

画法几何习题集

——附程序设计基础

[苏] B. E. 米哈伊连柯 主编



机械工业出版社

画法几何习题集

——附程序设计基础

〔苏〕 B.E.米哈伊连柯 主编

陈启梁 洪时凯 译

梁德本 校



机械工业出版社

本书译自苏联B. E. 米哈伊连柯主编的《画法几何习题集》1980年俄文再版本。该书是按照苏联高等工科院校画法几何课程的教学大纲编写的。全书共分十一章，每章均简要阐述了有关理论，并有各类练习题，适时地给出一些示范性解题方法。编者设计了三个类算法和六个亚类算法，并根据学生的程度，提供了高、中、初三类不同水平的解题途径。书末有练习题的答案。

本习题集自成体系，结构严谨，取材广泛，可以不依赖于教材而独立出版，是一本自学程序解题法的指导书，可供高等工科院校师生参考。

**Сборник задач по начертательной
Геометрии с элементами программирования**

В. Е. Михайленко

Издательского объединения

《ВУЗЫ ШКОЛА》 1980

画法几何习题集

——附程序设计基础

〔苏〕B. E. 米哈伊连柯 主编

陈启梁 洪时凯 译

梁德本 校

责任编辑：林瑞玉 王正琼

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 850×1168 $1/32$ ·印张 8 $3/4$ ·字数 227 千字

1987年11月北京第一版·1987年11月北京第一次印刷

印数 0,001—3,600·定价：2.60 元

统一书号：15033·6852

GF72/22

译 者 的 话

电子计算机作为辅助脑力劳动的工具,已经广泛渗入社会的各个部门。计算机绘图及图形显示是当今兴起的电子计算机辅助设计(简称CAD)的一个主要内容。因此,一个新的学科——计算机图学——已经引起工程图学学术界的重视。在高等工科院校的画法几何及工程制图课程的教学,培养学生用程序设计方法,运用计算机解题及画图,既是今后学习和开发CAD技术的需要,也是本课程教学改革的一个重要方向。苏联B. E. МИХАЙЛЕНКО教授等编写的画法几何习题集为这种教学提供了一本良好的教材。

这本习题集有以下特点:

首先,这本习题集不是题目的简单堆砌,而是按程序设计步骤编排的。编者设计了三个类算法和六个亚类算法,在此基础上使整个画法几何的内容和题目系统化了。

第二,这本习题集可以作为自学用程序设计方法解题的指导书。每章开头,简要阐述了有关理论,适时地给出一些示范性解题方法(见附录一)。编者别具匠心,根据学生的程度,设计了供高、中、初三类不同水平的解题途径。书末附有全部练习题的答案(见附录二),供学生核对。

第三,这本习题集取材广泛,内容丰富。编者把基辅建筑工程学院画法几何及工程制图教研室的研究成果——新颖的、有实用价值的一些画法几何解题方法贡献给读者。

尽管国内尚无画法几何程序设计方面教科书的译著,但由于这本习题集自成体系、结构严谨,因而可以单独出版。

本书由陈启梁翻译前言、第1~6章、第12章、附录一、附录二,洪时凯翻译第7~11章。译文经清华大学画法几何及工程制图教研室梁德本副教授悉心校核,译者对此谨表谢忱。

译者 1986.1

前 言

目前,在高等学校的教学工作中,既要增加课程的门数,又要求减少各门课程的课时,因而提高教学效率就成为一个非常尖锐的问题。在教学过程中运用程序教学和现代的技术手段对于解决这一问题具有重要的意义。

学生们学习画法几何往往会感到困难,对于函授学生更是如此。经验表明,在画法几何课程中引进程序设计的基础知识,有利于改进教学工作和提高学生脑力劳动的效率。程序教学就是把教材分成小块,严格地按顺序排列,并有一定的检查教学效果的方法,以建立学生与教师之间的联系,从而可以控制教学过程。

为此,1967年曾以乌克兰文出版了第一本画法几何的程序教学课本《工程画法几何》,1975年用俄文再版了此课本。

本习题集与上述课本组成一套必备的教学用书,学生利用这套书就可以顺利地掌握画法几何课程。但这并不是说只能用这一套书。本习题集的每一章都有理论简述,然后,列出了推荐给学生的六本参考课本的有关章节,在这些章节里对于相应的教学材料有详尽的阐述。

