邹滋祥 编著

相似理论在叶轮机械模型研究中的应用

科学出版社

相似理论在叶轮机械模型研究中的应用

邹滋祥 编著

内 容 简 介

本书共分四章．第一、二两章是理论基础部分，它系统地阐述了几何相似、物理现象相似以及不同体系中物理现象相似的概念与必要和充分条件；相似三定律的实质以及它们在模型研究中的意义和作用．重点阐述了因次分析法求解相似准则的原理、方法和步骤．并通过具体例子系统地研究了模型法则问题．第三、四两章主要研究相似理论在各种类型的叶轮机械模型研究中的具体应用．

本书可供大专院校中工程热物理(叶轮机械)专业的师生和从事该专业的科研人员阅读；也可供广大农村从事水力机械模型设计与试验的工程技术人员以及其他专业中从事模型研究的人员参考．

相似理论在叶轮机械模型研究中的应用

邹滋祥 编著

责任编辑 陈文芳 唐正必

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年11月第一版 开本：787×1092 1/32

1984年11月第一次印刷 印张：5 1/8

印数：0001—3,200 字数：114,000

统一书号：15031·608

本社书号：3759·15—10

定价： 0.82 元

序　　言

科学研究的目的是从各个方面去揭示大自然中事物千变万化的秘密，去认识客观世界的规律性，从而能够解释世界，并利用这种规律性去能动地改造世界，为人类的生存和发展服务.

人们从开始研究自然现象的变化到掌握这种变化规律的过程，往往是从简到繁，然后再从繁到简的. 从繁到简的过程是人们在研究过程中的一次飞跃. 也就是从零星的、个别现象的认识中或部分试验结果中找出规律性的东西，再通过数学工具作理论性概括，从而使所研究的复杂的自然现象简单化. 这种飞跃的出现，包含两个主要的内容：一个是理论研究，另一个是实验研究. 理论研究是对那些运动着、变化着的自然现象，抽出其中一部分或一任意微元体来进行观察和分析，并用数学方程式来描写它们所遵循的变化规律，这就是所谓的理论概括. 如流体的运动，它所遵循的数学方程式主要有连续方程、运动方程、能量方程等. 这些方程式和给出的边界条件、初始条件等特定的约束条件一起就能解出运动流体的各个物理量的大小和它们之间的规律性关系. 然而，自然界中各种物理现象的变化是很复杂的，目前尚有很多物理现象难以找到可用数学方程式来表示的合理的物理模型. 有时即使能建立起数学方程式，也一时无法求解. 在这种情况下，人们不得不用另一种方法，即用实验的方法来找出那些暂时还无法用数学方法来研究的复杂现象的变化规律. 但采用直接试验的方法是有很大局限性的，因受种种条件的限制，有许

多现象是无法直接做试验的.例如天体的运动规律,台风的形成和发展,温度和压力过高或因所需设备庞大等等. 此外,直接实验也只能找到个别量之间的规律性关系,很难抓住现象的全部本质. 因此,在近几十年来产生了一种探索自然现象的新的方法,即以相似理论为基础的模拟试验研究方法.

所谓模拟试验研究方法,就是要按照相似原理把实物体模型化,在模型试验设备上进行试验,找出通过微分方程分析法或因次分析方法导出的相似准则(或称模化准则)中各参数之间的函数关系,然后将这些关系推广到实物中去,从而得到实物体中各参数之间的关系的一种研究方法. 理论的概括要通过实验来验证,实验结果通过理论概括后可使它得到更广泛的应用. 因此,理论概括和实验研究是科学研究工作中最主要的内容.

模拟试验在近代科学研究的各个领域内占有极其重要的地位. 而相似理论是模型设计和模拟试验(或统称模型研究)的理论基础. 相似理论本身虽不能直接提供求解复杂数学方程的方法,但它可以通过几何形状与物理现象变化过程的相似性(或类似性)分析,找出影响其同类(或异类)现象(但必须遵循相同的数学方程式)变化过程中的主要参数以及它们之间的相互关系,从而确定在试验中必须测量的(而且也是最少数量的)参数并建立必要的试验设备. 通过相似准则或称模化准则的研究,可以确定在模型设计和模拟试验中必须保持的无因次不变量,并且可以事先确定试验结果所需绘制的特性曲线以及推广应用的范围.

