

科學圖書大庫

微分學自修書

附平面解析幾何學

(上 冊)

著者 萬仟先

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

微分學自修書

附平面解析幾何學

(上 冊)

著者 萬仟先

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人 林碧銓 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十七年三月十日再版

微分學自修書

附平面解析幾何學

(上冊)

基本定價 6.80

著者 萬开先 國立交通大學電機工程學系工學士

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(63)局版臺業字第0116號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
7815250 號

發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號

承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

前言

一、本書係供作大學及專科學校一年級學生之課本或參考書籍。

二、本書係屬於講義性質，相當於將教師之講解以文字記錄表出，故讀者可以自修而無需教師之指導。其表述方針可列為以下各點：

(a)講解方面力求詳細清楚易懂，期使讀者能儘量減少耗費思索力而能獲得正確且徹底之了解。

(b)書文中隨處附有甚多註釋，以期解除讀者所可能發生之一切疑問。又凡有前後相關之論點及應用，皆隨時指明其相關節段，以便貫串思想，並增進記憶，免除混誤。

(c)凡對於論題之重點及困難之點皆係作反覆論述，並多方舉例演繹，以期讀者能諳悉之。

三、本書中除對於基本原理及導出公式方面作詳細說明外，尤其注重於應用方面，——在此方面所佔之篇幅實超過全書篇幅之半以上，係分為下列各方面進行之：

(a)在基本原理說明及公式導出程序中隨時附以簡單實例演繹。

(b)在每一論題之末恒列有例題多則，詳細演明解算問題之全部過程；包括其中所需用高中數學之運用手續並指明來源，作多方面討論，以及應用各種不同解算方法之比較等。其目標係使讀者能獲得自行解算各種問題之分析及運算能力，而免除不甚了解地僅以代公式為解題手續之陋習。

(c)例題後則列有甚多習題供讀者練習（此等習題多係直接採自Smith, Granville, and Longley三氏“初等微積分學”課本中）；凡稍涉困難處皆附有詳細“提示”及註釋或“略解”等（此等“提示”及“略解”等則非三氏原書中所有者）。其目標係使讀者在易作多作情況下自然發生探討興趣，由是獲致對於解算問題之熟悉運用。

(d)此外對讀者尚有一附屬建議，即當初步閱讀本文各公式導出程序中及各例題中之運算式時，宜同時加以抄寫，如是則非但可加深記憶，且可練習寫得快，實可資為繼後作練習題之準備。

四、本書論述中附有註釋甚多，其排入方式分為二種：(a)與論述言詞直接

有關之註解係包含於括號內直接插入詞句中；(b)屬於附述性質者則“、”號標明排在書頁之底部。關於(a)項用括號插入之註解，其括層次係依照數學中之運用方式，即依循元括包含於方括內，而方括又含於組括內之原則，讀者每次遇著此等括號註釋時，必須注意於每括號（每組必為一前及一後二部分，即“(”與”) ”，” [”與”] ”，” { ”與” } ”）之前後文詞係連續者；換言之，即跳過每組括內文字觀之，其外部文詞（或文字次序）係連續者。根據此觀點，方致發生閱讀上之混亂。

- 五、本書第十二章所討論應用問題中求極大值與極小值之普遍法則，與第四章§ 5中所討論畫方程式之曲線之普遍方法，皆係由著者本人推求得，尚祈學術界先進賢達賜予指正為幸。
- 六、本書中所用名詞皆係依從教育部所公布之“數學名詞”中之標準用語。
- 七、著者寫此書時曾盡最大努力，審慎撰述，期使讀者對於微積分學一科能以自修方式，在不感覺困難情況下，獲得確切了解及應用能力；然唯恐心餘力絀，或有未逮，尚祈海內賢達不吝指正，無任感幸。