本习题集的编排方式如下:每章的开始是简述解题所需的理论,然后是练习题。如果学生解不出第一类练习题(带字母“a”),可以转而去求解比较容易的第二类练习题(带字母“b”),然后再返回做第一类练习题。全部练习题都附有答案。这样,学生可以核对自己的解题是否正确。正确的解题,其标注符号是 $\oplus$;错误的解题,其标注符号是 $\ominus$ 。做完每个练习题后,根据解题的正确与否,确定下一步应怎样做。

如果学生正确地完成了全部带字母“a”的练习题,就可以进而求解作业题(见解题路线图)。

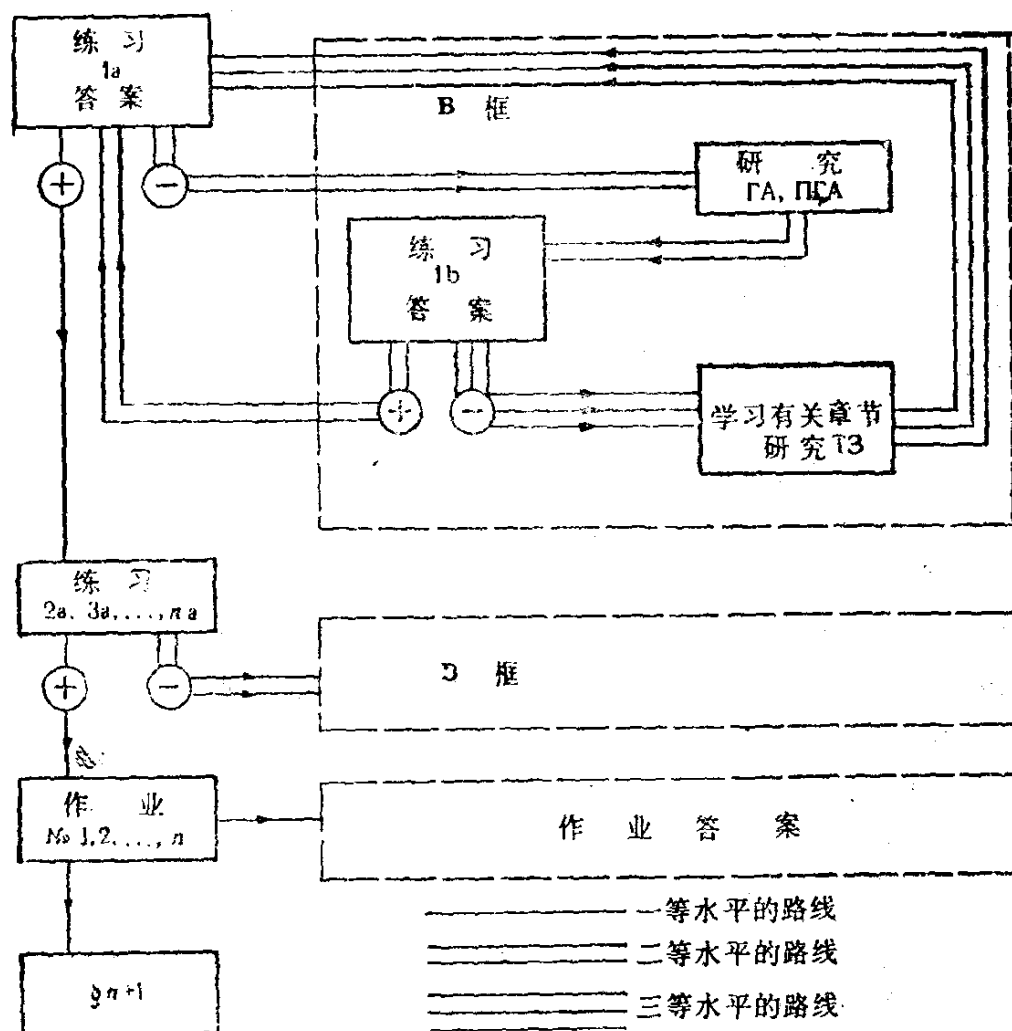
本习题集的主要特点是:题目的求解是以掌握算法为基础,也就是以掌握能导致正确结果的某一个运算为基础。本书编排的