模拟试验研究在科学研究部门、大专院校实验室、生产试制以及其他很多部门都得到了普遍的应用. 如燃气轮机、各种用途的膨胀透平、废气涡轮增压器以及水力、电力设备中的水轮机、水泵、汽轮机、鼓风机、锅炉、蒸发器、热交换器、高温

除尘器等都可以通过模拟试验来探明和获得其中的规律性.但本书的重点是研究各种类型的叶轮机械以及与它们有直接关系的部件和设备的模型设计和模拟试验问题.为此，有必要进一步在理论上进行系统的阐述，并通过各种类型的实例更深入地掌握模拟试验这个有力的工具.本书就是为了这个目的而编写的.

由于作者水平有限,书中难免会有不少的缺点和错误,恳切希望读者批评指正.

在编写过程中，李燕生副教授对本书内容以及不足之处提出了许多宝贵意见;陈静宜等同志提供了资料;吴文权副研究员,马重劳等同志对本书的编写给予了热情的支持和帮助,在此一并致谢!

编　者

1983 年 8 月

目　　录

第一章　模型研究的理论基础

1.1　相似性原理

1.1.1　几何相似的概念

相似的概念首先出现在几何学里．几何形状的相似具有一定的性质和条件． 相似性质是指相似的现象具有什么性质，而相似条件是指满足什么条件后一些现象才能彼此相似．对两个几何相似体来说：

（1）所有对应的几何角度彼此相等；

（2）所有对应的边长要互成比例，并且所有的比例系数要彼此相等．

现以相似三角形为例来具体地说明几何相似的性质和条件．见图 1.1．

图 1.1 中两三角形的形状相仿，如果是相似三角形，它们

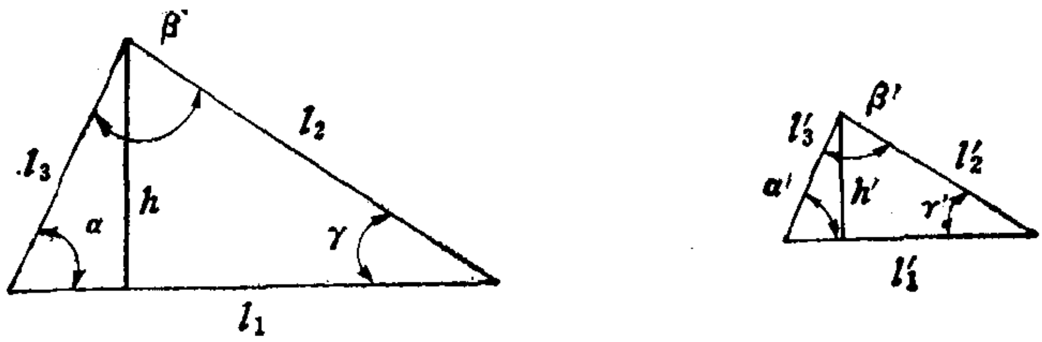

图 1.1　相似三角形

具有下列性质：

对应角度彼此相等，即

$$\alpha = \alpha' \qquad \beta = \beta' \qquad \gamma = \gamma'$$

各对应线段的长度互成比例，并且所有的比例系数要彼此相等，即

$$l_1 = C_{L_1} l'_1 \qquad l_2 = C_{L_2} l'_2 \qquad l_3 = C_{L_3} l'_3$$
$$h = C_h h'$$

并且要满足:

$$C_{L_1} = C_{L_2} = C_{L_3} = C_h \tag{1.1}$$

反过来，如果满足比例系数相等的条件，则两个三角形相似，上述相似的性质也都满足了．因此各对应边的比例系数相等是几何形状相似的充分条件．

按这样的相似概念，我们来研究长方形问题：现在把所有的长方形都算作一类——长方形类．而在这个长方形类中包含了很多不同的相似长方形的组，在每一个相似的长方形组中又包含了无数个各别的长方形，见图 1.2.

