工程数学

线性代数

王子亭　吕巍然　何苏阳　主编

石油大学出版社

工 程 数 学

线 性 代 数

王子亭　吕巍然　何苏阳　主编

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王子亭等编. 一东营:石油大学出版社,
2000.1
(工程数学丛书)
ISBN 7-5636-1328-5

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第74906号

工 程 数 学
线 性 代 数
王子亭 吕巍然 何苏阳 **主编**

责任编辑:宋秀勇(电话 0546—8392139)
封面设计:孟卫东

出 版 者:石油大学出版社(山东 东营,邮编 257062)
网　　址:http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpress
电子信箱:upcpress@sunctr.hdpu.edu.cn
印 刷 者:泰安师专印刷厂
发 行 者:石油大学出版社(电话 0546—8392563)

开　　本:850×1168 1/32 印张:6.625 字数:180千字
版　　次:2000年3月第1版第1次印刷
印　　数:1—4100册
定　　价:9.80元

目　录

第一章 n 阶行列式

§1.1 全排列及其逆序数

1.1.1 全排列及其不同排列的个数

引例 用1,2,3三个数字可以组成多少个没有重复的三位数?

解 这相当于说把三个数字分别放在百位、十位与个位,有几种不同的放法?显然,百位上可以从1,2,3三个数字中任选一个,所以有3种放法,十位上只能从剩下的两个数字中选一个,所以有2种放法.而个位上只有1种放法.因此,共有6种放法.

在数学上把考察的对象叫做元素,例如上例中的数字1,2,3叫做元素.上述问题就是:把3个不同的元素排成一列,共有几种不同的排法?

类似地考虑 n 个元素的情况,把 n 个不同的元素排成一列,共有多少种不同的排法.把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列, n 个不同元素的所有排列的种数为

$$
\begin{aligned}
P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \\
\times \cdots \times 2 \times 1 = n!
\end{aligned}
$$

1.1.2 排列的逆序数

对于 n 个不同的元素,规定各元素之间有一个标准次序,当两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有1个逆序.一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

1.1.3 排列逆序数的计算

不失一般性,不妨设 n 个元素为1至 n 这 n 个自然数,并规定

从小到大为标准顺序. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列,将每个元素依次向前比较,则可计算排列的逆序数. 考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果排在它前面且大于它的元素的个数为 t_i,则称这个元素的逆序为 t_i. 全体元素的逆序数之和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

即是这个排列的逆序数. 简言之,依次向前比较数计逆序数,然后累加.

例 1 求排列 32514 的逆序数.

解 $t(32514)=0+1+0+3+1=5.$

§1.2 n 阶行列式的定义

三阶行列式定义可描述为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

右边的每一项是三个元素的乘积,这三个元素是位于不同行不同列的. 任意项均可表示为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,每项的元素按行排列,其中第二个下标(列指标)排成 $p_1p_2p_3$,其符号可用$(-1)^t$,其中 t 为列标排列的逆序数. 把此定义推广到 n 阶行列式,则有如下定义:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

行列式的定义中包含这样三个步骤:取项(任取位于不同行不同列的 n 个元素),冠符(将元素按行排列,其列指标的逆序为 t,即

得到一般项$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，求和(这样的项共有$n!$项，对这些项求和则得到行列式的值). 按此定义，二阶行列式和三阶行列式的计算可用对角线法则，而高阶行列式不能用对角线法则计算. 按行列式的定义计算行列式则需要计算$n!$项的和，对于高阶行列式的计算是相当复杂的. 但当行列式中有相当多的元素是零时，则只需计算非零项即可，如以下所讨论的对角行列式和三角行列式.

例 2 证明对角行列式(所有的非对角元为零，只有对角元可能非零)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证明 注意行列式的取项和对应的行指标和列指标(行位置和列位置). 第一行只有一个非零元，只能取元素$a_{11}=\lambda_1$，第二行只能取$a_{22}=\lambda_2$，…，第n行只能取$a_{nn}=\lambda_n$，而如此取项各元素对应的列指标排列的逆序为$t(123\cdots n)=0$，相应的符号(冠符)为$+$，因而有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

对于斜对角行列式，与对角行列式类似，第一行只能取第n个元素，…，第n行只能取第一个元素，对应项的逆序数为

$$\begin{aligned} t(n(n-1)(n-2)\cdots 1) &= 0+1+2+\cdots+(n-1) \\ &= n(n-1)/2, \end{aligned}$$

因此,该项的符号(冠符)为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,所以行列式只有一项,即$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

例 3 证明下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 根据行列式的取项规则,每项中的 n 个元素必须是位于不同行不同列的.因此,第一行只能取 a_{11},第二行只能取 a_{22},$\cdots$,第 n 行只能取 a_{nn},该项的列指标排列的逆序数为 $t(123\cdots n)=0$,因此

$$D=(-1)^0a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 4 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\triangle(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\triangle(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 $D=D_1D_2$.