是三个类算法(ΓA) 和以此为基础的六个亚类算法(ΠΓA), 从而使画法几何的题目系统化了。

在画法几何及机械制图课的教学大纲里, 现在已经提出根据相应算法用电子计算机求解画法几何题目的问题; 本书是首批这类书籍之一。在本习题集中, 研究了求解定位问题和度量问题的各种方法, 列举了必要的解题示范, 还编排了独立作业题。

本习题集的另外一个特点是编入了基辅建筑工程学院画法几何及制图教研室研究的各种题目的一些新解法。例如用封闭对应(三元组) 作平面曲线; 沿预定的二次曲线截交二次曲面; 不可展表面的近似展开; 作二次曲面的法线等。

不同学识水平进行解题的路线



符 号[⊖]

$A, B, C, \dots$
 $1, 2, 3, \dots$
 $I, II, III, \dots$

——空间的点

$a, b, c, \dots$ ——空间的直线或曲线

h ——水平线

f ——正平线

p ——侧平线

$\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Phi, \Sigma, \Omega$ ——平面或曲面

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$
 $\angle \alpha, \angle \beta, \angle \gamma, \dots$

——平面角

Π ——投影面

Π_1 ——水平投影面

Π_2 ——正投影面

Π_3 ——侧投影面

基本投影面

$\Pi_4, \Pi_5, \dots$ ——辅助投影面

K ——对应平面（第二、第四象限的平分面）

x_{12}, y_{13}, z_{23} ——投影轴（投影面的交线）

O ——坐标原点

x', y', z' ——轴测轴的投影

O' ——轴测坐标原点的投影

$A_1, A_2, A_3, \dots$ ——点 A 在投影面 $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ 上的投影

$a_1, a_2, a_3, \dots$ ——线 a 在投影面 $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ 上的投影

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$ ——面 Φ 在投影面 $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ 上的投影

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ——平面角 α 在投影面 $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ 上的投影

$Oxyz$ ——自然坐标系

S, T, U ——投射中心

s, t, u ——投射方向

⊖ 本习题集采用的符号是苏联高等教育部专家鉴定委员会推荐的规定标记和一些通用符号。

x_{14}, x_{25} ——更换投影面时的新投影轴

$A_4, A_5, \dots$ ——点 A 在一次、二次……变换后的新投影

Π' ——轴测投影面

$A', B', C', \dots$ ——点 $A, B, C, \dots$ 的轴测投影

$a', b', c', \dots$ ——线 $a, b, c, \dots$ 的轴测投影

$\alpha', \beta', \gamma', \dots$ ——平面角 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 的轴测投影

A'_1, A'_2, A'_3 ——点 A 在投影面 Π_1, Π_2, Π_3 上的次投影

a'_1, a'_2, a'_3 ——线 a 在投影面 Π_1, Π_2, Π_3 上的次投影

$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ ——平面角 α 在投影面 Π_1, Π_2, Π_3 上的次投影

$\parallel$ ——平行

$\perp$ ——垂直

$\cap$ ——相交

$=$ ——结果

$\equiv$ ——重合、恒等

$\in, \ni$ ——元素属于集 (例如 $A \in a$ ——点 A 属于直线 a , $a \ni A$ ——直线 a 通过点 A)

$\subset, \supset$ ——子集属于集 (例如 $l \subset \Gamma$ ——线 l 属于面 Γ , $\Gamma \supset l$ ——面 Γ 通过线 l)

$\times$ ——交叉

$\cong$ ——全等

$\cup$ ——连接

缩 写 字

ПГ (Подгруппа) ——亚类

ГА (Групповой алгоритм) ——类算法

ПГА (Подгрупповой алгоритм) ——亚类算法

ТЗ (Типовая задача) ——示范题

МТ (Множество точек) ——点的集合

目 录

第一章 画法几何解题的算法	1
§1 第一类题目——几何图形的投影作图.....	3
§2 第二类题目——定位问题.....	7
§3 第三类题目——度量问题.....	12
第二章 几何图形在正投影体系中投影的性质	22
§4 点的投影及其与坐标系的关系.....	22
§5 直线的投影.....	26
§6 平面的投影.....	31
§7 曲线的投影.....	36
第三章 一对几何图形在正投影体系中投影的性质	44
§8 一对几何图形在投影图上的定位性质.....	44
§9 一对几何图形在投影图上的度量性质.....	51
§10 一对几何图形的互相垂直.....	59
§11 确定两个一般位置的几何图形之间最短距离 和夹角的投影作图.....	62
第四章 投影变换	65
§12 平 移 法.....	66
§13 绕投影面平行线的旋转法	69
§14 直角辅助投射法	72
§15 换 面 法.....	74
第五章 棱面和多面体	77
§16 多面体的投影作图	77
第六章 曲面的形成及其画法 关于曲面分类的概念	82
§17 定形母线曲面	82
§18 变形母线曲面	94
§19 骨架曲面	97
第七章 表面的平截面 线与面相交	101

