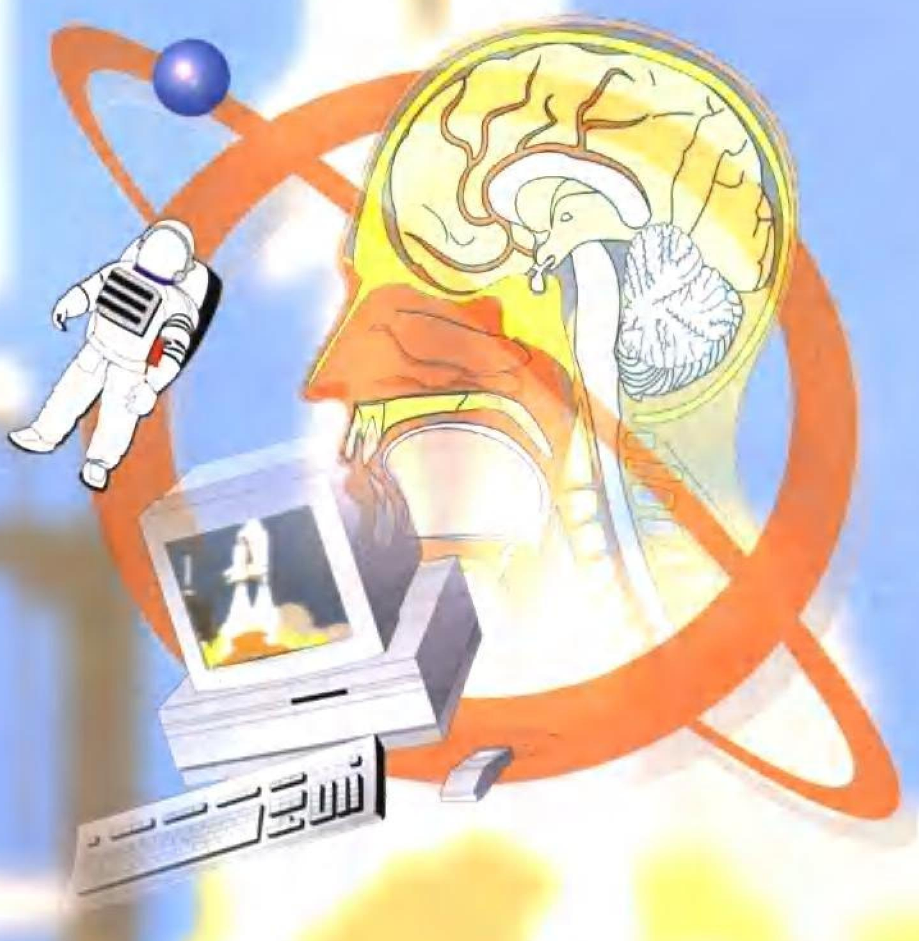
神经模糊系统及其应用

王士同　编著



北京航空航天大学出版社

内容简介

这是一本反映最新的模糊逻辑系统、模糊神经网络研究成果的专著。作者结合国内外最新资料及自己的研究成果，在简要介绍了模糊集合理论与神经网络理论的基础上，深入且重点地介绍了模糊逻辑系统、模糊神经网络与模糊遗传算法这三个热点研究领域的理论与技术。

本书内容新颖，材料翔实，自成体系。既有理论与应用介绍，又有具体的基于C/C ++的编程技术探讨。本书既可作为高校自动化专业、计算机应用专业及其他相关专业的研究生教学用书，也可供从事智能科学、系统科学、计算机科学、应用数学、自动控制等领域研究的广大科技人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

神经模糊系统及其应用/王士同编著. 一北京：北京航空航天大学出版社，1998.2

ISBN 7-81012-733-0

Ⅰ.模… Ⅱ.王… Ⅲ.①模糊系统②模糊控制-神经网络 Ⅳ.TP18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 26255 号

神经模糊系统及其应用

王士同　编著
责任编辑　王小青
责任校对　张韵秋
北京航空航天大学出版社出版发行
(北京市学院路 37 号(100083)，发行部电话 62015720)
北京市朝阳区科普印刷厂印装　各地书店经销
开本：787×1092　1/16　印张：20.25　字数：513 千字
1998 年 6 月第 1 版　1998 年 6 月第 1 次印刷　印数：5 000 册
ISBN 7-81012-733-0/TP・256　　定价：28.00 元

前　言

自 80 年代末以后，在国际上掀 起了一股强劲的研究模糊逻辑系统与模糊神经网络理论与技术的热潮。有些国际著名学者断言：模糊逻辑与神经网络相结合的技术——神经模糊技术将是 21 世纪带头的核心技术。目前，这股热潮依然强劲，其表现为研究队伍不断壮大，学术论文的发表数以千计，应用成果迭出。