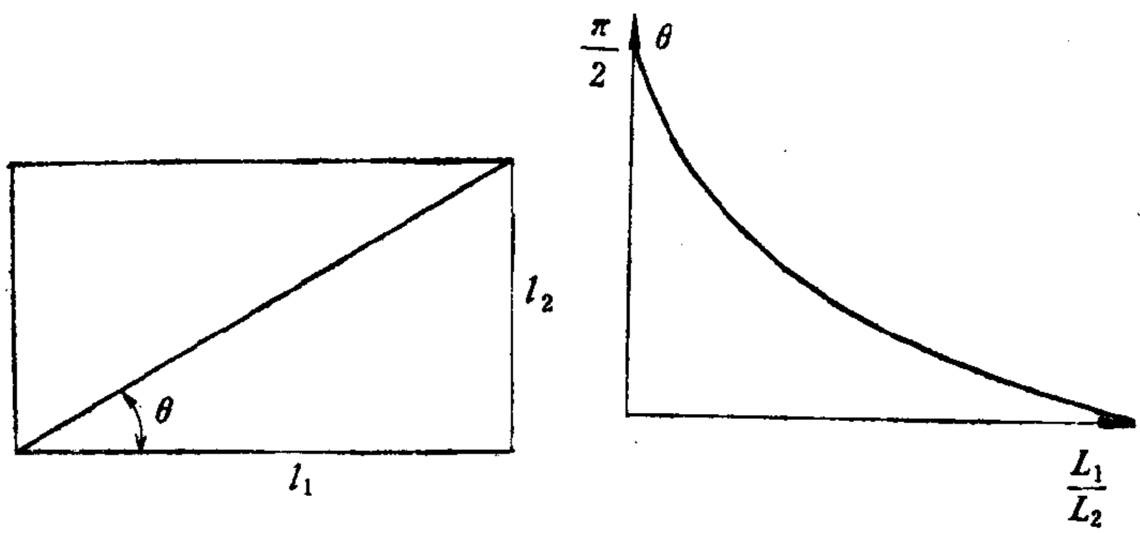

图 1.2a　长方形图

图 1.2b　边长之比与对角线的夹角的关系

例如： 3［米］× 4［米］的长方形是一个特定的长方形，它属于 $l_1:l_2 = 3:4$ 的相似长方形组中的一个，而这个

$$l_1:l_2 = 3:4$$

的相似组又是长方形类中许多不同相似组中的一个组．如果我们把这个个别的长方形看作是这个长方形相似组的代表，

我们通过研究几个这样的代表,利用上述几何相似条件,就能把长方形的研究问题提高到理论上来概括.

当我们研究长方形 l_1/l_2 之比与对角线与一边夹角 θ 之间的关系时,我们只知道存在 $\theta = f(l_1/l_2)$ 的函数关系,并不知道这个函数的具体数学表达式.这时,我们只需系统地测量几个这样的长方形代表,就可以得到它们之间具体的函数关系曲线,见图 1.2. 从而得到整个长方形类 l_1/l_2 与 θ 的关系:

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}(l_2/l_1) \tag{1.2}$$

这就说明了通过相似理论的研究,可以使被研究的对象得到高度的理论上的概括.

1.1.2 物理现象之间的相似条件

在几何学中建立起来的相似概念,可以推广到任何一种物理现象中去.当然,物理现象的相似比几何形状的相似要复杂得多.为此,我们必须首先弄清楚物理现象相似的条件.

(1) 对物理现象来说,几何相似是物理现象相似的先决条件.这说明了物理的相似现象只可能在几何相似的体系内发生.

(2) 物理现象相似的概念,只能应用于具有相同物理意义的现象之间.它们不仅要有相同的性质和内容,而且在形式上和内容上要能用同样的微分方程组来描述.如果两种物理现象能用完全相同的数学方程组来描述,但物理内容不一样,那末,这两种物理现象只能说是类似的,而不能说是相似的.如水在管道内的流动与电流在导线内的流动,导热现象与扩散现象之间在形式上有完全相同的微分方程式和相似的边界条件.但这些现象之间只能说是类似的,而不能说是相似的,因为它们的物理内容是不同的.通常前者称为“同类相

似”，而后者称为“异类相似”或称“类似”.

(3) 在分析相似现象时，只有对含有同样物理意义的同类量才能加以比较，而且也仅限于空间相对应的各点和时间上相应的瞬间. 这些量必然地有着相同的因次. 在几何形状相似的体系中，凡坐标满足下列条件的，如

$$\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=C_L=\text{常数} \tag{1.3}$$

都称为空间对应的点.

在时间上，如果从同一瞬间开始算起，发生相似变化的两个瞬间满足下列条件的，如

$$\frac{t'}{t}=C_t=\text{常数} \tag{1.4}$$

则这两个瞬间都称为时间上相对应的瞬间.