§20	表面的平截面	101
§21	线与面相交	108
第八章	表面的展开	119
§22	棱面的展开	122
§23	曲面的展开	124
§24	可展构件表面的展开	126
§25	不可展表面的展开	127
第九章	棱面的相交和曲面的相交	130
§26	辅助截平面法	133
§27	辅助投射法	137
§28	两曲面沿平面曲线相交	141
第十章	曲面的切平面	145
§29	过曲面上一点作该曲面的切平面	145
§30	过曲面外一点作该曲面的切平面	148
§31	过非固有点作曲面的切平面	149
§32	过固有直线作曲面的切平面	151
§33	过非固有直线作曲面的切平面	153
第十一章	轴测投影	155
§34	练习和作业	157
第十二章	图解问题的计算机算法	164
§35	求解定位问题和度量问题的计算机算法	168
§36	面上定点的计算机算法	172
§37	两面交线的计算机算法	177
附录一	示范题	182
附录二	答案	226
参考文献		270

第一章 画法几何解题的算法

画法几何学是以作图的方法进行解题为其特征的一门数学学科。画法几何的解题，象解析几何和微分几何的解题一样，几乎没有解析计算和用数值表示的结果。尽管画法几何的题目是各式各样的，但其解法常常是基于一些相同的或类似的作图运算，从而可以把这些题目归纳为一定的“类”和“亚类”。

对于题目的求解，例如定位问题和度量问题的求解，可以使用画法几何的各种方法。最佳解题方法的抉择是极为重要的。所选择的解题方法因题目的条件、研究的对象、对象的空间位置以及其它因素的变化而有所不同。对题目的正确处理是解题得以成功的保证。现介绍画法几何解题的通用步骤如下（与题目的复杂程度和解题方法无关）：

- （1）分析题目的条件。
- （2）建立待求几何图形与已知几何图形之间的关系。
- （3）制定空间解题的合理方案。
- （4）作图，以实现解题方案。
- （5）检验和分析所得的结果。