模糊逻辑系统、模糊神经网络的研究内容是十分广泛的，也是很具探索性质的。为了推动这一研究领域的深入发展，很有必要编撰一本此方面的专著，以供广大的研究人员参考借鉴。目前，国内出现了为数较多的神经网络或模糊逻辑方面的学术著作，也出版了一些内容涉及模糊逻辑与神经网络相结合的专著。但尚无一本较全面地介绍模糊逻辑系统、模糊神经网络及其相结合的理论与技术方面的专著。本书撰写目的就是想弥补此方面的不足。作者之一曾于 1995—1996 年在英国做访问研究，其间始终注意该领域的技术发展，收集了大量的文献资料。以此为基础，结合作者自己的研究成果，写成此书。目的是吸收、采纳和借鉴国内外诸多同行的研究成果和观点，并把它们系统地归纳起来，使之对从事这一领域的同行们起到参考作用。

本书在简要介绍模糊集理论与神经网络理论的基础上，着重研究了模糊逻辑系统、模糊神经网络及模糊遗传算法这三个热点研究领域。内容涉及：模糊逻辑系统的组成；模糊逻辑系统的万能逼近理论；模糊逻辑系统的确定技术；模糊神经网络的基本原理；典型的模糊神经网络；模糊推理的模糊神经网络实现技术；模糊遗传算法及其在建模中的应用技术。

本书内容新颖，材料翔实，自成体系。一个鲜明的特点是既有理论与应用，又有具体的编程技术介绍。全书共十一章，其中第二、三、十章由韩斌同志撰写，其余各章则由王士同撰写，并负责统编全书。在成书过程中，胡广明，于冬军，刘宏，邢松寅同志也参加了本书的部分内容编写及整理，高群同志参加了部分抄稿工作。本书的出版得到了北京航空航天大学出版社的大力支持。在此一并表示感谢。笔者才疏学浅，对于疏漏不妥之处，恳请读者斧正。

作　者
1997 年 8 月

目　录

第一章 绪 论

1.1 模糊逻辑与模糊逻辑系统

在客观世界中，存在着大量的模糊概念和模糊现象，如“头发很黑”、“个子不太高”、“此人心地善良”等。这里的“很黑”、“不太高”、“心地善良”就属于模糊概念。这些模糊概念和模糊现象是很难用经典的二值或多值逻辑来描述的。这是因为它们没有明确的边界。L. A. Zadeh 教授提出的模糊集合理论是描述这类模糊概念和模糊现象的强有力工具，它开辟了解决模糊问题的科学途径。应该指出，基于模糊集理论的模糊逻辑本身并不模糊，而是用来对“模糊”进行处理以达到消除模糊的逻辑。事实上，模糊逻辑是一种精确解决不精确不完全信息的方法，其最大特点是用它可以比较自然地处理人类的概念。具体地说，模糊逻辑是通过模糊集合来工作的。模糊集合与传统集合的本质区别在于：① 传统集合对集合中的元素关系进行严格区分，一个元素要么属于此集合，要么不属于此集合，并且不存在介于二者之间的情况。② 模糊集合则具有灵活的隶属关系，允许元素在一个集合中部分隶属。元素在模糊集合中的隶属度可以是从 0 到 1 之间的任何值，而不像在传统集合中要么是 0 要么是 1。这样，模糊集合可以从“不隶属”到“隶属”逐渐地过渡。于是上述模糊概念就很容易地在模糊集合中得到有效表达。

模糊逻辑系统是指与模糊概念（如模糊集合、语言变量）和模糊逻辑有直接关系的系统。常见的模糊逻辑系统有：纯模糊逻辑系统；高木—关野模糊逻辑系统；具有模糊产生器和反模糊化器的模糊逻辑系统；广义模糊逻辑系统。

模糊逻辑系统有着极其广泛而重要的应用。这是因为对于绝大多数的应用系统而言，其重要的信息有两种：来自传感器的数据信息和来自提供系统性能描述的专家信息即语言信息。通常的应用系统方法只能处理数据信息而不能有效地利用语言信息。数据信息通常可用数字如 0.56，7.3 等来表示，而语言信息则可用文字如“大”、“小”来表示。在客观世界中，人类的大量知识是用语言形式来表达的。模糊逻辑系统由于能有效地利用语言信息而成为当前的研究热点。

语言信息中通常包含着大量的模糊术语。其原因有三：① 人们发现用模糊术语交流和表达知识常常方便而有效。② 人们对许多问题的认识在本质上是模糊的。③ 许多实际的系统尚很难用准确的术语来进行描述。比如对一个很复杂的化学反应过程就只能用一些模糊的术语来表达。应该指出，语言信息尽管有时并非十分准确，但却提供了应用系统的重要信息，有时甚至是了解应用系统的唯一信息来源。

模糊逻辑系统是可以学习的。我们把具有学习算法的模糊逻辑系统称为自适应模糊系统，或直接简称为模糊逻辑系统。本书的大多数据模糊逻辑系统属于此类。这里的模糊逻辑系统是由服从模糊逻辑规则的一系列“If—then”规则所构造的；而学习算法则依靠数据信息来对模糊逻辑系统的参数进行调整。

1.2 模糊逻辑与神经网络

神经网络是被相互连接起来的处理器节点矩阵，每个节点是一个神经元，这是对人大脑神经细胞的简单近似模拟。每个神经元接受一个以上与权因子相乘的输入，并把这些输入加到一起去产生输出。神经元可以被分层安排，第一层接受基本输入，然后传递其输出到第二层；第二层又有自己的权因子和代数和等，直到最后一层输出。

