

数值模式中的谱方法

雷兆崇 章基嘉 编著



气象出版社

P456.7

LZC

数值模式中的谱方法

雷兆崇 编著
章基嘉

TU24/07

气象出版社

106878

内 容 简 介

本书比较简明、系统地介绍了七十年代以来在数值天气预报和大气环流模式中得以广泛应用的谱方法，内容涉及谱方法的基本原理、球坐标系中的简单谱模式、欧洲中期天气预报中心的业务谱模式以及谱方法在长期天气预报研究中的应用等。在叙述有关的计算方法时，注意到补充必需的数学基础知识，力求循序渐进，易读易懂。

本书可供具有大专水平的气象工作者使用，亦可作为气象、气候专业高年级学生、研究生的教学参考书。

数值模式中的谱方法

雷兆崇 章基嘉 编著

责任编辑 杨长新

* * *
气象出版社 出版

(北京西郊白石桥路46号)

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

北京印刷一厂排版 北京燕华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：7.75 字数：173千字

1991年6月第一版 1991年6月第一次印刷

印数：1—1000 定价：5.65元

ISBN 7-5029-0523-5/P·0300

前 言

谱方法在大气数值模式中的应用,其历史可追溯到1942年苏联学者布林诺娃(Блинова)利用球谐函数展开的线性化模式来制作长期天气预报的工作,在其后的数十年间,谱方法本身的许多理论和实践问题逐步得到解决。与传统的有限差分法相比较,谱方法显示出很多优点,其应用也日趋广泛。尤其是在七十年代,谱模式中非线性项计算的变换法的提出,标志着谱方法的研究和应用取得实质性的突破,从而导致澳大利亚、加拿大、美国、法国、日本等许多发达国家的天气预报业务部门和欧洲中期天气预报中心(ECMWF)都先后将谱模式引进了日常业务应用,并且在许多大气环流模式、气候模式和长期天气预报的研究工作中也广泛地应用了这一方法。

我国早在七十年代初期就开展了对谱模式的研究,并取得了一定的成就。目前,我国正在研制具有更高垂直和水平分辨率、物理过程的考虑更加完善、全球范围的中期数值天气预报谱模式,预计在不久的将来即会投入实时预报业务使用。

本书作为一本介绍数值模式中的谱方法的专题教材,从1986年开始给南京气象学院天气动力学专业和气候学专业的研究生班已连续讲授了多次,受到学生们的普遍欢迎。现在加以补充修改出版,希望能够为气象科技工作者和大专院校气象专业的本科生和研究生提供一本较为通俗易懂的学习谱方法的参考读物。本书的主要内容在于较系统地介绍谱方

法的基础知识，球坐标系中正压涡度方程和斜压初始方程的谱模式，最后还介绍了谱方法在长期天气预报的基础理论研究中的若干应用，其中部分是我们自己所做的研究工作。

本书的编写和其中涉及的一部份研究工作是按照国家气象局《长期天气预报的理论、方法和资料库研究》项目第一分课题组的研究计划，并在总课题组的指导和资助下进行的，因此，作者对该课题组的支持和指导表示深切谢意。

数值计算方法的改进已被世界气象组织(WMO)列为全球大气研究计划(GARP)的一个重要组成部分，目前仍有不少气象学家致力于这方面的研究工作。例如在谱方法的应用方面，国内外都在研究有限区域的谱模式，在谱模式中应用有限元法进行垂直方向上的离散化以及时间积分方案的准拉格朗日方法等，在作者编写本书时，这些研究尚未达到成熟阶段，因此在书中没有涉及，有兴趣的读者可以参阅有关文献。

此外，有限差分格点模式仍有其简明直观的相对优点，至今仍被一些国家的数值预报业务和气候模拟研究工作中所采用，但这已经超出了本书的范围。

由于作者学识水平所限，书中差错和缺陷在所难免，恳切欢迎读者批评指正。

作者

1989年2月19日

目 录

前言

第一章 引言	(1)
§ 1 谱模式发展的历史回顾	(2)
§ 2 谱方法的优缺点	(5)
§ 3 谱方法的实用价值	(7)
第二章 谱方法基础	(13)
§ 1 谱方法的基本原理	(13)
§ 2 线性平流方程	(19)
§ 3 非线性平流方程	(45)
第三章 球坐标系中的简单谱模式	(76)
§ 1 对球面上因变量和展开函数的选择	(76)
§ 2 球谐函数及其性质	(78)
§ 3 截断问题	(86)
§ 4 计算方法	(95)
§ 5 正压涡度方程谱模式	(110)
§ 6 正压涡度方程谱模式的积分性质	(125)
第四章 斜压初始方程谱模式	(128)
§ 1 控制方程组	(128)
§ 2 基本变量和谱展开式	(142)
§ 3 截谱方程和谱倾向值的计算	(146)
§ 4 垂直方向上的离散化	(148)
§ 5 时间积分方案	(157)
§ 6 水平扩散	(164)
第五章 谱方法在长期天气预报研究中的应用	(167)

