

TANXINGLIXUE JI QI
YOUXIANYUANFA



弹性力学及其有限元法

张允身 曹富祥 编著 中国铁道出版社

弹性力学及其有限元法

张允真 曹富新 编著

中 国 铁 道 出 版 社

1983年·北京

弹性力学及其有限元法

张允真、曹富新 编著

中国铁道出版社出版

责任编辑 王能远

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: 850×1168 1/32 印张: 24.5 字数: 639千

1983年3月第1版 1983年3月第1次印刷

印数: 0001—5,000册 定价: 4.90元

内 容 简 介

本书第六章以前主要讲述弹性力学的基本理论和方法,第七章至十三章从应用的角度主要讲述有限元法。介绍了离散算子、应力杂交元、拟协调元等新的内容,还包括弹性平面、平面刚架和板问题的三个通用程序及其注解和使用说明。第十四章启发读者分析计算中的差错,提出避免某些误差的例子。

本书可以作为高等院校力学专业、结构专业、机械专业师生和研究生的参考书,也可供工程技术人员学习弹性力学和有限元法使用。

JY1/39/06

序

经典弹性理论已经比较成熟，并早已应用于工程实践，但由于实际工程问题的复杂，能够获得解析解的问题仍然受到局限。从五十年代开始，由于数字电子计算机的出现及其在力学中的应用，大大地促进了力学学科的发展，并出现了一种力学新分支，它处理问题的内容、思考问题的方法、使用的数学工具与传统的力学大不一样，人们称之为“计算力学”。

在计算力学中，除了古典的有限差分法外最具有代表性的是有限元法，它比差分法具有更加广泛的适应性和灵活性。此外，还有其它的数值法出现，如离散算子法。

有限元法是结构分析中的一种数值法，它已成为分析连续体的强有力的工具。并且，该法已能够成功地用来解决象热传导、电磁场、渗流和流体动力学等其它领域中的问题。

有限元法首次应用于工程结构是在二十世纪五十年代中期，最初主要用来对结构进行矩阵分析，自从1960年柯劳夫 (R.W. Clough) 首次称该法为“有限元法”以来，有限元法便成为工程技术界的统一术语了。

在我国，从七十年代初期开始，一些高等院校，研究、设计单位先后进行了关于有限元法的研究和推广应用，并取得了大量的成果。目前，电子计算机技术、弹性力学及有限元法已成为许多工院校的大学生和研究生的必修课，同时，越来越多的科技人员和大学教师也在学习这几方面的内容。

但是，应该注意的是，力学是有限元法产生和发展的基础，而计算是手段，二者不能偏废。例如，要调通一个复杂的程序，主要靠力学；一个病态方程组，“病”在哪里？机器无法判别，要靠力学工作者判断和改造。至于，力学模型的建立以及计算结

果的分析,更需要力学的基本概念和理论。以前在力学中的数值计算工作主要是手工计算,是繁重的“体力”劳动。现在应用近代计算机,大大地提高了计算速度,扩大了解题的范围,从而使许多复杂的工程结构问题迎刃而解。

根据我们在校内、外的教学和工作实践,感觉到有必要编写一本既包括弹性力学又包括有限元法的书。

本书的内容包括两部分,第一部分是弹性力学,第二部分是有限元法。在第一部分中,为适应电算和有限元法的需要,利用矩阵表达弹性力学的基本方程,加强了弹性力学的基本概念和理论的叙述,内容包括平面、空间、板、壳问题和能量原理;在第二部分中,除了介绍有限元法的基本概念和一般方法外,分别讲述了平面、空间、杆系、板壳问题的有限元法,另外,从实用的角度讲述了离散误差和计算误差,并编写了三个通用程序及其说明。

学习本书须具有一定的力学基础,对于具备算法语言、矩阵代数、计算方法和数理方法的一些基本知识的读者,学习本书是不会有太大困难的。

本书的绪论和第一部分由曹富新编写,第二部分由张允真编写。在编写中参阅了大连工学院工程力学系的若干讲义、教学资料和科研成果。

全书经唐立民教授审校。

在编写中,大连工学院工程力学系的师生给了热情的支持。孙焕纯副教授看过书稿的大部分,邬瑞锋和唐秀近副教授看过书稿的部分内容,邹洪地同志看过第二部分,沈阳机电学院胡家忻等同志也看过书稿,他们提出了大量的宝贵意见;凡恩开同志绘了全书的插图。在此我们向他们表示衷心的感谢。

编 者

一九八〇·九

目 录

绪 论	1
第一节 固体的力学性质和理想弹性体模型的建立	1
第二节 弹性力学的基本方法及其有限元法概述	8
第三节 弹性力学中基本物理量的定义、记号和正负号规定	15
第四节 弹性力学的应用与分类	21