由于题目的复杂程度不同，每一步骤又各有其特点。

任何一个画法几何题目的解题方案都可写成确定的逻辑序列，这种编为序列的运算方案称为解题的算法。经过分析和归纳，可把画法几何所能解的题目归并为三个基本类：

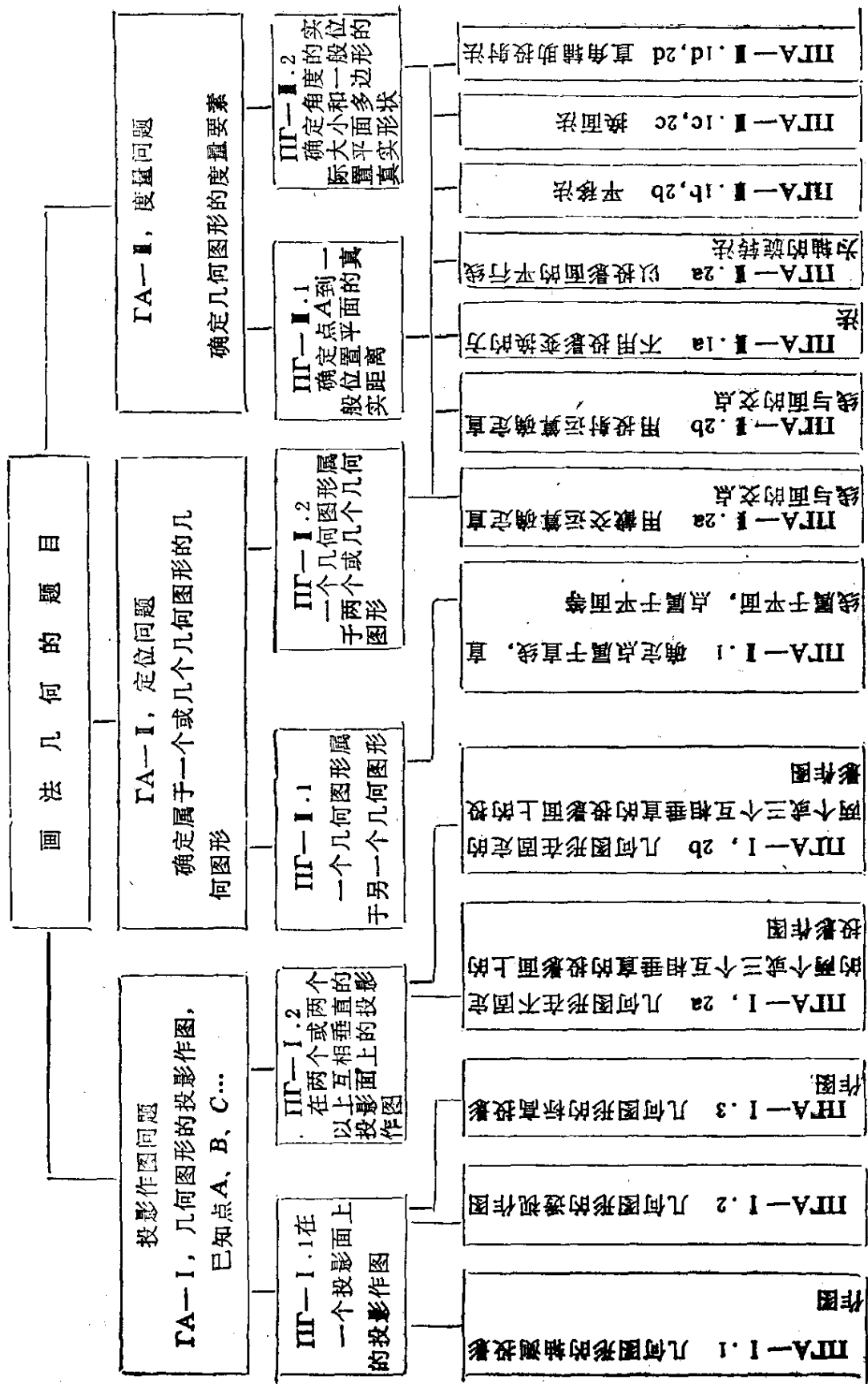
第一类——投影作图问题；

第二类——定位问题；

第三类——度量问题。

类算法(ΓA)和亚类算法(ΠΓA)的特征是，每一类题目都有共同的解题途径。类算法包括该类题目解题时所用的全部运算项目。亚类算法是类算法附加一定条件和限制的特殊情况，这时，类算法

表1 画法几何题目的分类



(ΓA) 的某些运算消失, 仅留下那些适用于该亚类题目的运算。

表 1 是用算法解题时对画法几何题目的编排方式。由此表可以看出, 每个类算法(ΓA) 有两个亚类($\Pi \Gamma$), 每个亚类又分为几个与画法几何传统的, 或者与求解本亚类题目所用的一定的投影作图体系相适应的亚类算法($\Pi \Gamma A$)[⊖]。

下面将研究表 1 所列的三类题目。它们的类算法和亚类算法都写为符号形式, 并附图加以解释。

附录一是根据这些算法解出的示范题 (T_3), 也是解答本习题集类似题目的范例。

§1 第一类题目——几何图形的投影作图

第一类题目对应于第一类算法—— $\Gamma A-I$ 。这类题目是由已知点 A 、 B 、 C 、……作几何图形的投影, 包括在一个、两个和多个投影面上作几何图形的投影。

空间几何图形的投影作图 (图 1) 可以视为几何图形上的点 A 、 B 、 C 、……的投影作图的总和; 或者视为几何图形上的线 a 、 b 、 c 的投影作图的总和。每条线都包含一系列的点 A 、 B 、 C 、……。所以, 在每一个投影作图体系中, 都是把几何图形的单一元素(点)的投影作图作为基础。