§ 1 初始资料、非绝热热流量和水平平流对长期天气过程的 贡献.....	(167)
§ 2 大气定常波的斜压初始方程谱模式	(179)
§ 3 气象场长期预报的一个谱模式	(216)
参考文献	(234)

第一章 引 言

1922年 L.F. Richardson 首次提出的关于数值天气预报的设想^[1], 终于在大约三十年之后由 Charney 等人 (1950)^[2] 在普林斯顿的高等研究所的 ENIAC 计算机上被实现了。他们应用正压过滤模式第一次成功地制作了 24 小时的数值预报。近三十多年间, 气象学家对于表示大气运动状态的数值模式进行了持续不断的改进, 以致数值天气预报方法已在许多国家的气象短期预报业务中占据主导地位。

目前, 数值预报方法不仅能作形势预报, 也能作具体天气现象和气象要素场的预报, 不仅能作一个国家或地区的预报, 也能作半球和全球范围的预报; 不仅能作短期预报, 也能做中期预报, 甚至在长期预报领域也进行了不少令人鼓舞的试验, 并且各类数值天气预报的准确率也有了明显的提高。

在气象理论研究方面, 各种不同类型的数值模式已被广泛地应用于全球大气环流的数值模拟、大尺度运动的动力学过程、大气环流的异常、全球气候的变迁, 以及各种中、小尺度的天气现象、大气污染物的扩散、积云动力学的微物理过程等许多研究领域, 并已取得了相当大的成功, 从而使得数值模式正在成为一种十分重要的“实验”工具。

全球或半球范围的大气数值模式的进展, 一方面表现在逐步减少了模式方程组中所取的各种近似, 改进了模式中所包含的各种物理过程的参数化方案, 使之能够更准确、更真实、更全而地反映实际大气中的各种动力和热力过程, 另一方

面也表现在模式的水平和垂直分辨率在不断地提高。当然,这两个方面的进展都是与计算机技术迅速发展紧密地联系在一起。与此同时,用于将连续的偏微分方程离散化的数值方法也变得更加完善和精确了,从而缩小了求偏微分方程数值解的误差。数值计算方法的改进是许多国家的科学家经过长期不懈努力而取得的成果,这一研究领域已经被世界气象组织(WMO)确定为全球大气研究计划(GARP)的一个组成部分,不少科学家仍在继续进行这方面的研究工作。

这里我们所说的求解偏微分方程数值方法的研究,应当既包含相对于空间也包含相对于时间的离散化,但是在本书之中,我们讨论的主要是与前者有关的计算方法,虽然有时候也涉及时间积分方案问题。

§ 1 谱模式发展的历史回顾

直到 1972 年,几乎所有的数值天气预报模式都是以有限差分方法为基础的,所以这类模式又被称为网格点模式。数值天气预报和大气环流数值模拟的实践已经证明,有限差分法是求解流体动力学方程组的一种有效方法。当时有的气象学者甚至认为,其他一些数值方法,如谱方法、有限元法等,与其说它们是在日常预报和大气环流模式中潜在的可以取代有限差分法的实用算法,倒不如说是某种数学游戏。然而,在过去的二十余年中,随着有限元法和谱方法在流体动力学、理论和应用物理学中的广泛应用,气象学家对它们又重新产生了浓厚的兴趣。

关于谱方法在大气数值模式中的应用,其历史可以上溯到 1942 年苏联学者布林诺娃的工作^[3],她曾提出利用球谐函数展开的线性化模式来制作长期天气预报。1952年 Haurwitz

和Craig也提出过用类似的展开式来表示大气的运动型式^[4], 1954年Silberman则借助于球谐函数求解了无辐散的正压涡度方程^[5]。随后,还有许多作者对谱方法在大气数值模式中的应用进行了研究,比较重要的有Lorenz(1960)^[6], Platzman(1960)^[7], Kubota et al. (1961)^[8], Baer and Platzman(1961)^[9]以及Elsaesser(1966)^[10]等人的工作,这些研究说明了谱模式具有某些突出的优点。例如Lorenz的工作^[6]证明了正压无辐散流动的谱截断方程,与其对应的精确的微分方程一样,具有总动能和总涡度平方守恒的性质。Platzman^[7]指出,这一性质可以自动地消除数值计算的非线性不稳定,而这种非线性不稳定在当时正是网格点模式中所存在的最主要的困难之一。

