# 随机微分方程稳定性理论

胡宣达 编著

南京大学出版社

# 随机微分方程稳定性理论

胡宣达　编著

南京大学出版社

1986·南京

# 内 容 简 介

本书全面、系统地介绍了随机微分方程稳定性理论近二十多年来的主要成果. 全书共分三篇. 第一篇: Ляпунов 直接法(共三章), 主要介绍了以P.3.Хасьминский为首的苏联学者在这方面的主要成果. 第二篇: 比较方法(共二章), 主要介绍以G.S.Ladde为首的美国学者自1973年以来在这方面取得的主要成果以及国内近几年来所做的一些工作. 第三篇: 其他(共一章), 主要介绍目前随机微分方程稳定性理论发展中不够成熟并要进一步研究的一些问题. 为方便读者, 对每章所必需的预备知识都尽可能地作必要的回顾.

本书可作为高等学校数学、应用数学、自动控制、系统工程、经济管理以及其他有关专业的高年级学生、研究生的教学用书, 也可供有关的科技工作者参考.

随机微分方程稳定性理论
胡宣达 编著

南京大学出版社出版
(南京大学校内)
江苏省新华书店发行 国营练湖印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张12.1875 字数274千
1986年7月第1版 1986年7月第1次印刷
印数 2 500

统一书号: 13336·011 定价: 3.00元
责任编辑 秦 涛

# 序

近二十余年来，由于科学技术的飞速发展，随机因素对系统的影响，日益受到人们的重视，从而作为概率论与常微分方程相结合发展而成的随机微分方程这一边缘学科，也得到了蓬勃发展。在这一边缘领域中，随机微分方程稳定性理论，在确定性常微分方程稳定性理论与随机过程理论的基础上发展特别迅猛，而且应用也越来越广泛。然而由于众所周知的原因，国内对随机微分方程稳定性理论的研究与应用，还是近几年的事。

为了适应我国四化建设的需要，並奢望对这一领域的理论与应用的研究，尽快赶上现今发展的潮流有所裨益，也为了尝试对随机微分方程稳定性理论的发展作一初步小结，以“抛砖引玉”。作者在1983年编写的研究生教材的基础上，吸收了各方面的意见，结合教学中的体会，补充了近期的文献资料，编写成此书。

全书内容分为三篇。第一篇，Ляпунов直接法。主要总结了以Хасьминский为首的苏联学者在这方面的主要成果。第二篇，比较方法。主要总结了以Ladde为首的美国学者自1973年以来所作的一系列工作以及国内近几年所做的一些工作。第三篇，其他。主要介绍目前随机微分方程稳定性理论发展中，不够成熟並需要进一步研究的一些问题。作为一个整体，全书的内容是连贯的，体例是一致的，然而这三部分内容又基本上是彼此独立的。对其兴趣于某一方面的

读者，可以仅读第一篇或第二篇，对于有这方面理论基础的读者，可直接阅读第三篇。即使在第一篇或第二篇中标有星号的部分，也有相对的独立性，跳过它们不损害全书的连贯。为了方便读者，对每章中所必需的预备知识尽可能作些概括性的回顾。此外，在各章末收集了与各章内容有关的参考文献，当然，这是十分挂一漏万的。

本书完稿后，承钟瑚绵副教授仔细审阅并提出宝贵意見，作者深表感谢。並深切感谢王梓坤教授对本书写作给予的鼓励和支持。作者还衷心感谢南京大学出版社，对本书出版工作所给予的大力支持。

作者学识浅薄，错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

胡宣达

1985年7月于南京大学

# 基本符号

$E_l$：$l$维欧氏空间

$E_1^+$：$E_1^+ \triangleq [0,\infty)$

$M_{(l-h)}$：$E_l$中包含原点的$(l-h)$维流形$(l>h)$

$\mathfrak{B}(\mathfrak{B}_l)$：1维（$l$维）欧氏空间中Borel集的$\sigma$代数

$U_R$（或$U(R)$）：$U_R \triangleq \{X: |X|<R, X\in E_l\}$

$\overline{U}_R$（或$\overline{U}(R)$）：$\overline{U}_R \triangleq \{X: |X|\leqslant R, X\in E_l\}$