对于在时间上为周期性变化的现象，则需满足下列条件:

$$\frac{(t'+T')}{(t+T)}=C_T=\text{常数} \tag{1.5}$$

(4) 两个物理现象之间的相似，意味着所有用来说明该物理现象性质的一切物理参数之间都相似. 如对介质流动的体系来说，说明流体运动性质的速度场，温度场，压力场等都应相似，并且要满足下列数学表达形式:

$$\frac{W'}{W}=C_w \qquad \frac{T'}{T}=C_t \qquad \frac{p'}{p}=C_p \tag{1.6a}$$

也就是说，在空间对应的各点和时间上相应的瞬间里，第一个现象的任何一种物理量 ϕ 和第二种现象的同类量 ϕ' 成比例，并且满足

$$\frac{\phi'}{\phi}=C_\phi \text{ 或 } \phi'=C_\phi\phi \tag{1.6b}$$

比例系数 C_ϕ 称为相似系数或称相似倍数，但它们的大小与坐标、时间都无关.

上述这些相似系数，也和几何相似中所说的一样，是不能任意选取的，它们之间必须满足一定的约束条件．由此可见，在两种物理现象的相似中，用来描写物理现象的一切量或场之间分别的相似仅是必要条件，还必须满足各种量或场之间的一些附加约束条件才能构成两种物理现象之间相似的充分条件．这些附加约束条件，就是将要在后面叙述的相似准则的值相等．

1.1.3 两个体系之间现象相似的条件

通过不可压缩的粘性流体在两个体系中作稳定、绝热流动来进一步说明两种流动之间相似的必要和充分条件．

两个体系之间流动相似的必要条件是：

（1）两个体系的几何形状必须相似；

（2）描述上述流动的所有物理量和场之间必须相似．

现在假定有两个几何形状彼此相似的流体流动体系．第一个体系的一切物理量标注“′”，第二个体系标注“″”的记号．

第一个体系的连续方程为

$$\frac{\partial W'_x}{\partial x'}+\frac{\partial W'_y}{\partial y'}+\frac{\partial W'_z}{\partial z'}=0 \tag{1.7a}$$

运动方程为

$$\rho'\left(W'_x\frac{\partial W'_x}{\partial x'}+W'_y\frac{\partial W'_x}{\partial y'}+W'_z\frac{\partial W'_x}{\partial z'}\right)$$
$$=\rho' g'_x-\frac{\partial p'}{\partial x'}+\mu'\left(\frac{\partial^2 W'_x}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 W'_x}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 W'_x}{\partial z'^2}\right) \tag{1.7b}$$

在这里主要说明相似性质，为简单起见，能量方程和 y'、z' 方向的运动方程就省略了．

第二个体系的连续方程为

$$\frac{\partial W''_x}{\partial x''}+\frac{\partial W''_y}{\partial y''}+\frac{\partial W''_z}{\partial z''}=0 \tag{1.8a}$$

运动方程为

$$\rho''\left(W''_x\frac{\partial W''_x}{\partial x''}+W''_y\frac{\partial W''_x}{\partial y''}+W''_z\frac{\partial W''_x}{\partial z''}\right)$$

$$=\rho''g''_x-\frac{\partial p''}{\partial x''}+\mu''\left(\frac{\partial^2 W''_x}{\partial x''}+\frac{\partial^2 W''_x}{\partial y''}+\frac{\partial^2 W''_x}{\partial z''}\right) \tag{1.8b}$$

如果上述二个体系中的流动是相似的，则必须满足相似条件(1.6a),(1.6b)。

则得:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{x''}{x'}=\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{z''}{z'}=C_L & \dfrac{W''}{W'}=C_w\\[2ex] \dfrac{\rho''}{\rho'}=C_\rho & \dfrac{\mu''}{\mu'}=C_\mu\\[2ex] \dfrac{g''_x}{g'_x}=C_g & \dfrac{p''}{p'}=C_p\end{array}\right\} \tag{1.9}$$

根据上述关系，第二个体系中的一切量都可以用第一个体系中对应的量表示，这就是所谓的相似转换，并且有

$$\left.\begin{array}{lll}x''=C_Lx' & y''=C_Ly' & z''=C_Lz'\\ W''=C_wW' & \rho''=C_\rho\rho'' & p''=C_pp'\end{array}\right\} \tag{1.10}$$