虽然在这一阶段关于谱方法的研究工作确实取得了一定的进展,但是这种方法并未达到实用的程度,其主要原因在于:随着模式分辨率的提高,总的计算工作量以及对计算机存储容量的要求都迅速增加,从而超出了当时计算机的水平,这主要是由于当时在计算二次型的非线性项时采用了相互作用系数法的结果。另外一个重要原因是当时尚未解决如何在谱模式中包含各种物理过程的问题,因为物理过程的参数化往往涉及到局地气象要素值,所以很难用谱系数来表达。由于这两方面的原因,在当时流行着这样的观点,即认为谱方法仅仅对于有限的一些理论问题而言是一种具有吸引力的、精确的计算方法,其用途主要是适用于某些对模式分辨率的要求非常低的场合,而对于日常的数值天气预报则用处不大。

1965年Cooley等人提出了快速傅氏变换(FFT)^[11]后,大大地提高了谱方法的计算效率。Robert在1966年又说明了如何将展开函数分解为较为简单的形式以解决计算机内存

容量不够的问题^[2],前面提到的影响谱方法的实用性的第一个原因在一定程度上得到了解决,然而物理过程的参数化在谱模式中所遇到的困难却依然存在。

在大气数值模式的谱方法研究中,一个实质性的突破是在1970年发生的。这一年,Eliassen et al.^[13]和Orszag^[14]各自独立地提出了采用“变换法”(transform method)计算非线性项的方案。根据此方案,非线性项的计算可按以下三个步骤进行:

(1) 把有关物理量场从谱空间变换到几何空间,计算出各个空间格点上的物理量值;

(2) 与传统的网格点模式一样,在每一个格点上直接计算各非线性项的值;

(3) 进行从几何空间到谱空间的逆变换,即根据那些非线性项的格点值计算它们所对应的谱系数。

上述计算非线性项的变换法,与以前所用的相互作用系数法相比较,具有两个明显的优点:第一是所需计算量大大减少,对计算机内存容量的要求大大降低,从而在同样的计算条件下,可以显著地提高模式的分辨率;第二,如同网格点模式一样,变换法很容易将各种物理过程直接引进谱模式之中。由此可见,变换法的提出消除了妨碍谱方法实用化的两个主要障碍,为谱模式的发展和应用铺平了道路。

七十年代初期,Eliassen et al.(1970)^[13],Bourke(1972)^[15],Machenhauer和Rasmussen(1972)^[16]等人将变换法用于一层初始方程谱模式,获得了令人鼓舞的结果。在他们探索性的工作基础上,世界上有好几个研究小组分别制作了更为复杂的多层次的半球或全球范围的谱模式,于1974年在哥本哈根举行的关于谱方法的国际学术会议上报告了他们所设

计的模式以及所做的初步试验^{[17]-[21]},并先后发表了有关论文^{[22]-[27]}。这些研究工作导致了澳大利亚和加拿大在1976年就开始应用谱模式作日常天气预报。随后,美国从1980年、法国从1982年、日本和欧洲中期天气预报中心从1983年,也相继将谱模式投入了日常业务应用。鉴于谱模式的高效率和特别适合于长时间的全球积分,许多大气环流模式也应用了谱方法。

从1974年 Bourke 等人研制出第一个初始方程斜压谱模式以来,不到十年时间,谱方法就成为在处理半球或全球大气问题中应用最广泛的计算工具,这表明谱方法确实具有强大的生命力,但是这并不意味着天气预报的数值方法已经发展到了顶点。目前,尚有其他一些计算方法正处于探索研究之中,一旦这些方法在应用中所遇到的难题获得了解决,就有可能产生出在相同精度下新的更为有效的计算方法来。

在我国,郑庆林也进行了谱模式的研究,并从1974年9月开始利用北半球三层准地转谱模式进行了较多个例的预报实验,其72小时以内的预报效果是比较好的^[28]。后来他又于1976年做出了北半球七层初始方程谱模式的个例预报^[29],在该模式中还考虑了地形和动量、热量的水平扩散等物理过程。总的看来,由于计算条件的限制,我国在谱模式的研究和应用方面比世界先进水平尚有一定的差距。目前,我国正在研制具有更高的垂直和水平分辨率、物理过程的考虑更加完善、全球范围的中期数值天气预报谱模式,不久将会投入业务使用。

