高等学校试用教材

线性代数

武汉大学数学系数学专业编

人民教育出版社
1977

线性代数

武汉大学数学系数学专业编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

1977年7月第1版　1977年11月第1次印刷
书号13012·048　　定价0.87元

前　言

本书是根据1972年以来武汉大学数学系的线性代数讲义修改而成。内容是介绍线性代数的基础理论及基本演算方法，除欧氏空间因避免篇幅过长，我们不作系统介绍以外，其他线性代数的主要内容本书基本上都已具备。线性方程组的数值解法是线性代数重要应用之一，本书在第二章也作了介绍。

因为本书是作为高等院校的基础数学教材，每章乃至每节都标明讨论的主要问题，说明问题从何而来，又往何处去。力求叙述简明，推理详尽，便于读者自学。我们还根据从具体到抽象的原则，把比较具体的线性方程组放在前面，抽象性较强的线性空间理论安排在最后，希望能减少初读者的一些困难。

在安排处理上，我们有下面一些作法与一般写法不同：

1. 有两个定义与一般写法不同，一个是第一章§1中行列式的定义，另一个是第六章§4中初等因子的定义。我们认为这样做，定义本身已得到简化，而且前者可进一步简化行列式性质的证明，后者可以突出约旦标准形的主要定理，使内容主次分明。

2. 有些一般方法只用特殊例子来说明。譬如在第三章§5中矩阵的标准形，第五章§1中二次齐式的标准形等都是如此。当然这不是严格的证明，但我们认为只要在方法上没有原则的区别，假如对某些特殊的情况说明清楚了，一般的就可以同样推得，这样既不会损害问题的一般性，又使叙述简明，读者便于掌握。

3. 个别证明复杂的定理，我们先提出定理，并且也引用定理，但证明适当地推后。譬如第一章§1中定理的证明放在这节末尾；

第六章介绍约旦标准形时，把其中两个定理的复杂证明合为一节放在这章最后。我们认为这样做可以减少复杂证明的干扰，较早地看到主要内容。

此外，我们还把某些较困难的证明及例题用小字排，初读者如果学习确有困难，可以略去不看，这并不影响后面的学习；如果困难不大，我们仍希望全看或选看，这样可以得到一些启发，增强推理能力。代数方程的主要内容列在附录 1，习题答案作为附录 2，供读者查核。

由于我们的思想认识、业务水平以及教学经验都很肤浅，书中缺点错误在所难免，希望广大读者批评指正。

编　者　1977 年 6 月

目　录

第一章 行 列 式

在生产实践中，一些变量之间的关系可以直接地或近似地表为线性函数，因此研究线性函数是非常重要的问题。线性代数主要是研究线性函数，在线性代数中线性方程组是一个基础部分，也是一个重要部分。研究线性方程组首先需要行列式这个重要工具。“**数学是从人的需要中产生的**”。行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的。它在数学本身或在其他科学分支上（譬如物理学、力学等）都有广泛的应用。在这章主要讨论下面三个问题：

1. 行列式概念的形成；
2. 它的基本性质及计算方法；
3. 利用行列式求解线性方程组。

这章分 4 节，§1 解答第 1 个问题；§2、§3 解答第 2 个问题；最后§4 解答第 3 个问题。

§1. 行列式的概念

在中学代数中，我们早已学过用 2 阶行列式解两个未知量的线性方程组，用 3 阶行列式解三个未知量的线性方程组。一般，n 个未知量的线性方程组是否也能这样求解？ n 阶行列式就是根据这个需要产生的。这节的目的就是建立 n 阶行列式的概念，解答上面提出的第 1 个问题。

就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事

物，逐步地扩大到认识一般的事物。我们先从在中学代数中已经学过的用行列式求解线性方程组开始。

我们先来解两个未知量 x_1，x_2 的线性方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\tag{1}$$

这里 b_1, b_2 是常数项，a_{ij} 叫做 x_j 的系数，它有两个附标，第 1 个附标 i 表示它在第 i 个方程，第 2 个附标 j 表示它是第 j 个未知量的系数，譬如 a_{12} 就是第一个方程中 x_2 的系数。用消元法，消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

同样，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

因此当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，我们有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\tag{2}$$

这就是说满足(1)的 x_1, x_2 就是(2)，或者说假如(1)有解，那末这解就一定只是(2)；把(2)代入(1)直接验证，得知(2)的确是(1)的解。所以这时(2)就是(1)的唯一解。