第 一 部 分

第一章 弹性平面问题的基本理论	23
第一节 两种平面问题	23
一、平面应力问题	24
二、平面应变问题	26
第二节 平衡微分方程式	28
第三节 几何方程式。连续性方程式	30
第四节 物理方程式	34
第五节 小结。平面问题基本方程式的综合与矩阵表示	36
第六节 边界条件	41
第七节 圣维南原理。静力等效边界条件	46
第八节 坐标变换。位移、应力和应变分量的转轴公式	49
一、坐标变换	49
二、位移分量的转轴公式	50
三、斜截面上的应力（按坐标轴分解）	51
四、斜截面上的应力（按法向和切向分解）	52
五、应力分量的转轴公式。一点的应力状态。应力张量。应力主方向。主应力。应力不变量	53
六、相对位移分量的转轴公式	59
七、应变分量的转轴公式。一点的应变状态。应变张量。主应变。应变主方向。应变不变量	61
第九节 位移和位移分量	65
一、一点的变形位移分量和刚性位移分量	65
二、整体刚性位移和约束条件	68

三、线性位移场与均匀变形	70
四、位移分量的计算。多连域中的位移单值条件	71
第二章 弹性平面问题的求解	75
第一节 基本方程的简化——按位移求解	75
第二节 基本方程的简化——按应力求解	89
第三节 基本方程的简化——按应力函数求解	100
第四节 极坐标表示的基本方程式	119
一、坐标变换	119
二、极坐标表示的平衡微分方程式	122
三、极坐标中的几何方程式	124
四、极坐标中的物理方程式	126
五、极坐标中的应力函数和连续性方程式	127
六、极坐标中的边界条件	129
七、基本方程的综合	130
第五节 极坐标轴对称问题	131
第六节 极坐标非轴对称问题	148
第七节 平面问题的复变函数方法	164
一、按位移求解的复变方程及其一般解	164
二、按应力求解的复变方程及其一般解	171
三、按应力函数求解的复变方程及其一般解	174
四、小结。应力势函数的具体形式	177
五、非圆域问题。保角变换(映射)方法	197
第三章 弹性空间问题	206
第一节 空间问题的基本方程和边界条件	206
一、平衡微分方程式	206
二、几何方程式。连续性方程式	208
三、物理方程式	210
四、小结。基本方程的综合、简化	216
五、边界条件	220
第二节 坐标变换。位移、应力和应变分量的转轴公式	222
一、坐标变换	222
二、位移分量的转轴公式	223
三、斜截面上的应力(按坐标轴分解)	223

四、斜截面上的应力（按法向和切向分解）	224
五、应力分量的转轴公式。一点的应力状态。应力 张量。应力主方向。主应力。应力不变量	225
六、相对位移分量的转轴公式	229
七、应变分量的转轴公式。一点的应变状态。应变 张量。主应变。应变主方向。应变不变量	231
八、位移和位移分量	235
第三节 圆柱坐标中的基本方程。空间轴对称问题	237
一、圆柱坐标中的基本方程	237
二、空间轴对称问题	238
第四节 热弹性力学的基本方程。初应变问题	245
一、热应力的概念	245
二、空间问题热弹性基本方程式	245
三、平面问题热弹性基本方程式	252
四、关于不产生热应力的温度场	256
五、初应变问题	257
第五节 等截面直杆的扭转	258
一、从位移出发建立扭转方程。扭转函数	259
二、从应力出发建立扭转方程。应力函数	262
三、扭转函数 φ 和应力函数 ψ 的关系	267
四、多连域中的位移单值条件	268
第四章 薄板弯曲问题	276
第一节 薄板的定义和计算假定	276
第二节 薄板弯曲的基本方程式	278
一、薄板的变形分析	278
二、薄板的物理关系	282
三、平衡条件。薄板弯曲基本方程式	285
第三节 薄板的边界条件	288
第四节 薄板中的坐标变换	292
一、变形分量的坐标变换	292
二、内力分量的坐标变换	294
第五节 例题	296
第六节 圆板的轴对称弯曲	305

第五章 薄壳问题	310
第一节 概述	310
一、薄壳的定义和计算假定	310
二、壳体的变形分析	311
三、壳体的内力分量和应力分量	313
四、内力和变形的关系	316
五、壳体边界条件	317
六、有矩理论和无矩理论	320
第二节 回转壳的无矩理论	321
第三节 圆柱壳的有矩理论	330
一、平衡微分方程式	330
二、几何方程式	331
三、物理关系及方程式的综合	333
第四节 轴对称回转壳的有矩理论	340
一、平衡微分方程式	340
二、轴对称变形的几何关系	342
三、物理关系和方程式的综合	345
第六章 弹性力学中的能量原理	348
第一节 功和应变能函数	348
第二节 余功和余应变能函数	357
第三节 虚功原理	361
第四节 虚余功原理	366
第五节 最小势能原理	371
第六节 最小余能原理	373
第七节 能量原理的应用	375