§ 2 谱方法的优缺点

与经典的网格点模式相比较,谱模式在实践中具有计算

精度高、稳定性好、模式程序简单而有效的突出优点。具体说来，其优点主要表现在以下几个方面：

(1) 计算空间微商精确，从而使得用谱方法估计的位相速度比一般差分法估计的要准确，文献[30]、[31]、[32]的计算，都说明这一点。

(2) 对于二次型的非线性项的计算，消除了非线性混淆现象，可避免由此引起的计算不稳定。

(3) 用谱方法来求解球坐标下的控制方程组，不需要象有限差分法那样，对球面网格中的极点做特殊处理，因而特别适合于全球或半球模式。后面我们还要谈到，三角形截断的球谐函数展开式，可以得到在整个球面均匀的水平分辨率，这是网格点法难以完全做到的。

(4) 在谱模式中易于应用半隐式时间积分方案，其计算程序比网格点模式简单，节省的计算机 CPU 时间也要更多一些。

(5) 谱方法能自动并彻底地滤去短波，效果比一般差分法中用平滑算子要好。

(6) 由于在全球模式中通常选择球谐函数作为谱展开式的基函数，而球谐函数正好是球面上的 Laplace 算子的特征函数，所以在模式中计算 ∇^{2p} (p 为正整数) 型的水平扩散项非常方便。基于同样的理由，用谱方法解泊松 (Poisson) 方程或赫姆霍兹 (Helmholtz) 方程也特别方便，不需进行迭代。

上述谱方法的优点，在本书后面有关章节中还要加以讨论，这里就不详细解释了。一切事物都是一分为二的，谱方法当然也有缺点，按文献[33]，其缺点主要有：

(1) 运算量和存储量均较大，较小的电子计算机不易实

现。特别当模式的水平分辨率提高时，谱方法的计算量比格点法增加得更快。

(2) 对分布不太连续的物理量，容易发生吉布斯(Gibbs)现象，需要用较多的谱分量才能表示。

(3) 当 $m \neq 0$ 时，在高纬度连带勒让德函数 $P_{m,n}(\mu)$ 的值很小，用球谐函数展开地形高度，误差较大。

(4) 制作有限区域或套网格预报，不如差分法灵活方便。

§ 3 谱方法的实用价值

在上一节，我们已经简要地列举了谱方法的若干优缺点，很自然地就会产生这样的问题：权衡谱方法的利弊，其实用价值(或者说使用效率)到底如何呢？

谱方法所具有的优点是比较重要的，虽然其计算工作量比较大，但是随着谱方法本身的不断完善和电子计算机的迅速发展，它的应用越来越广泛，正在全球大气模式中逐步取代传统的网格点模式，成为许多国家日常业务预报模式。这就说明谱方法有较高的实用价值和使用效率。这里所说的效率较高，意思是说在用数值方法求解模式的控制方程组时，如果获得同样的计算精度则其耗费的计算机资源(计算工作量、占用存储量等)较少，或者在耗费的计算机资源相同的条件下获得的计算精度较高。

由于谱模式的精度高、稳定性好，我们可以预期，具有一定自由度(指预报量的谱系数的个数)的谱模式做出的预报，其准确程度可以相当于自由度(指预报量的格点值的个数)高得多的对应的网格点模式，但是另一方面，一个自由度平均所需的计算量，谱模式通常要多于格点模式。因此，我们在评

价谱方法的效率时，应该综合考虑以上两个方面的因素，而将谱模式和格点模式进行对比预报试验则是一种实际可行的评价方法。

最早从气象学的角度对谱方法和格点法进行比较的是 Ellsaesser(1966)^[10]，他比较了用半球过滤正压谱模式和格点模式根据实际初始资料所作的 36 小时预报。其中格点模式是 1962 年美国国家气象中心(NMC)的业务模式，应用了极射赤面投影坐标中的八边形网格，在半球范围内共 1977 个格点(在 45°N 相当于约 400 千米的格距)。谱模式的非线性平流项的计算应用了相互作用系数法，谱展开式用平行四边形截断并取截断波数为 12 和 18 两种情形(分别记为 R12 和 R18)，其对应的模式自由度分别为 150 和 330(参阅第三章 § 3)。两种模式的时间积分均采用了蛙跃格式。由于格点模式的相速度误差较大，Ellsaesser 发现上述格点模式的预报效果大致相当于 R18 谱模式，而比较两者所耗费的机时，他发现格点模式所用机时约为谱模式的 2 倍，可见谱模式的效率较高。由于相互作用系数法的计算量可达截断波数的 5 次方量级，同时还要求很大的存储量，可以想象，上面提到的谱模式节省机时的优点，随着模式分辨率的提高是不可能继续保持的，这两种方法效率的高低很快会发生逆转。