把方程(1.10)分别代入(1.8a)和(1.8b)中，并经整理后得

$$\frac{C_w}{C_L}\left(\frac{\partial W'_x}{\partial x'}+\frac{\partial W'_y}{\partial y'}+\frac{\partial W'_z}{\partial z'}\right)=0 \tag{1.11}$$

$$\frac{C_\rho C_w^2}{C_L}\rho'\left(W'_x\frac{\partial W'_x}{\partial x'}+W_y\frac{\partial W'_x}{\partial y}+W_z\frac{\partial W'_x}{\partial z'}\right)$$

$$=C_\rho C_g\rho'g'_x-\frac{C_p}{C_L}\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{C_\mu C_w}{C_L^2}\mu'$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 W'_x}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 W'_x}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 W'_x}{\partial z'^2}\right) \tag{1.12}$$

这样，第二个体系中的量已用第一个体系中的量来表示了．从方程 (1.11) 和 (1.12) 中可以看出．这两个体系的运动如果相似，只有满足下列附加约束条件才能成立，即从方程 (1.11) 中得

$$\frac{C_w}{C_L}=\text{任意数} \tag{1.13}$$

从方程 (1.12) 中的第一及第二项得到

$$\frac{C_\rho C_w^2}{C_L}=C_\rho C_g \tag{1.14}$$

从第一及第三项得

$$\frac{C_\rho C_w^2}{C_L}=\frac{C_p}{C_L} \tag{1.15}$$

从第一及第四项得

$$\frac{C_\rho C_w^2}{C_L}=\frac{C_\mu C_w}{C_L^2} \tag{1.16}$$

经整理后得到下面的三个相似指标式:

$$\left.\begin{aligned}\frac{C_g C_L}{C_w^2}&=1\\ \frac{C_p}{C_\rho C_w^2}&=1\\ \frac{C_\rho C_w C_L}{C_\mu}&=1\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

从方程 (1.13) 中看到，C_w/C_L 的值没有限制，对于任何值，方程 (1.11) 都成立．但其他量的比例系数之间必须满足方程 (1.17) 中的关系．方程 (1.14) 到 (1.16) 还可以进一步表示成下列形式:

$$\frac{L'W'\rho'}{\mu'}=\frac{L''W''\rho''}{\mu''}\text{ 或 }\frac{LW\rho}{\mu}=\text{不变量}=\mathrm{Re}$$

$$\frac{g'L'}{W'^2}=\frac{g''l''}{W''^2}\text{或}\frac{W^2}{gL}=\text{不变量}=\mathrm{Fr}$$

$$\frac{p'}{\rho' W'^2}=\frac{p''}{\rho'' W''^2} \text{或} \frac{p}{\rho W^2}=\text{不变量}=\mathrm{Eu}$$

这些不变量 Re，Fr，Eu 的数值相等就是两个几何相似体系中不可压缩的粘性流体运动之间彼此相似的附加约束条件．这就是众所周知的雷诺数、傅鲁特数和欧拉数．

综上所述，在两个体系的几何相似中，用来描写流体运动性质的所有物理量或场（如速度 W、密度 ρ、压力 p、粘性系数和重力场 g 等）之间的相似，仅是描写两个体系中上述流体运动相似的必要条件，只有当上面导出的这些不变量或称相似准则（Re、Fr、Eu）在空间对应的点上和时间相应的瞬间的值相等时，才能构成两个几何相似系统中流体运动相似的充分条件．

1.1.4 相似三定律以及它们在科学试验中的重要意义

上述例子中导出的不变量如 $\frac{gWL}{\mu}$，$\frac{gL}{W^2}$，$\frac{p}{\rho W^2}$ 称为相似准则（Re，Fr，Eu），由相似系数组成的相似常数组如

$$\frac{C_p C_w C_L}{C_\mu}，\frac{C_g C_L}{C_w^2} \text{和} \frac{C_p}{C_\rho C_w^2}$$

称为相似指标．

如果两现象彼此相似，则上述相似指标必定等于 1 或在空间对应位置、时间相应点上的相似准则的值必定相等(但必须注意，同一系统不同点或不同截面上的相似准则数的值是不同的，而只有在彼此对应点上的相似准则，才有相同的数值．由于相似准则具有上述性质，故准则数不称“常数”，而称“不变量”．零因次是相似准则的属性)． 推而广之可以归纳成一般的表述，即

相似第一定律：**彼此相似的现象必定具有数值相同的相似准则．** 相似第一定律说明了物理现象彼此相似的性质．

在我们做模拟试验之前，首先碰到的问题是要知道在试验中要测量哪些物理量，要建立怎样的试验设备？相似第一定律给我们的回答是，在模拟试验中要测量所有相似准则中包含的一切物理参量，并根据这个要求来建立必要的模拟试验设备.