第 二 部 分

第七章 有限元法的基本概念	381
第一节 平面桁架的有限元法	381
一、位移法	381
二、力法	383
三、混合法	384
四、方法的选择	384

第二节	单元分析	385
一、	杆端力列阵和节点位移列阵	385
二、	单元刚度矩阵	386
三、	应力矩阵	388
第三节	结构平衡方程	389
一、	节点的平衡方程	389
二、	结构的平衡方程组	390
第四节	支承条件及支承反力	398
第五节	杆件的內力和应力	402
第八章	有限元法的一般方法	405
第一节	离散化	405
第二节	单元位移函数和解答的收敛条件	407
一、	单元位移函数	407
二、	单元位移函数的平衡、连续	408
三、	解答的收敛条件	410
第三节	插值函数	412
一、	线性插值	413
二、	拉格朗日插值公式	414
三、	埃尔米特多项式	417
第四节	有限元法的直接法	419
一、	应变	419
二、	应力	420
三、	单元刚度矩阵	420
四、	等效节点荷载	422
五、	坐标变换	425
六、	整体平衡方程及总刚度矩阵	427
第五节	瑞利-里茨法	429
一、	单元的应变能	429
二、	总势能	430
三、	弹性力学的瑞利-里茨法	431
四、	瑞利-里茨法的有限元形式	435
五、	对位移场的讨论	439
第六节	微分算子离散化方法	441

一、一维问题	441
二、二维微分算子的离散化格式	444
三、平面稳定温度场	452
第七节 支承条件及支承反力	455
第八节 代数方程组的解法	458
一、迭代法	458
二、直接法	463
三、矩阵分块法	468
第九章 弹性平面问题有限元法	473
第一节 计算模型及分析步骤	473
第二节 单元刚度矩阵, 节点力和节点位移关系式	476
一、单元位移函数和形状函数	476
二、单元刚度矩阵	479
三、节点位移及节点力的关系式	482
四、节点荷载分量	483
五、温度荷载	486
第三节 总刚度矩阵和整体平衡方程组	487
一、总刚度矩阵的集成	487
二、右端项的集成	488
三、结构的整体平衡方程组	490
第四节 对称性分析及支承条件	490
第五节 应力计算	495
第六节 例题	499
第七节 弹性平面问题的离散方程	504
第八节 一些实际问题	511
一、变厚度弹性平面问题	511
二、不同材料的弹性平面问题	511
三、具有加强筋的混合结构	515
四、装配应力问题	516
五、弹性接触问题	519
第九节 矩形单元	521
一、计算模型	521
二、单元位移函数和形状函数	522

三、单元应力矩阵及单元刚度矩阵	524
四、总刚度矩阵和节点荷载	526
第十节 六节点三角形单元	528
一、面积坐标	528
二、六节点三角形单元	530
第十一节 关于矩形梁的计算比较	539
第十二节 平面等参单元	541
一、四节点四边形等参单元	541
二、等参单元的刚度矩阵	544
第十章 弹性平面问题程序的编写和使用	548
第一节 总刚度矩阵的特点	548
一、正定对称性	548
二、稀疏性	548
三、非零元素的带状分布	548
第二节 总刚度矩阵的存贮方式	549
一、半等带宽存贮	550
二、变带宽存贮	553
三、变带宽紧缩存贮	555
第三节 弹性平面问题总框图	557
一、程序设计概述	558
二、总框图	560
第四节 第7、8框框图设计	562
一、第7框的细框图	562
二、第8框的细框图	563
第五节 数据和信息编排	565
一、单元信息及其分离程序	565
二、支承条件、节点荷载信息以及分离程序	567
三、引进支承条件和形成右端项	570
第六节 源程序及其说明	571
一、标识符说明	571
二、输入、输出格式及内容	573
三、源程序及其注解	575
第七节 使用源程序的例题	581