在有了变换法之后，Doron 等人(1974)^[84]，Simmons 和 Hoskins(1975)^[35] 又用初始方程模式对这两种方法做了进一步的比较。前者用的是正压模式，而后者用的是五层斜压模式，都没有包含地形、湍流扩散、对流、地表通量和辐射等物理过程的参数化。他们的实验证实，当分辨率增加时，格点法和谱方法都收敛于一个共同的解。然后他们将低分辨率时格点模式和谱模式的时间积分与对应的高分辨率模式积分(此

时两种方法得到的结果几乎相同) 进行对比。低分辨率的格点模式选取了 5° (经度) $\times 3^{\circ}$ (纬度)的网格, 而谱模式选择了截断波数为 16 的平行四边形截断(R 16), 从而使得谱模式的存储容量小于格点模式, 计算时间则等于或少于格点模式。

Doron 等人的试验选用了纬向波数 m 为 4 和 8 的 Rossby-Haurwitz 波作初始条件, $m = 4$ 的波在移动过程中波形和振幅都很少变化, 而 $m = 8$ 的波在 5 个模式日之内表现出很大的变化。试验结果说明, 前述两个低分辨率模式几乎能同样好地预报 $m = 4$ 的波, 但是对于 $m = 8$ 的波直到第 5 个模式日为止谱模式都明显地优于格点模式, 特别是谱模式能够刻画出比较快的变化, 而格点模式却显得无能为力。第 5 日之后, 谱阻塞(spectral blocking)现象变得严重起来, 使得低分辨率谱模式的解开始偏离高分辨率谱模式的解。

Simmons 和 Hoskins 则模拟了发展中的斜压波, 试验结果表明谱方法在预报大尺度斜压波的发展方面优于格点法, 但是格点模式分辨强锋区附近小尺度特征的能力则较强。不过, 由于这种分辨率较低的模式所预报出的小尺度特征, 无论是出现的时间还是位置都不准确, 其实用价值是很成问题的。

关于初始方程谱模式在短期天气预报中的应用以及与格点业务模式的比较, Bourke 和 Daley 等人在文献[24]、[26] [27]中曾做过论述, 他们的研究也对谱模式的效率作出了肯定的评价, 从而导致澳大利亚气象局决定从 1976 年 1 月起利用七层 R15 谱模式、加拿大气象中心从 1976 年 2 月起采用五层 R20 谱模式制作半球范围的业务预报。这说明谱方法不仅在精确性方面而且在计算效率方面都可以与有限差分法相竞争的一种行之有效的计算方法, 至少当它应用于短期天气预

报、相对于 1976 年时业务模式的分辨率来说是如此。

那么，对于具有更高分辨率并且积分时间更长的中期天气预报模式，情形又如何呢？早在欧洲中期天气预报中心 (ECMWF) 选择了传统的网格点模式作为它的第一个业务模式的时候，就决定平行发展并试验谱模式，这就为全面系统地对这两类模式进行比较提供了一个极好的机会。下面我们就来简单地介绍一下 Jarraud 等人所做的对比性研究^[86]、^[87]。

这一研究中所用的格点模式即是当时 ECMWF 的业务模式(参阅[38]或[39])，垂直方向用 σ 坐标，共分为 15 层，水平方向是经纬度坐标，格距取为 $1.875^\circ \times 1.875^\circ$ ，由于极点和赤道之间共 48 个格距，所以此模式简称为 N48。谱模式采用三角形截断，截断波数为 63，所以简称为 T 63，其垂直分层和差分格式均与 N 48 相同。这两个模式的时间积分方案都采用半隐式格式，N 48 的步长为 15 分钟，T 63 为 18 分钟。除了水平扩散外，它们应用了完全一致的非绝热过程参数化方案^[40]，考虑了辐射、大尺度凝结、湿对流作用、边界层和垂直湍流通量等物理过程。在 N 48 运行过程中，参数化方案有一些小的变化，T 63 也作了同步的变化，以保持二者的一致。

由于此项研究的目的是要考察是否可以用谱模式来代替 N 48 作为业务模式，所以在设计谱模式时已选择其水平分辨率使之与 N 48 所耗费的计算机资源大致相当。T 63 谱模式的对比试验从 1979 年 9 月至 1980 年 8 月每个星期定期进行一次，共有 53 个预报个例，每次积分 10 天，基本上包含各类天气形势。两个模式的初始条件都是用的 ECMWF 日常客观分析资料。

通过这 53 个预报个例的分析，Jarraud 等人得到这样一