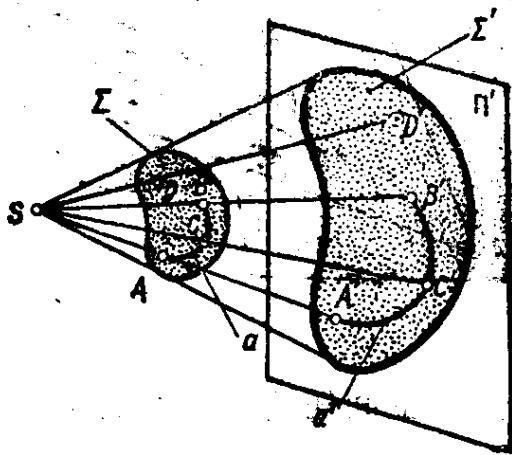


图 1

几何图形的投影作图, 必要的是作出给定它的一些元素的投影, 即:

直线——作出属于直线的两个点的投影;

曲线——作出属于曲线的 n 个特征点的投影;

平面——作出平面内不在同一直线上的三个点的投影;

⊖ 对于亚类算法 $\Pi \Gamma A-I$ 和 $\Pi \Gamma A-I.3$, 本习题集不进行研究。

多面体——作出多面体上各顶点的投影；

曲面——作出曲面的判定素的投影或曲面的特征点和特征线的投影。

对于一对几何图形（两个点、点和直线、点和平面、两条直线、直线和平面、两个平面），应作出给定这些几何图形的几何元素的投影。

$\Gamma A-I$ （第一类算法）的基础是两面投影的作图（见参考文献〔2〕, §8），其算法要点如下（见图2）：

（1）在空间选定三个任意位置的投影中心 S^1 、 S^2 和 S （图2中，三个投影中心位于同一直线上）。

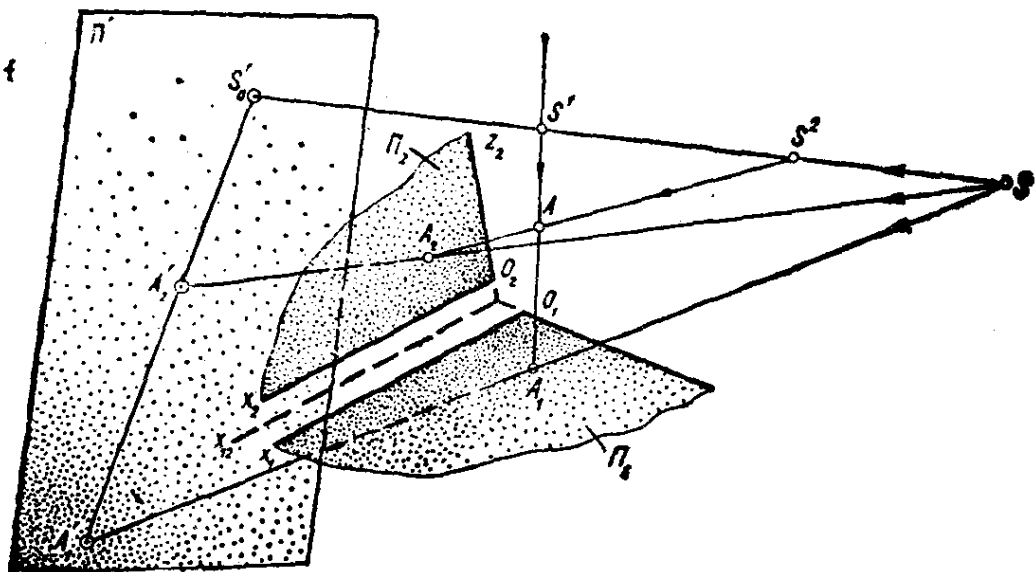


图 2

（2）在空间任选三个投影面：基本投影面 Π_1 、 Π_2 和轴测投影面 Π' 。

（3）从中心 S^1 作属于几何图形的点 A 在 Π_1 上的初投影（点 A_1 ）， $(A_1) = S^1 A \cap \Pi_1$ 。

（4）从中心 S^2 作点 A 在 Π_2 上的初投影（点 A_2 ）， $(A_2) = S^2 A \cap \Pi_2$ 。

（5）从中心 S 作点 A_1 在 Π' 上的次投影（点 A'_1 ）， (A'_1)

⊖ 原文误为辅助投影面 Π_1 、 Π_2 和基本投影面 Π' 。——校者注

$$=SA_1 \cap \Pi'.$$

(6) 从中心 S 作点 A_2 在 Π' 上的次投影(点 A'_2), $(A'_2) = SA_2 \cap \Pi'$.