一、题目	581
二、输入的数据和信息	582
三、输出格式和内容	583
第八节 利用离散算子法编写程序	585
一、数据和信息编排	585
二、分离节点信息的程序段	586
三、计算总刚度矩阵的各项元素	587
四、总刚度矩阵的建立	589
五、单元应力计算	591
第十一章 空间问题有限元法	593
第一节 计算模型和计算方法	593
第二节 单元位移函数和等效节点荷载	594
第三节 单元应力矩阵和单元刚度矩阵	599
第四节 二次四面体单元	600
一、四面体的体积坐标	600
二、二次四面体单元	602
第五节 六面体单元	603
一、8个节点的六面体单元	603
二、20个节点的六面体单元	607
第六节 空间等参单元	608
一、8个节点的等参单元	608
二、20个节点的等参单元	609
三、形状函数对整体坐标的导数	610
四、积分式的两种坐标的变换关系	612
第七节 轴对称问题	613
一、单元位移函数	614
二、几何矩阵	615
三、应力矩阵	616
四、单元刚度矩阵	616
五、节点荷载	617
六、关于单元分析的精确计算	621
第八节 非轴对称荷载的轴对称结构	624
一、荷载和位移的半解析函数	625

二、弯曲荷载作用下的轴对称结构	626
三、轴对称问题	632
第十二章 杆系结构有限元法	634
第一节 空间梁单元分析	634
一、节点位移、节点力和节点荷载列阵	634
二、单元位移函数和几何矩阵	635
三、单元内力矩阵和单元刚度矩阵	637
第二节 平面刚架单元	641
第三节 平面板架单元	648
第四节 刚架的灵活应用	650
一、模拟支承条件	650
二、变截面梁	651
三、半铰的处理	652
第五节 子结构及其例题	654
第六节 平面刚架源程序及其说明	660
一、标识符说明	660
二、输入、输出格式及内容说明	662
三、源程序及其注解	662
第七节 使用源程序的例题	670
一、题目	670
二、输入的数据和信息	671
三、输出格式及内容	673
第十三章 板壳问题的有限元法	675
第一节 引言	675
第二节 矩形薄板单元的位移法	676
一、单元位移函数	676
二、单元的内力矩阵和刚度矩阵	679
三、节点荷载	683
第三节 三角形薄板单元的位移法	685
第四节 矩形薄板单元的混合法	692
一、一般情况	692
二、单元挠度函数和内力函数	694
三、单元矩阵	696
四、等效节点荷载	700

五、方程组的右端项和支承条件	702
六、计算例题	703
第五节 矩形薄板单元混合法的源程序及其使用说明	705
一、标识符说明	705
二、输入格式及内容	709
三、源程序及其注解	709
第六节 使用源程序的例题	718
一、题目	718
二、输入的数据和信息	718
三、输出格式和内容	719
第七节 应力杂交元	720
一、有限元余能极小原理	721
二、有限元广义余能原理	722
三、应力杂交元	724
第八节 拟协调元	727
一、拟协调条件	727
二、拟协调元的构造和边界积分	728
三、单元刚度矩阵	730
四、关于矩阵 $[A]$ 的计算	731
五、关于矩阵 $[C]$ 的计算	733
六、计算例	736
七、附录	737
第九节 轴对称壳体单元	737
一、在轴对称荷载作用下	737
二、在非轴对称荷载作用下	742
第十节 平面壳体单元——矩形单元	744
第十一节 平面壳体单元——三角形单元	749
第十四章 错误和误差	752
第一节 检查错误	752
第二节 离散误差和收敛速度	754
第三节 计算误差和病态方程	758
第四节 节点号码排列次序	762
第五节 残差和迭代改进	765
参考文献	766

绪 论

第一节 固体的力学性质和

理想弹性体模型的建立

固体具有多种多样的物理属性，力学性质是其重要的物理属性之一。固体的力学性质归根结蒂取决于它的微观结构，但是弹性力学并不研究原子、分子、晶体和颗粒的力学性质，而是把根据宏观力学实验抽象出来并理想化了的模型，通常称为理想弹性体（简称弹性体），作为自己的研究对象。所以，弹性力学的研究，本质上仍属于唯象学的范畴。至于从微观角度研究固体，那是固体物理、物理力学和颗粒弹性理论等分支学科的任务。

弹性力学的基本任务就是从宏观上研究弹性体对外因（主要是外力温度等）作用的反应，确切的说，就是确定此时的应力和应变以及与应变有直接关系的位移。

在利用抽象化的方法建立理想弹性体模型之前，让我们概略地回顾一下固体的某些性质，特别是简单拉伸试验所反应的固体材料的宏观力学性质是有益的。简单拉伸试验是用标准试件来进行的，对于金属材料，标准试件如图 0—1 所示。设试件两定点之间的长度为 L_0 ，其截面积为 F_0 ，加上拉力 P 后， L_0 伸长了 ΔL 。我们把 P/F_0 称为拉伸应力 (σ)， $\Delta L/L_0$ 称为拉伸应变 (ε)，于是有

$$\sigma = \frac{P}{F_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (0-1)$$

某一种材料的拉伸应力和拉伸应变的比，称为该材料的杨氏模量或弹性模量 (E)，即

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{P L_0}{F_0 \Delta L} \quad (0-2)$$