数学期望

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^K \frac{\alpha_i}{\lambda_i}$$

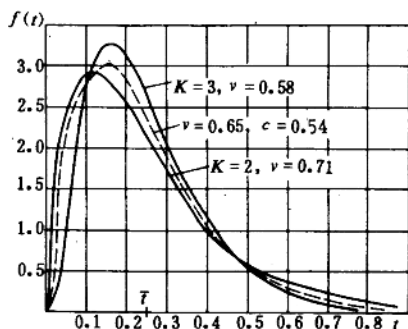


图 1-9 组合爱尔兰分布曲线(虚线)图

方差

$$D(t) = 2 \sum_{i=1}^K \frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \bar{t}^2$$

由于这个分布密度的表达式应用起来很不方便，故通常只采用具有两个参数的超指数分布。

现令 $c = \alpha_1$, $1 - c = \alpha_2$, $2c\lambda = \lambda_1$, $2(1 - c)\lambda = \lambda_2$,

则

$$f(t) = 2c^2\lambda e^{-2c\lambda t} + 2(1 - c)^2\lambda e^{-2(1 - c)\lambda t} \quad (0 < c \leq 0.5) \quad (1-23)$$

数学期望

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda}$$

方差

$$D(t) = \frac{1}{\lambda^2} \left[1 + \frac{(1 - 2c)^2}{2c(1 - c)} \right]$$

变异系数