(7) 从中心 S 作次投影 A_1 和 A_2 所对应的投影中心的投影(点 S'_0), $(S'_0) = SS^2S^1 \cap \Pi'$.

(8) 从中心 S 作坐标平面 Π_2 和 Π_1 在 Π' 上的投影 (x'_2, O'_2, z'_2) 和 (x'_1, O'_1, y'_1) 表示在与 $\Pi\Gamma A-I.1$ 相对应的图 3 上).

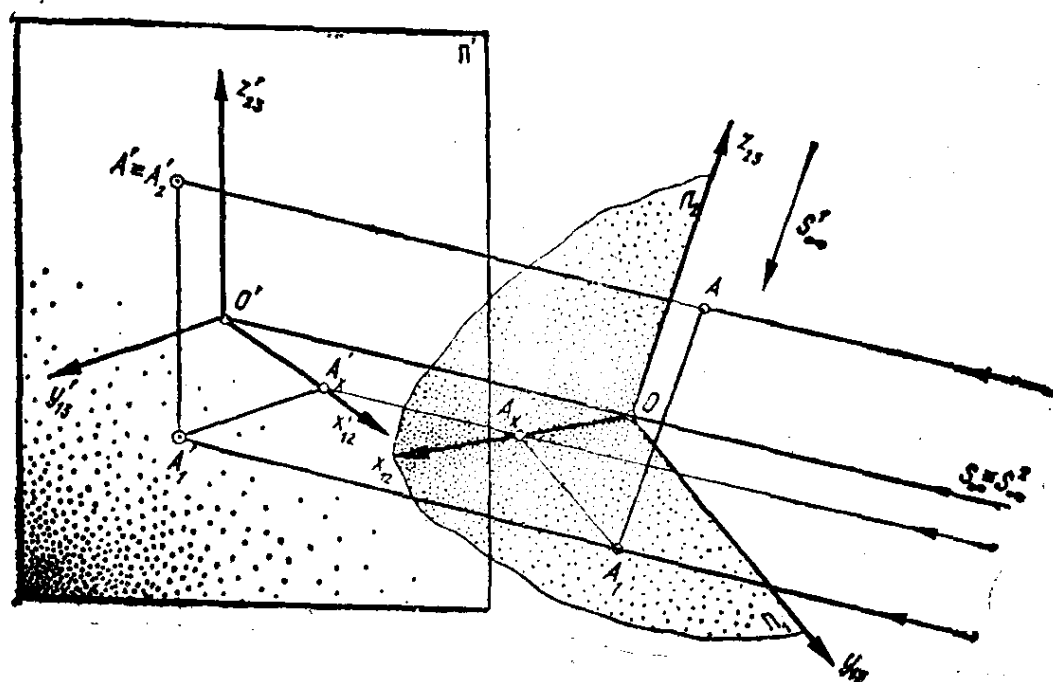


图 3

根据画法几何所用的投影作图体系, 第一类题目分为两个亚类。第一亚类题目是在一个投影面上的投影作图, 第二亚类题目是在两个或两个以上互相垂直的投影面上的投影作图。

每一亚类又分为若干种, 并且 各有 其自身的投影作图体系。

一、 $\Pi\Gamma-I.1$ (第一类题目的第一亚类)

在一个投影面上的投影作图

$\Pi\Gamma A-I.1$ 几何图形的轴测投影作图(图 3)属于 $\Gamma A-I$, 其条件是:

$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$

$$O_1x_1 \equiv O_2x_2$$

$$S'_\infty \parallel Oz_{23}$$

$$S_\infty \equiv S_\infty^2$$

本算法对应于 $\Gamma A-I$ 的运算1~6和8(见附录一, T3-1)。

二、 $\Pi\Gamma A-I.2$ (第一类题目的第二亚类)

在两个或两个以上互相垂直的投影面上的投影作图

这类题目是以在两个或三个互相垂直的投影面上进行投影作图为基础。这类题目按算法 $\Pi\Gamma A-I.2a$ 和 $\Pi\Gamma A-I.2b$ 进行作图运算。前者是几何图形在不固定的两个或三个互相垂直的投影面上的作图, 后者是在固定的两个或三个互相垂直的投影面上的作图 $\ominus$ 。这些作图的特点是 Π_2 与 Π' 平行或重合。