萬开先 謹識
民國六十三年十月

微分學上冊 目錄

平面解析幾何學

第一章 直角坐標	1
§ 1 直角坐標	1
§ 2 直角坐標之實際運用	2
§ 3 二點間之距離公式	4
習題 1.1	6
§ 4 二點連線之分點坐標公式	7
習題 1.2	11
§ 5 直線之斜角與斜率	12
§ 6 二直線之夾角公式	15
§ 7 二直線互相平行或垂直之條件	17
習題 1.3	19
第二章 方程式與軌跡	21
§ 1 常數，變數，與函數	21
§ 2 方程式之曲線	22
習題 2.1	26
§ 3 適合所設幾何條件之軌跡之方程式	26
習題 2.2	28
§ 4 方程式之討論	29
§ 5 討論 (1)：坐標軸上之截距	29
§ 6 討論 (2)：對稱	30
§ 7 討論 (3)：曲線之範圍	33
§ 8 討論 (4)：漸近線	35
§ 9 全部討論及畫曲線之例	38
習題 2.3	39

§ 10	分解因式畫圖法	40
§ 11	二曲線之交點	42
	習題 2.4	43
第三章	直線及圓	45
§ 1	直線之方程式	45
§ 2	一次方程式之軌跡	46
§ 3	關於直線方程式之作圖及各種計算	48
	習題 3.1	50
§ 4	圓之方程式	52
§ 5	軌跡爲圓之方程式判定法	53
§ 6	關於圓方程式之作圖及各種計算	56
§ 7	圓與其切線之各種計算	61
	習題 3.2	64
第四章	拋物線，橢圓，及雙曲線	67
§ 1	拋物線	67
§ 2	" a " 值大小之影響	69
§ 3	拋物線方程式之其他形式	70
	習題 4.1	74
§ 4	橢圓	75
§ 5	橢圓之性質名稱及 a, b, c 值之討論	76
§ 6	橢圓方程式之另一形式	78
§ 7	對於 " $Ax^2 + By^2 = C$ " 形式方程式之軌跡判定	79
	習題 4.2	84
§ 8	雙曲線	85
§ 9	雙曲線之性質名稱	87
§ 10	雙曲線之漸近線	87
§ 11	雙曲線方程式之另一形式	89
	習題 4.3	93
§ 12	錐線之切線	94
	習題 4.4	95

第五章 坐標軸之變換及二次方程式曲線之實用判定法 96

§ 1	坐標軸之變換.....	96
§ 2	坐標軸之平移.....	96
§ 3	平移坐標軸後曲線方程式之變化.....	98
§ 4	平移坐標軸以簡化方程式.....	99
	習題 5.1.....	102
§ 5	軸平行於坐標軸而頂點在任何位置之拋物線.....	104
§ 6	二軸各平行於二坐標軸而中心在任何位置之橢圓.....	106
§ 7	二軸各平行於二坐標軸而中心在任何位置之雙曲線.....	107
§ 8	其他情形.....	109
	習題 5.2.....	111
§ 9	坐標軸之旋轉.....	111
§ 10	旋轉坐標軸後曲線方程式之變化.....	114
§ 11	利用旋轉坐標軸法以消除 x, y 項.....	115
	習題 5.3.....	119
§ 12	一般討論.....	119

(以上第一至第五章純為關於解析幾何學方面之基本原理及應用，係屬供溫習及參考之用；以下由第六章起始為微積分學之本文，間或包含關於解析幾何學方面之繼續論述。)

微 分 學

第六章 極限及連續函數 122

§ 1	變數之極限.....	122
§ 2	無窮小及無窮大.....	124
§ 3	關於無窮小及無窮大之代數運算定理.....	125
§ 4	極限定理之代數運算式.....	126
§ 5	極限定理之意義.....	128
§ 6	函數之極限.....	130
§ 7	分母為零之分數——不定形.....	132
§ 8	其他形式之不定形.....	136