$U$：$E_l$中一区域（有界或无界）

$\overline{U}$：$U$的闭包

$\partial U$：$U$的边界

$U(Z,\rho)$：$E_l$中以$Z$为球心，$\rho$为半径的球

$\overline{U}(Z,\rho)$：$U(Z,\rho)$的闭包

$I_T$：$I_T \triangleq \{t: 0\leqslant t\leqslant T\}$

$J$：$J=[t_0, t_0+a]$，其中$t_0\in E_1$，$a$为正实数

$I$：$I=I_\infty$

$E$：$E=E_l\times I$

$A'$：集合$A$的余集

$\chi_A$：集合$A$的示性函数

$X^T(A^T)$：向量$X$（矩阵$A$）的转置

$A^*$：矩阵$A$的相伴矩阵

$\mathrm{tr}A$：矩阵$A$的迹

$|\cdot|$（$\|\cdot\|$）：向量的模（矩阵的模）

$L$：在每有限区间上绝对可积函数$f(t)$的类（对于在每有限区间上几乎必然绝对可积的随机函数$f(t,\omega)$，亦以同样的符号$f\in L$表之）

$C$：关于$X$满足局部 Lipschitz 条件，关于$t$绝对连续的函数$V(X,t)$的类

$C_0$：属于$C$且满足全局 Lipschitz 条件的函数$V(X,t)$的类

$C_2(C_2(U))$：定义于$E$上（定义于$U$上），关于$X$二次连续可微且关于$t$一次连续可微函数$V(X,t)$的类

$C_2^0(U\times I)$：除$X=0$外，几乎处处关于$X(\in U)$二次连续可微，关于$t(\in I)$一次连续可微的函数$V(X,t)$的类

$C(U,G)$：从$U\to G$的连续函数类

$\mathscr{K}$：满足$\phi\in C[(0,\rho),E^+{}_1]$，$\phi(0)=0$且$\phi(u)$关于$u$是严格递增的函数$\phi$的类（这里$0<\rho\leqslant\infty$）

$\nu\mathscr{K}$：满足$b\in C[(0,\rho),E^+{}_1]$，$b(0)=0$且$b(u)$是严格递增的凸函数$b$的类

$\mathscr{CK}$：满足：$a\in C[(0,\rho)\times E_1^+,E_1^+]$，$a(0,t)\equiv 0$且$a(u,t)$对每$t\in E_1^+$关于$u$是严格递增的凹函数$a$的类

$\mathscr{PK}(\mathscr{PK}^*)$：满足：$b\in C[U(\rho),E_1^+](b\in C(E_l,E_1^+))$，$b(0)=0$，当$X\neq 0$时$b(X)>0$的函数$b$的类

$L_W^p[\alpha,\beta](1\leqslant p<\infty)$：满足：$p\{\int_\alpha^\beta|f(t)|^p dt<\infty\}=1$的随机过程$f(t,w)$的类

$M_W^p[\alpha,\beta]$：满足：$f\in L_W^p[\alpha,\beta]$且$E\int_\alpha^\beta|f(t)|^p dt<\infty$的随机过程$f(t,\omega)$的类

# 绪　论

常微分方程在物理、工程技术、生物和经济等领域中的应用是众所周知的，然而随着科学技术的发展，要求对实际问题的描述愈来愈精确。因此，随机因素的影响就不能轻易地被忽略，于是对某些实际过程的分析也就有必要从通常的确定性观点转到随机的观点，从而对这些实际系统的描述，也就自然地从确定性的常微分方程转到随机常微分方程，简称 **随机微分方程**(Random differential equations).