神经网络本质上是模糊的，它有着两个与用传统方法进行信息处理完全不同的性质：① 神经网络是自适应和可以被训练的，它有自调整即自学习能力。如果最后的输出不正确，系统可以调整权值加到每个输入上去以产生一个新的结果，如此反复，直至达到所期望的输出。② 神经网络结构本身就决定了它是大规模并行机制。由于它是数据驱动的，故其处理速度较之传统方法要快得多。

神经网络的关键特性和基本限制是其所知的信息为隐含的，如果要理解它几乎是不可能的。而赋予它的权是它工作性能的关键，然而却又无法知道权值和理解神经网络在做什么。也就是说，神经网络所用的“语言”对于我们来说是难以理解的。而模糊逻辑及其系统并不像神经网络，它所具有的“知识”可通过该领域的专家提供。但是模糊逻辑规则是靠人的直觉经验制定的，它本身并不具备学习能力。在复杂系统中，模糊控制规则越多，则计算复杂性越大，且需要识别和建立规则的时间随规则数增加而以指数形式增长。这大大限制了模糊逻辑的应用范围。

应该指出，模糊逻辑和神经网络虽然在概念与内涵上有着明显的不同，但二者都是为了处理实际中不确定性、不精确性等引起的系统难以控制的问题。模糊逻辑模仿人脑的逻辑思维，用于处理模型未知或不精确的控制问题；神经网络模仿人脑神经元的功能，可作为一般的函数估计器，能映射输入输出关系。由于各自结构上的特点，它们在应用中也有各自的优缺点，见表 1.1。

表 1.1 神经网络与模糊逻辑比较

名 称	组 成	应用范围	优 点	缺 点
神经网络	多个神经元连成的网络	映射任意函数关系，用于建模估计等	并行处理强，容错能力强，有自学习能力和知识性	知识表达困难，学习速度慢
模糊逻辑	模糊规则，模糊推理	控制难以建立精确模型而凭经验可控制的系统	处理不确定的信息，可利用专家经验	难以学习，推理过程模糊性增加

模糊逻辑系统和神经网络都是无模型估计器。神经网络的映射能力早已为许多学者所证明。近年来，B. Kosko、L. Wang、M. Singh 等人证明了模糊逻辑系统能以任意精度逼近紧致集上的实连续函数，这说明它们之间有着密切的联系。如果两者相结合，就能各取所长，共生互补。这实际上是人大脑结构和功能的模拟——大脑神经网络“硬件”拓扑结构＋信息模糊处理“软件”思维功能。

模糊逻辑系统与神经网络的结合方式可以多种多样。常见的结合方式有：① 以与、或运算代替神经网络中的 Sigmoid 函数；② 神经网络的权值是模糊量；③ 神经网络的输入为模糊量；

④ 神经网络的输入和权值为模糊量；⑤ 上述诸种形式之复合。

我们经常称模糊逻辑系统与神经网络相结合的技术为神经模糊技术，并且称与之对应的网络为模糊神经网络。

当前，在国内外掀起了一股强劲的研究神经模糊技术的热风，其技术成果得到了广泛的应用。笔者认为，神经模糊技术的未来研究方向应集中在以下几个方面：

(1) 研究模糊逻辑和神经网络的对应关系，将模糊逻辑系统的调整化为等价的神经网络学习，利用等价的模糊逻辑来初始化神经网络。

(2) 拓展模糊神经网络的应用范围，寻找一般模糊集的模糊神经网络的学习算法。

(3) 用模糊逻辑加快神经网络的学习速度，然后用此神经网络来构造高性能的模糊逻辑系统。

可以预见，随着理论的深入发展，神经模糊技术必将获得更加广泛的应用。

1.3 本书概要

本书在介绍了模糊集合与神经网络的基本理论与概念之后，重点介绍了模糊逻辑系统及其确定的理论与技术；介绍了模糊神经网络的理论、技术及其应用；最后介绍了模糊遗传算法在建模中的应用。内容具体安排如下。

第二章介绍模糊集合的基本理论。内容包括：模糊集及其运算；分解定理与扩展原理；区间模糊集；模糊关系；模糊逻辑推理等。

第三章介绍神经网络的基本概念与理论。内容包括：人工神经网络的基本数学模型；BP 神经网络和 RBF 径向基神经网络；Hopfield 神经网络；Kohonen 自组织神经网络；神经网络的两大类学习方法等。

第四章主要介绍模糊逻辑系统的构成。内容包括：模糊逻辑系统的概念及其分类；模糊知识库；模糊推理机；反模糊化器。最后还介绍了常见的几种模糊逻辑系统。

第五章是本书的一个重点。它事实上由两个部分组成：第一部分主要研究了三类模糊逻辑系统的万能逼近理论；第二部分以前一部分为基础，着重探讨了模糊逻辑系统的自适应确定技术，内容涉及模糊逻辑系统的 OLS 确定法、反向传播学习算法、表格学习算法等。