習題 6.1	139
§ 9 連續函數	140
§ 10 函數之不連續點	143
§ 11 函數在某點爲不定形時之連續問題	145
習題 6.2	146
第七章 微分法	147
§ 1 增量	147
§ 2 函數 (因變數) 增量之文字計算式	148
§ 3 增量比及導數	149
§ 4 導數之各種記法	153
§ 5 微分運算記法總論	154
習題 7.1	157
§ 6 導數之代數意義	158
§ 7 導數之幾何意義	161
習題 7.2	168
第八章 微分公式 (一)——隱函數微分法；參數方程式導數公式	
§ 1 公式總列	170
§ 2 公式 [1] " $\frac{d}{dx} (f_1 + f_2 - f_3 + \dots) = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx} - \frac{df_3}{dx} + \dots$ " 之證明	172
§ 3 公式 [2] 與 [2'] , " $\frac{d}{dx} (cf_1) = c \frac{df_1}{dx}$ " 與 " $\frac{d}{dx} (\frac{f_1}{c}) = \frac{\frac{df_1}{dx}}{c}$ " , 之證明	173
§ 4 公式 [3] " $\frac{d}{dx} (f_1 f_2) = f_1 \frac{df_2}{dx} + f_2 \frac{df_1}{dx}$ " 之證明	174
§ 5 公式 [4] " $\frac{d}{dx} (\frac{f_1}{f_2}) = \frac{f_2 \frac{df_1}{dx} - f_1 \frac{df_2}{dx}}{f_2^2}$ " 之證明	175

§ 6	以上四個分解公式之連續運用.....	177
	習題 8.1.....	180
§ 7	串算公式〔5〕" $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ " 之證明.....	181
§ 8	代數基本函數式之導數公式〔6〕與〔7〕, " $\frac{dc}{dx} = 0$ " 與 " $\frac{dx}{dx} = 1$ " , 之證明	183
§ 9	代數基本函數式 x^n 及其衍式 v^n 之導數公式〔8〕與〔8a〕, " $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ " 與 " $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1} \frac{dv}{dx}$ " , 之證明.....	184
§ 10	代數函數之全部微分手續.....	189
	習題 8.2.....	192
§ 11	逆算公式〔9〕" $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ " 之證明	193
§ 12	對於 " 隱函數 " 之微分方法.....	197
§ 13	關於三種微分方法之概論.....	201
	習題 8.3.....	203
§ 14	曲線之參數方程式.....	204
§ 15	參數方程式導數公式〔5.1〕" $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ " 之證明.....	207
§ 16	對於聯立方程式應用隱函數微分法.....	210
§ 17	特殊情形——缺少變數之方程式.....	214
	習題 8.4.....	217
第九章 微分公式(二)——超越函數式導數公式		219
§ 1	公式總列.....	219
§ 2	自然對數之底, e	221
§ 3	關於對數函數之極限定理.....	222

§ 4	指數函數與對數函數之圖形.....	223
§ 5	公式〔10〕與〔10a〕, " $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$ " 與 " $\frac{d}{dx}(\log_e v) = \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$ " , 之證明	225
§ 6	公式〔11〕與〔11a〕, " $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x}$ " 與 " $\frac{d}{dx}(\log_a v) = \frac{\log_a e}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$ " , 之證明.....	227
§ 7	公式〔12〕與〔12a〕, " $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ " 與 " $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \cdot \frac{dv}{dx}$ " , 之證明.....	229
§ 8	公式〔13〕與〔13a〕, " $\frac{d}{dx}(a^x) = (\log_e a) \cdot a^x$ " 與 " $\frac{d}{dx}(a^v) = (\log_e a) a^v \cdot \frac{dv}{dx}$ " , 之證明.....	229
§ 9	公式〔14〕 " $\frac{d}{dx}(u^v) = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + (\log_e u) u^v \cdot \frac{dv}{dx}$ " 之證明; 對數微分法.....	231
§ 10	包含有基本對數式($\log_e x, \log_e v, \log_a x, \log_a v$)及基本指數式(e^x, e^v, a^x, a^v)之函數微分之例.....	237
	習題9.1.....	240
§ 11	" $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$ " 之極限值	241
§ 12	三角函數之圖形.....	244
§ 13	公式〔15〕與〔15a〕, " $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ " 與 " $\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \cdot \frac{dv}{dx}$ " , 之證明	248
§ 14	公式〔16〕與〔16a〕, " $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ " 與 " $\frac{d}{dx}(\cos v) = -\sin v \cdot \frac{dv}{dx}$ " , 之證明	248