相似第二定律：**现象群遵循着同一的由相似准则和简单数群**(同类物理量之比值)**所组成的方程式**．它可以表示为下面的方程形式.

$$F(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)=0 \tag{1.18}$$

这种关系式称为"准则关系式"或称"准则方程"．相似第二定律也称"π 定律"(因为相似准则一般用 π 表示).

因为对于所有彼此相似的现象，相似准则都持有同样的数值，因此，它们的准则关系式也应该是相同的．如把某物理现象的实验结果整理成准则关系式，那么得到的这种准则关系式就可以推广到与其相似的现象中去．也就是说，如把遵照相似第二定理的规定所进行的模拟试验结果整理成准则关系式,则此关系式可以推广到实物中去.

在相似准则 $\pi,\pi,\cdots,\pi_n$ 中，由单值条件(即决定几何条件、物理条件、边界条件和初始条件)的物理量(也称定性量)所组成的相似准则 (也称定性准则)，用 $\pi_{定1},\pi_{定2},\cdots,\pi_{定n}$ 表示．而包含非单值条件的物理量(被决定量)的非定性准则用 $\pi_{非(m+1)},\cdots,\pi_{非n}$ 表示．由于定性准则是决定现象的准则，所以当它们确定以后,现象也就确定了,这时的非定性准则也随之被决定．这种因果关系可将准则方程写成下面的形式:

$$\pi_{非i}=f_i(\pi_{定1},\pi_{定2},\cdots,\pi_{定n}) \tag{1.19}$$

也可以表示成任一非定性准则与定性准则之间的函数关系.

准则方程 (1.19) 可表示成如图 1.3 所示的曲线（只有一

个定性准则的情况).曲线上的每一个点是由某个别试验获得的．由于这是准则关系曲线，故它的每一点，都适于整个群的相似现象．因此，图 1.3 所示曲线也适用于一群相似现象．

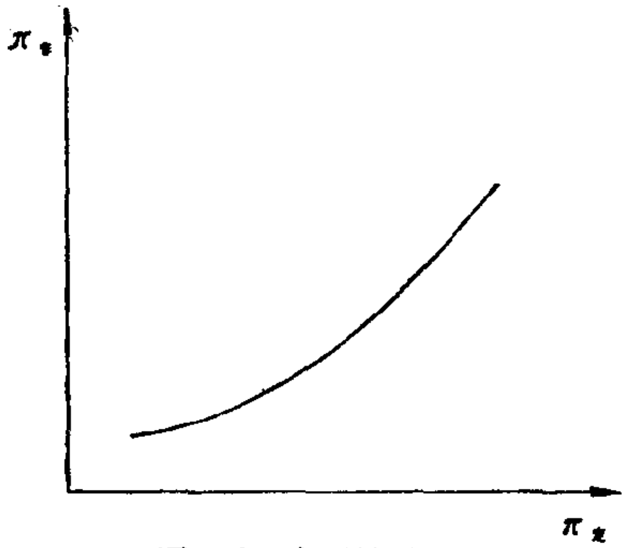

图 1.3　准则关系曲线

如欲求因变量场的规律性，还应将无因次坐标列入准则方程式中，则得到下面的关系式：

$$\frac{U_{ai}}{U_{ai0}}=\phi_i(\pi_{定1},\pi_{定2},\cdots,\pi_{定n},X,Y,Z) \qquad (1.20)$$

方程 (1.20) 中 u_{ai} 是某个因变量，U_{ai0} 为某个因变量的选定参量(可为某因变量的平均值等).

$$X=x/L \qquad Y=y/L \qquad Z=z/L$$

其中 L 为定性几何尺寸.

仍用上述粘性、不可压、稳定的绝热流动为例，欲求速度场的规律性，则有

$$\frac{W}{W_0}=\phi_w(\mathrm{Re},\mathrm{Fr},x/L,y/L,z/L). \qquad (1.21)$$

由于现象彼此相似，因此，相似准则及无因次坐标在数值上相等，则由方程 (1.20) 表示的无因次因变量场可以推广到任意相似现象中去.

通过实验得到的准则关系式 (1.19) 和 (1.20) 就是描述现象方程的解.

相似第二定律回答了如何整理试验结果的问题．它的回答是，必须把试验结果整理成相似准则之间的关系式，通过这个关系式可以把试验结果推广到任意的相似现象中去.