第六、七章以两个具体的编程实例，探讨了模糊逻辑系统的基于 C/C++的实现技术。

第八章是本书的另一个重点。深入介绍了模糊神经网络的基本原理；介绍了几种有代表性的模糊神经网络，如模糊联想记忆 FAM、模糊关系的模糊神经网络、模糊 Hopfield 神经网络等。然后，以相当的篇幅研究了模糊推理的模糊神经网络实现技术。

第九章以若干颇具典型意义的应用实例说明了模糊神经网络的具体应用。

第十章以具体的编程应用实例阐明模糊神经网络的基于 C/C++的实现技术。

第十一章也是本书的一个重点。首先简要介绍了遗传算法，然后深入探讨了模糊遗传算法及其在模式识别中的应用。着重指出了模糊遗传算法对于模糊逻辑系统应用于建模是能起很大作用的。在本章中，我们以一个具体的应用实例，介绍了模糊遗传算法应用于模糊建模系统的技术及其基于 C/C++的编程实现。

第二章　模糊集合

2.1　模糊集合的定义及运算

经典集合论中的集合是不定义的概念，集合是一种称之为"数学语言"的数学刻画。所谓数学语言是指满足真伪性只有两种可能，"非真即伪"的语言。适应这种数学语言的对象便构成经典集合中的各种集合。

为了给出模糊集的概念，首先给出集合论的一个基础，即论域。所谓论域就是我们讨论的问题所涉及到的对象的全体，是一个普通集合。在此，通常用大写字母U、V、W、X、Y、Z等表示。

论域U的子集A在普通集合论中可以有以下两种表示方式：一种方式是A为满足某种性质$p(x)$的点的全体，即$A=\{x \mid x\in U,\text{且 } x \text{ 满足 } p(x)\}$；另一种方式是用特征函数表示，即

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & (x\in A)\\ 0, & (x\notin A)\end{cases}$$

若论域U中的子集A与B的运算以特征函数来表示，则可以写成

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}, \quad (\forall\ x\in U)$$
$$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}, \quad (\forall\ x\in U)$$
$$\mu_{A'}(x)=1-\mu_A(x), \quad (\forall\ x\in U)$$

式中，A'为集合A之补集，有时亦记补集为$\sim A$。若$p(U)$表示U的幂集，而$\mathrm{ch}(U)$表示U上一切特征函数的全体，则$(p(U),\cup,\cap,\sim)$与$(\mathrm{ch}(U),\vee,\wedge,-)$是完全格同构的。其中$\vee$表示max，$\wedge$表示min。这一事实反映了对$U$的子集的研究完全可以用研究其特征函数来代替。特征函数恰好给出对象x对所要求条件的满足程度，或者为1，即完全满足；或者为0，即完全不满足。正因为如此，普通集合论只能是"非此即彼"或"非真即伪"。下面根据与特征函数相似的被称之为隶属函数的概念来定义模糊集合。

定义 2.1　论域$U=\{x\}$上的集合A由隶属函数$\mu_A(x)$来表征，其中$\mu_A(x)$在闭区间$[0,1]$中取值，$\mu_A(x)$的大小反映了x对于模糊集合A的隶属程度。

这就是说，论域$U=\{x\}$上的模糊集合是指x中具有某种性质的元素全体，这些元素具有某个不分明的界限。对于U中任一元素，都能根据这种性质，用一个$[0,1]$上的函数来表征该元素属于A的程度。论域是指被讨论的对象全体。论域元素总是分明的，只有x的模糊子集A、B等才是模糊的，所以模糊集通常是模糊子集。在不易混淆的场合，模糊子集简称为模糊集。$\mu_A(x)$的值接近于1，表示x隶属于A的程度高；$\mu_A(x)$的值接近于0，表示x隶属于A的程度低。

例 2.1　模糊集A表示远大于0的实数，即$A=\{x \mid x\gg 0\}$，A的隶属函数可确定为

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, & (x\leqslant 0)\\[4pt] \dfrac{1}{1+\dfrac{100}{x^2}}, & (x>0)\end{cases}$$

