初 等 数 学

上海机床厂七·二一工人大学编写组 编

机 械 工 业 出 版 社

这是一本数学基础知识书籍，内容包括代数、三角、指数与对数和解析几何四章。书中介绍了基本概念和运算公式，并给出了必要的推导和证明。特别是结合机械制造中常出现的数学问题，举出了大量解题实例。每章每节之后还附有习题，书末给出了答案。

本书主要供机械制造工厂中工人、技术人员自学阅读；也可作为工人大学学员复习初等数学之用；还可作为机械制造专业中等专科学校和技工学校教学参考书。

初 等 数 学

上海机床厂七·二一工人大学编写组 编

*

机械工业出版社出版

（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

南京人民印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本787×1092 1/32·印张11 5/16·字数250千字

1979年8月江苏第一版·1979年8月江苏第一次印刷

印数000,001—400,000·定价 0.82元

*

统一书号：15033·4551

目　录

第一章　代数式与代数方程

“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。”㊀初等代数作为数学的一个组成部分是研究不仅用数字，而且也用字母来表示现实世界数量关系的学问。本书根据机械专业的需要，将初等代数分为两大类问题来研究：一类是代数运算问题，即把含字母的式子由繁化简；另一类是解代数方程问题，即根据含有未知数的等式，把未知化为已知。它们将分别在本章和第三章指数与对数里介绍。繁和简、未知和已知都是矛盾着的双方，但在一定条件下又互相转化。掌握初等代数的规律，就是掌握数量运算与转化的规律。因此，必须用唯物辩证法作指导，来学习初等代数，在三大革命运动中不断培养分析和解决实际问题的能力，使数学成为社会主义革命和社会主义建设的有力工具。

第一节　代　数　式

一、用字母表示数

人类的认识规律总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。对数学的认识也是这样，先有数的运算，逐步发展到用字母来表示数的运算。

在生产实践中，各种零件的尺寸经常用字母来代表。例如图 1-1 是加工螺栓用的图纸，图中 d 表示直径，l_0 表示螺纹部分长度，l 表示螺栓长度。一般说，图纸上各部分尺寸不注明单位时，都是表示毫米。

㊀ 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社 1970 年版第 35 页。

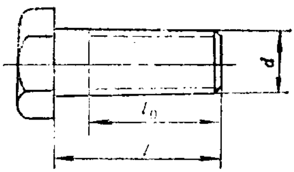


图 1-1

编号	d	l_0	l
1	10	25	25
2	10	25	35
3	10	25	40
4	10	25	50

从图中附表可知：四个螺栓直径 d 的规格都是 10 毫米，它们的螺纹部分长度 l_0 都是 25 毫米，但螺栓长度 l 的规格不同，分别是 25 毫米、35 毫米、40 毫米和 50 毫米。生产过程中，只需一张图纸并附一个表就够了。

在上图中，如用数字表示螺栓的各部分尺寸，只能表示某一个螺栓的具体规格，但用字母代表数后，则可表示某一类螺栓规格的一般数量关系，这对客观事物中的数量关系可带来规律性的认识。

下面举一些用字母表示数的例子：

[**例 1**] 锥形零件如图 1-2 所示，图中 D—大端直径，d—小端直径，L—锥形部分的长度，K—锥度，它们之间的数量关系可表示为

$$K=\frac{D-d}{L}。$$

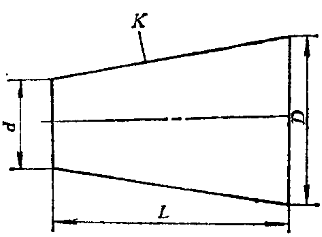


图 1-2

［例 2］ 斜形零件如图 1-3 所示，用斜度表示它的倾斜程度，也就是大、小端高度的差与长度的比。图中 H—大端高度，h—小端高度，L—长度，M—斜度。它们之间的数量关系可表示为

$$M=\frac{H-h}{L}。$$

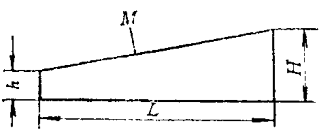


图 1-3

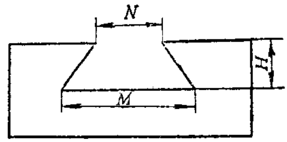


图 1-4

［例 3］ 55° 的燕尾槽零件如图 1-4 所示，图中 H—槽深，N—槽顶宽，M—槽底宽，它们之间的数量关系(见第二章第三节燕尾槽的划线)可表示为

$$M=N+1.4H$$

又如圆面积 $S=\pi R^2$ 和圆周长 $C=2\pi R$ 等，也都是用字母表示数的式子。

二、代数式的概念

由上列式子可看出：$2\pi R$，πR^2，$\frac{D-d}{L}$，$\frac{H-h}{L}$，$N+1.4H$ 等，都是用运算符号把数字和字母连接而成的，这类式子叫做代数式。

分母不含有字母的代数式叫做整式，如 $2\pi R$，πR^2，$N+1.4H$ 等。

分母含有字母的代数式叫做分式，如 $\frac{D-d}{L}$，$\frac{H-h}{L}$ 等。

在整式中，只有乘除运算，没有加减运算的式子叫做单项式，如 $2\pi R$，πR^2 等。

用加减号把单项式连接起来的式子叫做多项式。如 $N+1.4H$ 是二项式；$2x^2+3x+1$ 是三项式。

多项式 $5x^2y+6xy-7y+4$ 中，有 $5x^2y$、$6xy$、$-7y$、4 等四项，前三项字母的次数之和依次为 3、2、1，分别把这些项叫做三次项、二次项、一次项，最后一项不含字母叫做常数项。多项式最高项的次数叫做多项式的次数。上面这个多项式是三次四项式，$2x^2+3x+1$ 是二次三项式，$N+1.4H$ 是一次二项式。在运算过程中，对于多项式一般首先要进行整理，要求其各项按次数高低依次排列，常数项排在最后。