为了便于记忆这个表达式，我们引进记号

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

叫做 2 阶行列式。它含有两行，两列。横写的叫做行，竖写的叫做列。行列式中数又叫做行列式的元，a_{12} 就是在第 1 行、第 2 列上的元。从上式我们得知，2 阶行列式是这样两个项的代数和：一个是在从左上角到右下角的对角线(又叫做行列式的主对角线)上两元的乘积，取正号；另一个是在从右上角到左下角的对角线(又叫做行列式的次对角线)上两元的乘积，取负号。譬如

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5-(-2)\times 3=11$$

根据定义，我们容易得知，(2)式中两个分子可以分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

如果我们记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是方程组(1)的唯一解(2)就可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

象这样用行列式来表示解，形状简便，容易记忆。

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+\ \ y=7 \\ \ \ x-3y=-2 \end{cases}$$

解 这时

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-19, \qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-11$$

因此，所给方程组的唯一解是

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7}, \quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}$$

我们再来解三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{3}$$

同上面一样，先从前两式消去 x_3，后两式消去 x_3，得到只含 x_1，x_2 的两个新线性方程；再从这两个新线性方程消去 x_2，就得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&\qquad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\&=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}\\&\qquad -b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3\end{aligned}$$

当 x_1 的系数

$$\begin{aligned}D=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0\end{aligned}$$

时，得出

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3)$$

同样，我们可以求得

$$\left.\begin{aligned}x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3\\-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})\\x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}\\-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

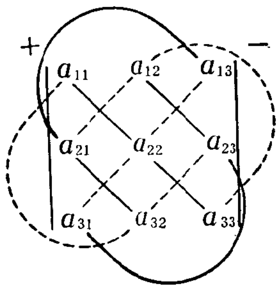
所以，当 $D\neq 0$ 时，如果(3)有解，就一定是上述唯一形式。

同前面一样，为了便于记忆，我们引进 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{5}$$

它含有三行、三列，是6个项的代数和。这6个项我们这样来记忆：在下表中，实线上三个元的乘积构成的三项都取正号，虚线上



三个元的乘积构成的三项都取负号。譬如3阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$
$$=2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times3\times1$$
$$-1\times(-4)\times5-2\times3\times2$$
$$=30+2-24-6+20-12=10$$

于是在上面 x_1, x_2, x_3 的表达式(4)中，分母都是行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而分子是把行列式 D 中第1，2，3列分别换成常数项 b_1、b_2、b_3 得到的行列式 D_1, D_2, D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

因此(4)可以写成简单的表达式

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

它的结构与前面两个未知量的类似。

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x-\ y+\ z=0 \\ 3x+2y-5z=1 \\ x+3y-2z=4 \end{cases}$$

解 这时

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28,\qquad D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,\qquad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21$$

因此

$$x=\frac{13}{28},\quad y=\frac{47}{28},\quad z=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$$

有了 2 阶、3 阶行列式，我们就可以把 $D\neq 0$ 时方程组(1)及方程组 (3) 的解很简单地表示出来。我们在解 n 个未知量的线性方程组时，自然会想到它的解是否也能用 n 阶行列式来表达？首先碰到的问题就是如何定义 n 阶行列式。在前面，我们从两个未知量中消去一个非常容易，但从三个未知量中消去两个就很麻烦，至于一般象上面那样从 n 个未知量中消去 $n-1$ 个简直是不可能的了。因此，我们就不能用上面类似的方法来定义 n 阶行列式。怎

样来解决这问题？遵照毛主席教导："**应当从客观存在着的实际事物出发，从其中引出规律，作为我们行动的向导。**"我们先详细研究2阶、3阶行列式的结构，找出它们的内在规律，根据这些规律来定义 n 阶行列式；然后用它来解 n 个未知量的线性方程组，看是否能达到我们预想的目的。

现在我们从3阶行列式开始，先研究(5)的结构：

1. 首先我们看到(5)中每项都是三个元的乘积，这三个元在不同的行，不同的列。于是(5)的任意项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里 p_1, p_2, p_3 是1,2,3的一个排列。

2. (5)中每项都带有符号，不是正号便是负号，这是根据什么规律确定的？我们知道在主对角线上三个元乘积的项 $a_{11}a_{22}a_{33}$ 是带正号，其他五项中三个元都不完全在主对角线上或都不在主对角线上。带负号的三项 $a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{13}a_{22}a_{31}$ 都只要互换行列式的两行或两列就可以把项中三个元都移到新行列式的主对角线上，譬如 $a_{11}a_{23}a_{32}$，只要把行列式的第2行与第3行互换，a_{11}，a_{23}，a_{32} 三个元就都移到新行列式的主对角线上。但对带正号的其他两项 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 及 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 却都需要两个互换，譬如 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 先互换第1、第2两行，再互换第1、第3两列才行。这样我们就得到(5)中各项带符号的规律：用互换两行或互换两列的方法把乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 中三元都移到新行列式的主对角线上，当互换的个数是偶数时，$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 带正号，当互换的个数是奇数时带负号。