如图 2.1 所示。

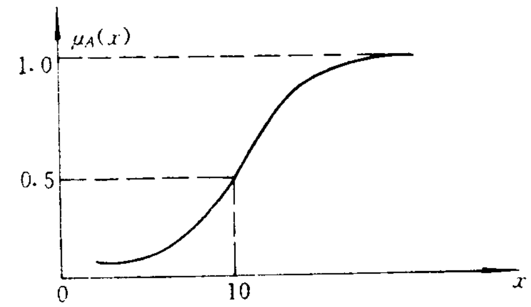


图 2.1 A 的隶属函数

模糊数学用来研究和处理模糊现象。这里,概念本身没有明确的含义,概念的外延是模糊的,称之为模糊概念。为了定量表示模糊概念,我们将集合拓广为模糊集合。一个对象是否符合一个模糊概念,不应仅用"是"或"否"来回答,最好用数来反映它隶属于该模糊概念的程度。在模糊数学中,用 0 与 1 之间的数来反映论域中元素隶属于模糊集合的程度,隶属函数就用于这个目的。模糊概念是客观事物的本质属性在人们头脑中的反映。模糊性的根源在于客观事物的差异之间存在着中间过渡,存在着亦此亦彼的现象。当然,隶属函数的具体确定,确实包含着人脑的具体加工,其中包含着某种心理过程。心理学的大量实验表明,人的各种感觉所反映出来的心理量与外界刺激的物理量之间保持着相当严格的关系,这些便在客观上对隶属函数进行了某种限定,使得隶属函数是对模糊概念所具有的客观性的一种量度,不能主观任意捏造。正确地确定隶属函数,是利用模糊集合恰如其分地定量表现模糊概念的基础。为了能正确确定隶属函数,既要深刻地认识它所反映的模糊概念,又要找到定量反映这些模糊概念的恰当形式。应用模糊数学来解决实际问题,一个基本步骤是寻找一个或几个隶属函数。这个问题解决了,其他问题就迎刃而解。隶属函数的确定过程,本质是客观的,但又允许有一定的人为技巧。只要多实践,就可以掌握这些技巧。

就论域的类型而言,模糊集有下列两种表示方法:

(1) 设论域 U 是有限域,即 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,U 上的任一模糊集 A,其隶属函数为 $\mu_A(x_i)$,$i=1,2,\cdots,n$,则此时 A 可表示成

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)/x_i$$

这里 $\sum$ 不再是数学和,$\mu_A(x_i)/x_i$ 也不是分数,它们只有符号意义,表示 x_i 对模糊集 A 的隶属程度是 $\mu_A(x_i)$。

例 2.2 设 $U=\{1,2,3,4,5\}$,模糊集 A 表示"小的整数",则 A 可以定义为

$$A=\text{小的整数}=1/1+1/2+0.8/3+0.5/4+0.2/5$$

当论域 U 是有限域且用向量表示时,一个模糊集也可用向量表示。因此也可以记成 $\boldsymbol{A}=\{1,1,0.8,0.5,0.2\}$。

(2) 设论域 U 为无限集,此时 U 上的一个模糊集 A 可表示成

$$A = \int_{x\in U}\mu_A(x)/x$$

同样,$\int$ 不再表示积分,仅代表一种记号;$\mu_A(x)/x$ 的意义则和有限情况是一致的。

例 2.3 以年龄为论域,取 $U=[0,200]$,L. A. Zadeh 教授曾给出"年老"O 与"年轻"Y 两个模糊子集的隶属函数:

$$O = \int_{0\leqslant x\leqslant 50} 0/x + \int_{50< x\leqslant 200}\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}$$

$$Y = \int_{0\leqslant x\leqslant 25} 1/x + \int_{25<x\leqslant 200} \left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}$$

如前述，一个定义在论域上的模糊集，其隶属函数会有多种不同形式。下面给出与实数集 U 上某个模糊集有关的三类常用隶属函数：

(1) 偏小型(戒上型)

$$\mu(x)=\begin{cases}(1+a(x-c)^b)^{-1}, & (x>c)\\ 1, & (x\leqslant c)\end{cases}$$

式中，$c\in U$ 是任一点；a 和 b 是两个大于零的参数($a>0,b>0$)，如图 2.2 所示。

(2) 偏大型(戒下型)

$$\mu(x)=\begin{cases}(1+a(x-c)^b)^{-1}, & (x\geqslant c)\\ 0, & (x<c)\end{cases}$$

式中，$c\in U$ 是任一点；a 和 b 是两个参数且 $a>0,b<0$，如图 2.3 所示。显然(2)型和(1)型是对偶的。

(3) 中间型(正态型)　　　$\mu(x)=\mathrm{e}^{-k(x-c)^2}$

式中，$c\in U$ 是任一点；k 是大于零的参数($k>0$)，如图 2.4 所示。这是一类定义或描述近似程度的模糊集。

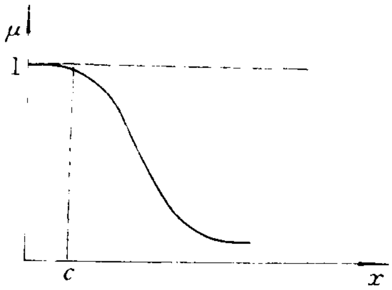


图 2.2　偏小型

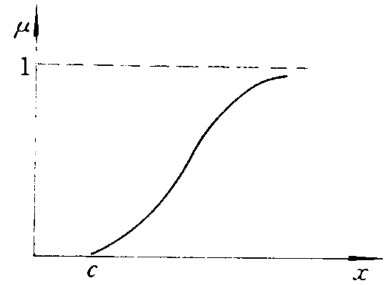


图 2.3　偏大型

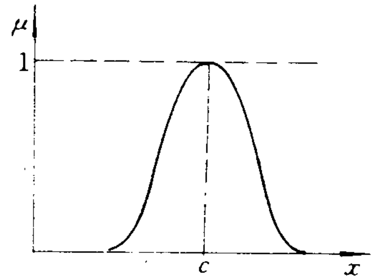


图 2.4　中间型

既然模糊集是普通集合的推广，那么普通集合的一些性质亦可相应地被扩展到模糊集中。现给出模糊集之间的运算，它们的定义与普通集合的定义相对应，是普通集合运算的推广。由于模糊集中没有点与集合之间的绝对隶属关系，因而其运算的定义只能以隶属函数之间的关系来确定。