证 记$D=\triangle(d_{ij})$,其中

$$d_{ij}=a_{ij}\qquad(i=1,\cdots,k;j=1,\cdots,k),$$

$$d_{k+i,k+j} = b_{ij} \qquad (i = 1,\cdots,n; j = 1,\cdots,n)$$

考察 D 的一般项

$$(-1)^l d_{1r_1} d_{2r_2} \cdots d_{kr_k} d_{(k+1)r_{k+1}} \cdots d_{(k+n)r_{k+n}},$$

由于当 $i \leq k, j > k$ 时，$d_{ij}=0$，因此 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 只有在 $1,2,\cdots,k$ 中选取时，该项才有可能不为零. 而当 $r_1,\cdots,r_k$ 在 $1,\cdots,k$ 中选取时，r_{k+1}, r_{k+n} 只能在 $k+1,\cdots,k+n$ 中选取. 于是 D 中可能不为零的项可以记作 $(-1)^l a_{1p_1}\cdots a_{kp_k} b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}$，这里，$p_i = r_i, q_i = r_{k+i} - k$，而 l 为排列 $p_1p_2\cdots p_k(k+q_1)\cdots(k+q_n)$ 的逆序数. 以 t, s 分别表示排列 $p_1p_2\cdots p_k$ 及 $q_1q_2\cdots q_n$ 排列的逆序数，应用 $l=t+s$. 于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1p_2\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n} a_{1p_1}\cdots a_{kp_k} b_{1q_1}\cdots b_{nq_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_k} (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k} \sum_{q_1\cdots q_n} (-1)^s b_{1q_1}\cdots b_{nq_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_k} (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k} D_2 = D_1 D_2. \end{aligned}$$

§1.3 排列的对换

1.3.1 排列的对换及其性质

行列式定义中的一般项是按行的顺序表示的，也可以按列的顺序来表示，这要通过元素之间位置的对换，因而元素的行指标和列指标均做对应的对换. 在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换，将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性(对换改变排列的奇偶性)

证 先证相邻对换的情形. 设排列为 $a_1a_2\cdots a_l abb_1b_2\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然 $a_1,\cdots,a_l; b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a,b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$

时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序不变；当 $a>b$ 时，对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情况. 设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换调成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $(m+1)$ 次对换调成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经过 $2m+1$ 次相邻对换排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证　由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列（逆序数为零），因此知推论成立.

1.3.2　行列式的列顺序表示

对于行列式任意项 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$，其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$，这时这一项的值不变，而行标排列和列标排列同时作了一次相应的对换. 设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^{t_1}=-(-1)^t$，故 $(-1)^t=(-1)^{r+t_1}$，于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{r+t} a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这表明对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列之和并不改变奇偶性. 经一次对换是如此，经过多次对换当然还是如此. 于是，经过若干次对换，使列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（逆序数为 t）变为自然排列（逆序数为 0）；行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s，则有

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

又若 $p_i=j$，则 $q_j=i$（即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_j j}$）. 可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由

排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所惟一确定. 由此可得

定理 2 n **阶行列式也可表示为**

$$D=\sum(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$

其中 t **为行标排列** $q_1q_2\cdots q_n$ **的逆序数.**

证 按行列式的定义有 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$. 记

$$D_1=\sum(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

按上面的讨论知:对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等;反之,对于 D_1 中的某一项 $(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 与之对应且相等,于是 D 和 D_1 中的项可以一一对应并相等,从而 $D=D_1$.

§1.4 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 **行列式与它的转置行列式相等(行列式转置不变).**

证 记 $D=\triangle(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(1,j=1,2,\cdots,n)$，按定义

$$D^T = \sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$
$$= \sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

而由定理 2，有 $D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，故 $D^T=D$.

由此性质可知，行列式中的行和列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证　设行列式

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $\triangle(a_{ij})$ 交换 i,j 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$D_1 = \sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$$
$$= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$$
$$= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数.设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，故

$$D_1 = -\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} = -D.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列.交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 如果行列式有两行(列)相同,则此行列式为零.

证 把这两行互换,有 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3 行列式的某一行(列)的所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行(或列)乘以 k,记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k 记作 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质 5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{1ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一个数后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变. 例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 c_i+kc_j),有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_i + kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} + ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用行列式的性质可以把行列式化简，一般方法是通过某行(列)加上另一行(列)的适当倍数把行列式中的对角元以下的元素化为零(化零技术)，从而将行列式化成三角行列式. 选取合适的对角元可简化计算.

例 5 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 + 5r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - 8r_2]{r_3 + 4r_2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 + \frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.$$

例 6 计算 $D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$.

解 把行列式化成三角行列式是一般的方法,计算比较复杂,对于一些特殊的行列式应根据其行列式的特点选取特殊的方法.如上行列式的特点是各列 4 个数之和都是 $4+a$,把第 2、3、4 行同时加到第 1 行,提出公因子,然后各行减去第一行:

$$D \xlongequal{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}\begin{vmatrix} 4+a & 4+a & 4+a & 4+a \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 \div (4+a)}(4+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}(4+a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=(4+a)a^3.$$

例 7 计算

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$$

解 根据行列式的特点,从第 4 行开始,后行减前行:

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_2\\r_3-r_2}}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&a&3a+b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4.$$

§1.5 行列式按行(列)展开(降阶法)

一般说来,低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便,于是,我们自然考虑到用低阶行列式来表示高阶行列式的问题. 为此,先引进余子式和代数余子式的概念.

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后,留