随机微分方程的研究，是随着随机过程理论与常微分方程理论的发展而迅速发展起来的。然而，早在随机过程的严格数学理论建立之前二十年，就已经提出了微分系统的随机积分问题。1902 年 Gibbs[1] 讨论了统计力学问题，研究了保守力学系统的 Hamilton-Jacobi 微分方程组的积分，初始状态是随机的，这是最早提出的随机微分方程问题。1908 年，Langevin[2]在研究 Brown 运动时就得到形如

$$m\frac{dx}{dt}=-\beta x+y(t)$$

的微分方程。其中，$x$表液体微粒在某一方向的运动速度，$-\beta x$ 表介质对微粒的影响，即为摩擦力作用项，$y(t)$ 表介质中分子运动对微粒的碰撞构成的随机作用力。这种形式的方程称为**Langevin 方程**.在具体的物理问题的研究中，虽然经常遇到 Langevin 方程，然而对它确切而又严格的数学描述，直到1951年 Itô发表了著名的 Itô型随机微分方程的论

文[3]之后才建立。此后，随机微分方程得到了很快的发展。

根据随机因素进入微分方程的不同方式，Syski[4] 在1967年将随机微分方程分为三大类。

（一）具有随机初始条件的随机微分方程

这是最简单的情形，即方程本身不受随机因素影响，而随机性仅出现于初始条件的情形。这在空间弹道分析问题中经常出现。

（二）具有随机作用项（非齐次项）的随机微分方程

例如

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t)+y(t),\qquad x(t_0)=x_0.$$

如果外力是随机的，则$y(t)$是一随机过程。Langevin方程便具此形式。然而当$y(t)$为白噪声时，上述方程本身便无严格的数学意义，正如前述，为解决此矛盾，Itô于1951年首先提出Itô型随机微分方程：

$$dx(t)=b(x(t),t)dt+\sigma(x(t),t)dw(t),\quad x(t_0)=x_0.$$

其中$w(t)$为Wiener过程，$dx$为Itô意义下的随机微分。

Itô方程是目前随机微分方程研究的一个十分重要的方面，因为它的解过程是Markov过程，因此它对随机过程理论和控制理论的应用，都具有重大的意义。通常一般文献中以"Stochastic differential equations"指Itô型方程（仍译作随机微分方程）。

（三）具有随机系数的随机微分方程

一般如

$$\frac{dx}{dt}=f(x(t),t,y(t,w)),\quad x(t_0)=x_0.$$

其中，$\{y(t,w),t\geqslant 0\}$为方程的随机系数，其是某个随机过程。这是三类方程中最为困难而且又与实际问题联系最多的

一类。这类方程最早是Bergman[6]于1946年在研究海洋中声音传播问题时，由于折射率的随机变化而提出的。当然Itô方程也可视为一类特殊的具有随机系数的随机微分方程.

上述的分类，仅仅是为了研究与叙述的方便，在实际问题中，一个方程往往可以是既属这一类，又属那一类，所以上面的分类法，只是指出随机因素进入微分方程的三种途径而已。

从数学上看，随机微分方程是介于微分方程与概率论之间的边缘分支，它是这两个数学分支互相渗透的结果，因此随机微分方程的研究领域是极其广阔的。在这些领域中，随机微分方程稳定性理论的研究，正如同确定性常微分方程稳定性理论的研究一样，是研究它的解的定性理论的一个重要方面，它无论对于基础理论的研究，还是应用技术的研究，都具有十分重要的意义。

在微分方程稳定性理论的研究中，Ляпунов直接法（也称Ляпунов第二方法）是确定一般非线性系统稳定性的较为一般的方法，其特点是只要知道解的存在，而无需求出方程的解的条件下，来分析系统的稳定性。因为一般求非线性方程的解，通常是十分困难的，所以这种方法就显示出了它的极大优越性，从而它在常微分方程中发展特别迅速，并且已成为目前较为成熟的Ляпунов稳定性理论的一个重要组成部分.1959年Bertram[8]等人，首先提出用Ляпунов稳定性的概念和方法来研究随机微分方程解的稳定性；随后，主要由于美国的Bucy,Kushner,Kozin等以及苏联的Гихман，Хасьминский等人的努力，随机Ляпунов稳定性理论亦得到了较为迅速的发展。我们将在本书的第一篇中介绍这方面的理论。