令论域 U 上模糊集之全体用 $F(U)$ 来表示。

定义 2.2　设 $A,B\in F(U)$，

若 $\forall\ x\in U$ 有 $\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$，称 A 含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subseteq B$；

若 $\forall\ x\in U$ 有 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$，称 A 等于 B，记作 $A=B$。

假设 $\varnothing$ 表示隶属函数恒为 0 的模糊集，即空模糊集，U 表示隶属函数恒为 1 的模糊集，则有性质：

(1) $\varnothing\subseteq A\subseteq U$(最大、最小模糊集的存在性)；

(2) $A\subseteq A$(自反性)；

(3) $A\subseteq B,B\subseteq A$，则 $A=B$(对称性)；

(4) $A\subseteq B,B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$(传递性)。

定义 2.3　设 $A,B\in F(U)$，则 A 与 B 的并 $A\cup B$ 的隶属函数定义为

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x))=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$$

A 与 B 的交 $A\cap B$ 的隶属函数定义为

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x))=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)$$

A 的补 A' 的隶属函数定义为

$$\mu_{A'}(x)=1-\mu_A(x)$$

上述定义的图形表示见图 2.5。若 $A,B\in F(U)$，则 $A\cup B,A\cap B,A'\in F(U)$。

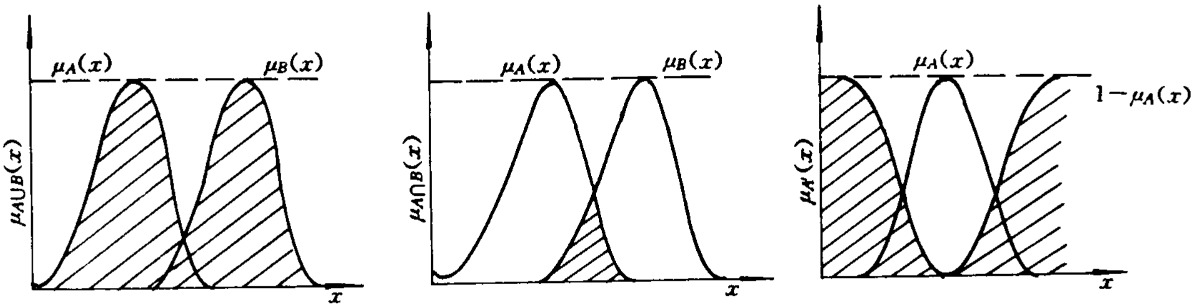


图 2.5 各种运算隶属函数图示

按照论域 U 为有限或无限两种情况，模糊集 A 与 B 的并、交和补的计算公式可分别表示如下：

(1) 论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，且 $A=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)/x_i$，$B=\sum_{i=1}^{n}\mu_B(x_i)/x_i$，则

$$A\cup B=\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)\vee\mu_B(x_i))/x_i$$

$$A\cap B=\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)\wedge\mu_B(x_i))/x_i$$

$$A'=\sum_{i=1}^{n}(1-\mu_A(x_i))/x_i$$

(2) 论域 U 为无限域，且 $A=\int_{x\in U}\mu_A(x)/x$，$B=\int_{x\in U}\mu_B(x)/x$，则

$$A\cup B=\int_{x\in U}(\mu_A(x)\vee\mu_B(x))/x$$

$$A\cap B=\int_{x\in U}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(x))/x$$

$$A'=\int_{x\in U}(1-\mu_A(x))/x$$

例 2.4 设论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，且

$$A=0.2/x_1+0.7/x_2+1/x_3+0.5/x_5$$

$$B=0.5/x_1+0.3/x_2+0.1/x_4+0.7/x_5$$

则

$$\begin{aligned}A\cup B&=(0.2\vee0.5)/x_1+(0.7\vee0.3)/x_2+(1\vee0)/x_3\\&\quad+(0\vee0.1)/x_4+(0.5\vee0.7)/x_5\\&=0.5/x_1+0.7/x_2+1/x_3+0.1/x_4+0.7/x_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\cap B&=(0.2\wedge0.5)/x_1+(0.7\wedge0.3)/x_2+(1\wedge0)/x_3\\&\quad+(0\wedge0.1)/x_4+(0.5\wedge0.7)/x_5\end{aligned}$$

$$= 0.2/x_1 + 0.3/x_2 + 0.5/x_5$$

$$A' = 0.8/x_1 + 0.3/x_2 + 1/x_4 + 0.5/x_5$$

例 2.5 设“年轻”的隶属函数为

$$Y = \int_{0\leqslant x\leqslant 25} 1/x + \int_{x>25} \left(1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} \Big/ x$$

“年老”的隶属函数为

$$O = \int_{50<x\leqslant 100} \left(1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \Big/ x + \int_{x>100} 1/x$$

则“年轻或年老”的隶属函数为

$$Y\cup O = \int_{0\leqslant x\leqslant 25} 1/x + \int_{25<x<x^*} \left(1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} \Big/ x + \int_{x^*<x\leqslant 100} \left(1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \Big/ x + \int_{x>100} 1/x$$