对于 $\Pi\Gamma A-I.2a$:

$$O_1x_1 \neq O_2x_2$$

对于 $\Pi\Gamma A-I.2b$:

$$O_1x_1 \equiv O_2x_2 \equiv O_{12}x_{12}$$

这两种算法都是 $\Gamma A-I$ 的特殊情况, 现分述如下:

1. $\Pi\Gamma A-I.2a$

在不固定的两个或三个互相垂直的投影面上的正投影作图 (图4的点划线作图)

$\Pi\Gamma A-I.2a$ 属于 $\Gamma A-I$, 其条件是:

$$\Pi_1 \equiv K$$

$$\Pi_2 \parallel \Pi' \text{ 或 } \Pi_2 \equiv \Pi'$$

$$S_\infty^2 \perp \Pi_2, S_\infty \parallel S_\infty^2$$

$$O_1x_1 \neq O_2x_2 \ominus$$

式中 S'_∞ ——铅垂方向;

K ——第二和第四象限的平分面。

本算法对应于 $\Gamma A-I$ 的运算1~6(见附录一, T3-3、9、12、15、16、20、30~41)。

$\ominus$ 在不固定投影面上的投影, 我国通称为无轴投影。相对而言, 在固定投影面上的投影即为有轴投影。——译者注

$\ominus$ 原文误为 $O_1x_1 \equiv O_2x_2$ 。——校者注

2. ПГА—I.2b

在固定的两个或三个互相垂直的投影面上的正投影作图
(图 4)

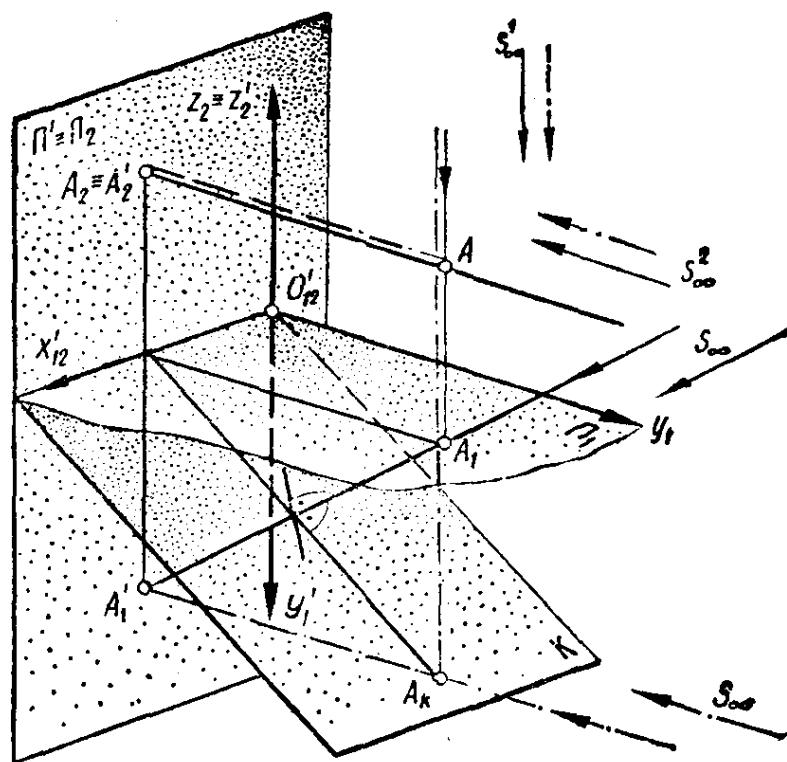


图 4

ПГА—I.2b属于ΓA—I, 其条件是:

$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$

$$\Pi_2 \parallel \Pi' \text{ 或 } \Pi_2 \equiv \Pi'$$

$$S_\infty \perp K$$

$$S_\infty^1 \perp \Pi_1$$

$$S_\infty^2 \perp \Pi_2$$

$$O_1 x_1 \equiv O_2 x_2$$

本算法对应于ΓA—I的运算1~6和8(见附录一, T3—2、4、7)。

§2 第二类题目——定位问题

第二类题目对应于第二类算法——ΓA—II。这类题目的算法是确定属于一个或几个几何图形的几何图形。该算法的要点如下(图5);