- ($\cos v$) = $-\sin v \cdot \frac{dv}{dx}$ " , 之證明 249
- § 15 公式〔17〕與〔17a〕, " $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ " 與 " $\frac{d}{dx}(\tan v) = \sec^2 v \cdot \frac{dv}{dx}$ " , 之證明 250
- § 16 公式〔18〕與〔18a〕, " $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ " 與 " $\frac{d}{dx}(\cot v) = -\csc^2 v \cdot \frac{dv}{dx}$ " , 之證明 251
- § 17 公式〔19〕與〔19a〕, " $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ " 與 " $\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \tan v \cdot \frac{dv}{dx}$ " , " 之證明 251
- § 18 公式〔20〕與〔20a〕, " $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$ " 與 " $\frac{d}{dx}(\csc v) = -\csc v \cot v \cdot \frac{dv}{dx}$ " , 之證明 252
- § 19 包含有基本三角函數式之函數微分之例 254
習題 9.2 257
- § 20 關於基本反三角函數之圖形及微分手續 259
- § 21 公式〔21〕與〔21a〕, " $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ " 與 " $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$ " , " 之證明 260
- § 22 公式〔22〕與〔22a〕, " $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ " 與 " $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$ " , 之證明 264

§ 23 公式〔23〕與〔23a〕，" $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ " 與 "

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2} "$$
，之證明 266

§ 24 公式〔24〕與〔24a〕，" $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$ " 與 "

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2} "$$
，之證明 268

§ 25 公式〔25〕與〔25a〕，" $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ "

與 " $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}$ "，之證明..... 269

§ 26 公式〔26〕與〔26a〕，" $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ "

與 " $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}$ "，之證明..... 271

§ 27 包含有基本反三角函數式之函數微分之例..... 274

習題 9.3..... 275

§ 28 對於超越方程式應用隱函數微分法..... 277

§ 29 超越式之參數方程式及其微分運算..... 278

§ 30 對於聯立超越方程式應用隱函數微分法..... 282

§ 31 上章與本章中微分公式及微分方法總論..... 285

習題 9.4..... 288

第十章 導數之應用(一)——變率..... 290

§ 1 緒 論..... 290

§ 2 變率之意義及原理..... 292

§ 3 直線運動中之速度..... 294

§ 4 直線運動中之加速度..... 301

§ 5	平面曲線運動之路線方程式，速度，及加速度·····	304
	(A) 路線方程式·····	305
	(B) 速度公式·····	307
	(C) 加速度公式·····	310
	例題·····	312
	(D) 平面曲線運動之另一種形式所設方程式及例題·····	323
	習題 10.1 ·····	332
§ 6	相關時間變率及例題 (8 則) ·····	337
§ 7	時間變率中之時間單位·····	356
	習題 10.2 ·····	357
§ 8	自變數非代表時間之其他變率及例題 (5 則) ·····	362
	習題 10.3 ·····	368

第十一章 導數之應用 (二)——極大與極小——(1) 基本分析

	·····	371
§ 1	緒論·····	371
§ 2	增函數與減函數·····	371
	(a) 增函數·····	372
	(b) 減函數·····	372
	(c) 增函數或減函數之判定法·····	373
	(d) 函數之“增部分”與“減部分”及例題·····	374
	習題 11.1 ·····	380
§ 3	極大與極小之定義·····	382
§ 4	極大與極小之判定原則·····	385
§ 5	極大與極小之求法——第一種情形 (使導數之值等於零) ——原理分析及法則，例題·····	386
§ 6	極大與極小之求法——第二種情形 (使導數之倒數之值等於零) ——原理分析及法則，例題·····	399
§ 7	極大與極小之求法——特殊情形 (所論函數變換函數式之點) ——原理分析及法則，例題·····	413
§ 8	函數之端點——“端點”極大與極小：·····	420
	(a) “端點”極大與極小之理論與判定法·····	420
	(b) 端點之決定：·····	427

(i) "自然端點"——意義及例題(4則).....	425
(ii) "限制端點"——意義及例題(3則).....	434
(iii) 實際採用之端點——例題.....	441
(c) "無窮遠端點"極大與極小——意義, 計算法, 與例題(2則).....	443
§ 9 函數之四種情形"相對"極大與極小求法總表—— 總表及註釋.....	450
例題.....	455
習題11.2.....	467
§ 10 "絕對極大"與"絕對極小"——原理分析, 求法, 與例題	470
§ 11 具有不能確定值"不連續點"之函數—— "絕對極大"與"絕對極小"之求法.....	480
§ 12 "多值函數"—— "絕對極大"與"絕對極小"之求法及例題.....	482
習題11.3.....	486