**比较方法**是常微分方程稳定性理论中的一个十分重要且行之有效的方法。它是Ляпунов函数概念与微分不等式理论相结合的结果，其特点是通过引进一个一阶（或低阶）的辅助系统，在相当弱的条件下，利用微分不等式来建立沿所考察的（高阶）系统解轨道的Ляпунов函数与辅助系统的解之间的比较关系式，这就是所谓**比较定理**。通过比较定理，在一定的条件下，根据一阶（或低阶）辅助系统解的某种定性性质，就可推得所考察的(高阶)系统解的相应的定性性质，这就是所谓**比较准则**。关于比较方法在随机微分系统中的推广，主要是Ladde等人，自1973年以来所作的一系列工作开始的，他们将常微中的比较方法推广到随机微分系统，并用来研究随机泛函微分方程以及Itô方程解的稳定性与有界性。在他们工作的基础上，国内近几年来也在这方面作了些工作。我们将在本书的第二篇中介绍这方面的理论和结果。

在确定性系统的稳定性理论中，有一种称之为**简化原理**的方法，它是研究临界情形稳定性的基础。该原理使得我们有可能对一个$(l+m)$维系统的解$X(t),Y(t)$的稳定性研究，化简为如下两个系统的稳定性的研究，一个是向量$X(t)$的首次近似的$l$维系统（此近似式的系数均假设为与$Y$无关）；另一个是通过在对$Y$的方程中置$X=0$而得到的$m$维系统（见Malkin[7]）.简化原理在随机微分系统中的推广，这方面的工作至今还不多，我们将在本书的第三篇中加以介绍。另外，我们还将在第三篇中讨论随机微分方程稳定性理论中的某些问题，例如，由首次近似决定的稳定性与不稳定性，等等。

随机微分方程理论，在近几年来已由Curtain[8]等人将

其推广到无穷维情形，其部分原因是由于较广泛的一类随机偏微分方程和滞后微分方程，可由无穷维的随机微分方程，利用半群或发展算子来描述. 关于 Hilbert 空间中的随机微分方程的稳定性理论，近几年来由于 Haussman, Zabczyk 以及 Ichikawa 等人的努力，也得到了较快的发展。由于篇幅关系，关于这方面的内容，我们就不准备在本书中介绍了。

# 参 考 文 献


1 Gibbs, J.W. Elementary principles in statistical mechanicse New Haven Yale Univ.Press (1902) .

2 Langevin,P. Sur la theore du mouvement Brownien , C.R. Acad.Sci. Paris. V.146. 530-533 (1908).

3 Itô ,K. On stochastic differential equations , Mem. Amer. Math.Soc. no.4 (1951) .

4 Syski ,R . Stochastic differential equations . In "Moden non-linear equations " ( Saoty ,T.L. ed. ) McGraw-Hill (1967) .

5 Bergman ,P.G. Propagation of radiation in a medium with radom inhomogeneities . Phy. Rev. V.70. 486-489 (1946) .

6 Bertram, L.E. and Sarachik ,P.E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters . IRE.Trans. Circuit Theory CT-6 . Special supplement 260-270 (1959) .

7 Malkin , I.G. Theory of stability of motion , 2nd Rev. edn. " Nauka " , Moscow . ( 1966 ) .

8 Curtain , R.F. Stochastic differential equation in Hilbert space . J.Differential equations 10 (1971)412-430 .

# 第 一 篇

# Ляпунов 直接法

# 目　录

## 第二篇 比较方法

# 第三篇　其　　他