“年轻且年老”的隶属函数为

$$Y\cap O = \int_{50<x<x^*} \left(1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \Big/ x + \int_{x^*<x\leqslant 100} \left(1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} \Big/ x$$

“不年轻”的隶属函数为

$$Y' = \int_{25\leqslant x\leqslant 100} \left(1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} \Big/ x + \int_{x>100} 1/x$$

式中 $x^* \approx 51$。

模糊集运算中还有另一个重要的运算，这就是笛卡儿乘积运算。

设 $A_1,\cdots,A_n$ 是论域 $U_1,\cdots,U_n$ 上的模糊集，$A_1,\cdots,A_n$ 的笛卡儿乘积记为 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，定义为论域 $U_1\times\cdots\times U_n$ 上的模糊集，其隶属函数给定为

$$\mu_{A_1\times\cdots\times A_n}(x_1,\cdots,x_n)=\mu_{A_1}(x_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{A_n}(x_n)$$

根据论域的有限和无限这两种情形，可有

$$A_1\times\cdots\times A_n = \sum(\mu_{A_1}(x_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{A_n}(x_n))/(x_1,\cdots,x_n)$$

或

$$A_1\times\cdots\times A_n = \int_{u_1\times\cdots\times u_n} (\mu_{A_1}(x_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{A_n}(x_n))/(x_1,\cdots,x_n)$$

例 2.6 设 $U_1=U_2=\{3,5,7\}$，$A_1=0.5/3+1/5+0.6/7$，$A_2=1/3+0.6/5$，则

$$A_1\times A_2=0.5/(3,3)+1/(5,3)+0.6/(7,3)+0.5/(3,5)+0.6/(5,5)+0.6/(7,5)$$

定理 2.1 设 $A,B,C\in F(U)$，关于并、交、补有下列代数律成立：

(1) 幂等律 $A\cup A=A$ $A\cap A=A$

(2) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$

$A\cap(A\cup B)=A$

(3) 交换律 $A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

(4) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(5) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(6) 0—1 律 $A\cup\varnothing=A \qquad A\cup U=U$

$A\cap\varnothing=\varnothing \qquad A\cap U=A$

(7) 复原律 $(A')'=A$

(8) 对偶律 $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

对上述的证明，根据运算的定义再进行简单的计算，即可证明。现举例说明如下：

对(4)的第一式证明：对任意固定点 $x\in U$，

$$\begin{aligned}\mu_{A\cup(B\cap C)}(x)&=\mu_A(x)\vee\mu_{B\cap C}(x)\\&=\mu_A(x)\vee(\mu_B(x)\wedge\mu_C(x))\\&=(\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\wedge(\mu_A(x)\vee\mu_C(x))\\&=\mu_{A\cup B}(x)\wedge\mu_{A\cup C}(x)\\&=\mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x)\end{aligned}$$

由模糊集的定义，即得到(4)的第一式。

对(8)的第一式证明：

$$\begin{aligned}\mu_{(A\cup B)'}(x)&=1-\mu_{A\cup B}(x)\\&=1-(\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\\&=(1-\mu_A(x))\wedge(1-\mu_B(x))\\&=\mu_{A'\cap B'}(x)\end{aligned}$$

由此得证。

一般来说，互补律 $A\cup A'=U$ 和 $A\cap A'=\varnothing$ 不成立。如设 $\mu_A(x)=0.2$，$\mu_{A'}(x)=0.8$，但 $\mu_{A\cup A'}(x)=0.8\neq1$，$\mu_{A\cap A'}(x)=0.2\neq0$。这一事实表明，模糊集不再具有“非此即彼”或“非真即伪”的分明性，这是模糊集带来的本质特征。

2.2 模糊集的模运算

在模糊集合论中，模糊集的运算只能用其隶属函数来确定，而不同定义的运算会产生出不同的结果。因此除以“$\vee$”和“$\wedge$”所定义的称之为模糊集的并与交运算外，还可以建立模糊集的其他各种不同的运算，以适应于不同的模糊现象。模运算是模糊集运算的最一般形式。

定义 2.4 映射 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 称为三角模，若满足条件：

(1) $T(0,0)=0$， $T(1,1)=1$；

(2) $a\leqslant c$， $b\leqslant d\Rightarrow T(a,b)\leqslant T(c,d)$；

(3) $T(a,b)=T(b,a)$；

(4) $T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$。

当三角模满足 $T(a,1)=a(a\in[0,1])$，称为 T 模；当三角模满足 $T(0,a)=a(a\in[0,1])$，称为 S 模。

例 2.7 下面的模是 T 模：

$$T'_0(a,b)=\begin{cases}a, & (b=1)\\ b, & (a=1)\\ 0, & (\text{其他})\end{cases}$$

$$T_0(a,b)=a\wedge b$$

$$T_1(a,b)=a\cdot b$$

$$T_2(a,b)=\frac{a\cdot b}{1+(1-a)(1-b)}$$

$$T^\lambda(a,b)=\frac{a\cdot b}{\lambda+(1-\lambda)(a+b-ab)},\quad (\lambda\geqslant 0)$$