第十二章 導數之應用(二')——極大與極小——(2)實用

.....	489
§ 1 應用問題之基本解法—— 解算原則與手續.....	489
例題(3則, 附討論).....	491
§ 2 關於函數之"相對極大"與"相對極小"出現次序之定理: 定理1之證明.....	502
定理2之證明.....	503
定理2之系.....	503
注意點及例題(3則).....	505
§ 3 各式應用問題之演算—— 關於決定所論函數之"絕對極大與極小"之三種方法說明及 討論.....	510
[包括: 第三種"直接比較函數值方法"之證明及演例 (511至512)]	
例題(10分).....	514
[包括: "分區計算法"之演述[例題7末之註(f)項] (558至570)] }	

關於決定所論函數之端點自變數值手續綜論	587
習題 12.1	588
{ 包括：第 1 至 35 題，屬於幾何圖形性質——對於某種圖形限定其一量為定值，求決定其另一量為最大或最小時之情形（589 至 604）	
第 36 至 59 題，亦屬於幾何圖形性質——求決定某一固定形之某種內接（或外切）形之一量達到最大或最小時之情形（604 至 620）	
第 60 至 84 題，屬於具有幾何圖形意義之實用問題（620 至 640）	
第 85 至 104 題，——不需要附圖參考之雜題（640 至 648）	
{ 第 5 題後附有“關於以正值常數乘或除所論函數，及平方一正值函數，而不致改變其極大與極小所在點”之法則討論（590 至 593） }	
§ 4 應用聯立方程式隱函數微分法以解算應用問題——“變化手續”：	
解算手續之討論	648
例題（5 則）（附“與以前解法對照說明”）	649
{ 包括：解算“導數等於零”與“導數之倒數等於零”方程式之“理論法則”討論〔插入例題 1（A）項之解算程序中〕（652 至 655）	
解算上述方程式之“實用法則”討論〔插入例題 1（B）項之解算程序中〕（661 至 665） }	
習題 12.2	687
§ 5 具有參數方程式之應用問題（附例題 1 則）	688
習題 12.3	698
第十三章 高階導數及導數之變換	701
§ 1 逐次微分——高階導數	701
§ 2 高階導數之記法	702
§ 3 關於變數個數與方程式個數之討論	706
§ 4 第二導數及較高階導數之求法	709
（A）原設顯函數形式	710

(B) 原設隱函數形式	711
(C) 原設參數方程式形式	714
例題 (3 則)	718
{ 包括：由普通 x, y 方程式化為參數方程式之手續及討論 [插入例題 3 之 " 解中 (紐括內)] (722 至 726) }	
習題 13.1	728
§ 5 第二導數值為正或負之幾何意義——	
原則之論述	731
{ 包括：代表函數之另一種新記法述明 (732 至 733)	
關於直線正方向及斜角之另一種規定 (737 至 738) }	
例題 (6 則)	739
{ 其中例題 6 (743 至 745 頁) 係一特殊性者——應用導數	
原理以證明 " $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$ " }	
§ 6 拐點——定義，判定手續，及例題	746
習題 13.2	754
§ 7 " 相對極大與極小 " 之第二導數檢定法	759
§ 8 加速度為位置 - 時間函數之第二導數	762
習題 13.3	764
§ 9 導數之變換——	
逐次微分程序中之自變數問題討論	765
變換導數之一般手續	767
變換導數關係式之意義演述	769
變換導數關係式之應用，二種情形討論：	
(i) " 實用量 " 公式中之變換導數	775
(ii) 微分方程式中之變換導數	778
(包括：" 微分方程式 " 之基本意義略釋，第 778 頁)	
關於二種應用情形之討論	780
§ 10 因變數與自變數互易之變換導數公式	781
§ 11 變換自變數與因變數之變換導數之例——	
(i) 變換因變數而不變換自變數之變換導數	786
(ii) 變換自變數而不變換因變數之變換導數	794
(iii) 同時變換因變數與自變數之變換導數	797