3. 因为1, 2, 3共有 $3!=6$ 个不同排列，所以(5)是6个项的代数和。

于是3阶行列式(5)可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

上面这些规律对 2 阶行列式显然也成立。假如把这些规律作为定义，那末 2 阶、3 阶行列式的定义就统一了。

共性包含于个性之中，现在我们就根据这些规律定义 n 阶行列式如下：

假定有 n^2 个数 a_{ij}，$i,j=1,\cdots,n$，把它们排列成一个有 n 行、n 列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做 n 阶行列式。a_{ij} 叫做第 i 行、第 j 列上的数或元。n 阶行列式是所有这些项的代数和：

1. 每项是 n 个元的乘积，每行一个，每列一个，因此它可以写成下面的一般形状

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中第 1 个附标是按 $1,2,\cdots,n$ 的顺序排列，第 2 个附标 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列。

2. 每项带的符号这样来确定：逐次互换两行或两列，把其中 n 个元都移到新行列式的主对角线上时，所需要互换的个数如果是偶数就带正号，如果是奇数就带负号。

3. 因为 n 个数字的所有排列共有 $n!$ 个，所以这样的项共有 $n!$ 个，用式子表示就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

这里$\sum$是对$1,2,\cdots,n$的所有排列$p_1,p_2,\cdots,p_n$取和，而$\pm$号就是按上面规定确定。

我们还规定由一个元a构成的一阶行列式就是a本身。

下面根据定义计算两个最基本也是最简单的行列式。

例 3 证明对角形行列式(其中未写出的元都是零)

$$\begin{vmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{vmatrix}=a_1\cdots a_n,\quad \begin{vmatrix} & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_n & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1\cdots a_n$$

证 依定义，第1式是显然的。下面只证明第2式。

在第2个行列式中，不为零的项只有一项$a_1\cdots a_n$，它的符号也不难确定。我们把第1行与第n行互换，第2行与第$n-1$行互换，这样继续下去，就可以把$a_1,\cdots,a_n$都移到新行列式的主对角线上，当n是偶数时，需要$\frac{n}{2}$个互换，当n是奇数时，需要$\frac{n-1}{2}$个互换，因此这项的符号，当n是偶数时，是$(-1)^{\frac{n}{2}}$，当n是奇数时，是$(-1)^{\frac{n-1}{2}}$。现在我们把这两个不同的表示统一起来。我们知道$+1$的奇次方是$+1$，-1的奇次方是-1，也就是说，不论是$+1$或-1，它的奇次方仍然是自身，不会改变。因此当n为偶数时，$n-1$是奇数，所以$(-1)^{\frac{n}{2}}=[(-1)^{\frac{n}{2}}]^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；当$n$是奇数时，$(-1)^{\frac{n-1}{2}}=[(-1)^{\frac{n-1}{2}}]^n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。所以不论$n$是偶是奇，这项的符号是$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，于是第2式成立。

第2式我们也可以这样来证明，先将行列式中第n行顺次与它前面的相邻行互换，经过$n-1$个相邻互换后，第n行就移到新行列式的第1行；再将新行列式的第n行(即原行列式的第$n-1$行)顺次与它前面相邻行互换，经过$n-2$个互换就移到新行列式

的第 2 行；这样继续下去，经过

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

个互换后，$a_1, \cdots, a_n$ 都移到新行列式的主对角线上，所以第 2 式成立。

要注意把一行顺次与它相邻的行互换，这样互换的特点是不改变其他各行的顺序，这一点在这里不是必要的，但后面要用到它。

下面是比对角形行列式更广泛的三角形行列式。

例 4 证明三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

证 先证明第 1 式，我们来考察在第 1 式中不为零的项有哪些？取一般项

$$\pm a_{1p_1}\cdots a_{n-1,p_{n-1}}a_{np_n}$$

因为行列式的第 n 行除 a_{nn} 外，其他各元都是零，所以 p_n 只能取 n，即 $p_n=n$；再因为第 $n-1$ 行除 $a_{n-1,n-1}$，$a_{n-1,n}$ 外，其他各元都是零，又因为在行列式的每列只能取一元，前面已取 $p_n=n$，因此这时只能取 $p_{n-1}=n-1$；一般，p_i 只能取 i 即 $p_i=i$，取其他元的项都是零。因此在行列式中除一项 $\pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外，其余项都是零。这项的符号显然是正的，所以第 1 式成立。

同样我们可以证明，在第 2 式中可能不为零的项只有