$$T^r(a,b)=1-\min(1,((1-a)^r+(1-b)^r)^{1/r}),\quad (r\geqslant 1)$$

$$T_\infty(a,b)=\max(0,a+b-1)$$

下面的模是 S 模：

$$S'_0(a,b)=\begin{cases}a, & (b=0)\\ b, & (a=0)\\ 1, & (\text{其他})\end{cases}$$

$$S_0(a,b)=a\vee b$$

$$S_1(a,b)=a+b-ab$$

$$S_2(a,b)=\frac{a+b}{1+a\cdot b}$$

$$S^\lambda(a,b)=\frac{a+b+(\lambda-2)ab}{1+(\lambda-1)ab}$$

$$S^r(a,b)=\min(1,(a^r+b^r)^{1/r})$$

$$S_\infty(a,b)=\min(1,a+b)$$

有时，为了书写和叙述方便，也可称 T 模和 S 模为模 T 与模 S。

定义 2.5 对于三角模 T'_1,T'_2，若 $\forall\, a,b\in[0,1]$，有 $T'_1(a,b)\leqslant T'_2(a,b)$，称 T'_1 弱于 T'_2，记作 $T'_1\leqslant T'_2$。

定理 2.2 三角模之间有下列关系：

$$T'_0\leqslant T_\infty\leqslant T_2\leqslant T_1\leqslant T_0\leqslant S_0\leqslant S_1\leqslant S_2\leqslant S_\infty\leqslant S'_0$$

直接验证即可证明。

定义 2.6 称 $a'=1-a$ 为 a 的补($a\in[0,1]$)。若 T 模和 S 模满足 $T(a,b)'=S(a',b')$，称 T 和 S 为对偶模。

在例 2.7 中，T'_0 和 S'_0，T_0 和 S_0，T_1 和 S_1，T_2 和 S_2，T_λ 和 S_λ，T_r 和 S_r，T_∞ 和 S_∞ 都是对偶模。

表 2.1 列出了其他常见的对偶模。

定义 2.7 设 T 模和 S 模为对偶模，则模糊集 A 与 B 的模并 $A\cup B$ 定义为

$$\mu_{A\cup B}(x)=S(\mu_A(x),\mu_B(x))$$

A 与 B 的模交 $A\cap B$ 定义为

$$\mu_{A\cap B}(x)=T(\mu_A(x),\mu_B(x))$$

A 的模补 A' 的定义为

$$\mu_{A'}(x)=1-\mu_A(x)$$

表 2.1 其他常见的对偶模

模 T	模 S
$\dfrac{\lambda xy}{1-(1-\lambda)(x+y-xy)}$	$\dfrac{\lambda(x+y)+xy(1-2\lambda)}{\lambda+xy(1-\lambda)}$
$\dfrac{1}{1+\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda}}$	$\dfrac{1}{1+\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{-\lambda}\right)^{-1/\lambda}}$
$\dfrac{xy}{\max(x,y,\lambda)}$	$1-\dfrac{(1-x)(1-y)}{\max(1-x,1-y,\lambda)}$
$\max\left(\dfrac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda},0\right)$	$\min(x+y+\lambda xy,1)$
$\max((1+\lambda)(x+y+1)-\lambda xy,0)$	$\min(x+y+\lambda xy,1)$

定理 2.3 对于模并、模交和模补有以下性质：

(1) $A\cap B=B\cap A \quad A\cup B=B\cup A$

(2) $A\cap B\subseteq A \quad A\cap B\subseteq B \quad A\subseteq A\cup B \quad B\subseteq A\cup B$

(3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \quad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(4) $A\cap\varnothing=\varnothing \quad A\cup\varnothing=A \quad A\cap U=A \quad A\cup U=U$

(5) $\varnothing'=U \quad U'=\varnothing$

(6) $(A')'=A$

(7) $(A\cup B)'=A'\cap B' \quad (A\cap B)'=A'\cup B'$

此证明类似于定理 2.1 的证明。

例 2.8 若 $T=T_1$，$S=S_1$，则模并和模交为

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$$

若 $T=T^r$，$S=S^r$，则模并和模交为

$$\mu_{A\cup B}(x)=\min(1,((\mu_A(x))^r+(\mu_B(x))^r)^{1/r})$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=1-\min(1,((1-\mu_A(x))^r+(1-\mu_B(x))^r)^{1/r})$$

三角模的引进，给模糊集增加了新的运算，就其本身也有十分丰富的内容。模糊集的模运算，是普通集合运算的一般化。由于 T 模和 S 模的性质，当模糊集退化为普通集合时，模并运算即是普通集合的并运算，模交运算即是普通集合的交运算。三角模是研究模糊集的一个有力工具。

2.3 分解定理和扩展原理

分解定理和扩展原理是模糊集合论中的两个基本定理。分解定理是普通集和模糊集的桥梁，它是把模糊集论中的问题转化为普通集论问题的重要工具。在普通集合论中，可以将两个论域之间的点函数扩展为集函数。在模糊集合论中，由于没有点对集的属于关系，这种扩展尤