字母前面的数字叫做系数。如在 $2\pi R$ 中，2π 是字母 R 的系数；在 $-3x$ 中，-3 是字母 x 的系数。

三、代数式的值

把已知数值代入代数式中的字母，算出的结果叫做代数式的值。

[**例 1**]

(1) $1.5e\left(1-\dfrac{e}{2d}\right)$。其中 $e=2$, $d=30$。

代入之，$1.5e\left(1-\dfrac{e}{2d}\right)=1.5\times2\left(1-\dfrac{2}{2\times30}\right)=2.9$。

(2) $\sqrt{8(D-d)d}$。其中 $D=50.2$, $d=50$。

代入之，$\sqrt{8(D-d)d}=\sqrt{8(50.2-50)\times50}=\sqrt{80}=8.94$。

[**例 2**] 图 1-5 为 M7150A 平面磨床上的紧套零件，锥形部分尺寸如图所示，求锥度 K。

由图知，大端直径 $D=21.7$，小端直径 $d=20.2$，锥形部分长度 $L=15$，把已知值代入锥度公式，得

$$K=\frac{D-d}{L}=\frac{21.7-20.2}{15}=\frac{1}{10}。$$

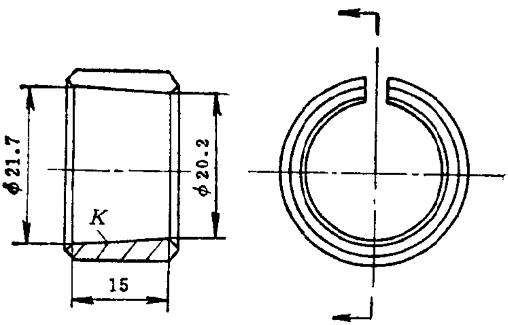


图 1-5

[**例 3**] M131W 万能外圆磨床上砂轮的直径 D 为 400 毫米，砂轮转速 n 为 1670 转/分，求砂轮的线速度 v。

砂轮的线速度就是砂轮外圆表面上任意一点在单位时间内所经过的路程。砂轮转一转，砂轮外圆表面上任意一点所经过的路程为 πD；如果砂轮每分钟转 n 转，砂轮外圆表面上任意一点每分钟所经过的路程为 $\pi D\cdot n$，即砂轮线速度

$$v=\pi Dn。$$

在生产上常用的单位 D 是毫米，v 是米/秒，n 是转/分，而 1 毫米 $=\dfrac{1}{1000}$ 米，1 秒 $=\dfrac{1}{60}$ 分，

$$\therefore\quad v=\frac{\pi Dn}{1000\times 60}(\text{米/秒})。$$

把已知值代入上式，得

$$v=\frac{3.14\times 400\times 1670}{1000\times 60}=34.96\approx 35(\text{米/秒})。$$

习　题　一

1. 求下列各代数式的值:

(1) $2x-3y$，其中 $x=-2$，$y=3$；

(2) $x(24-2x)^2$，其中 $x=4$；

(3) $\frac{ab}{a+b}$，其中 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}$；

(4) $\frac{1}{2}[3e+\sqrt{d^2-3e^2}-d]$，其中 $e=2$，$d=30$。

2．在车床上车一根直径为 50 毫米的轴，车床主轴每分钟 400 转，求切削速度（切削速度单位是米/分，所以切削速度公式是 $v=\frac{\pi Dn}{1000}$ 米/分）。

3．M7150A 垫铁尺寸如图 1-6 所示，求斜度 M。

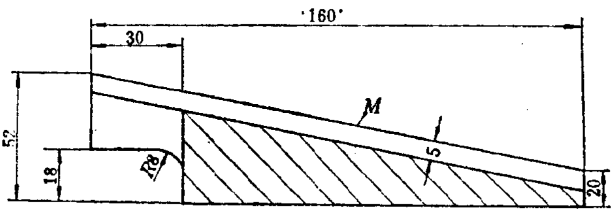


图 1-6

4．55° 燕尾槽零件(图 1-4)，已知槽深 $H=14$ 毫米，顶宽 $N=72$ 毫米，求底宽 M。

5．盘绕螺旋弹簧时所用的心轴直径采用下面经验公式：

$$D_0=\left[\left(1-0.0167\times\frac{d+D_1}{d}\right)\pm0.02\right]\times D_1。$$

式中 D_0——心轴直径(毫米)；

D_1——弹簧内径(毫米)；

d——钢丝直径(毫米)。

中级弹簧钢丝，当直径 d 小于 1 毫米时，心轴系数取下差 -0.02，d 大于 2.5 毫米时，取上差 $+0.02$；高级弹簧钢丝，当直径 d 小于 2 毫米时，取下差 -0.02，d 大于 3.5 毫米时，取上差 $+0.02$。除此之外，可以不考虑。

今有一螺旋弹簧的内径 $D_1=30$ 毫米，采用直径 $d=1.5$ 毫米的高级弹簧钢丝盘绕，求心轴直径 D_0。

6．皮带轮槽数 $z=4$，槽距 $t=16$ 毫米，边缘厚度 $S=10$ 毫米，求皮带轮厚度 B(图 1-7)。

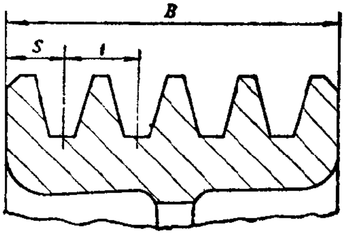


图 1-7

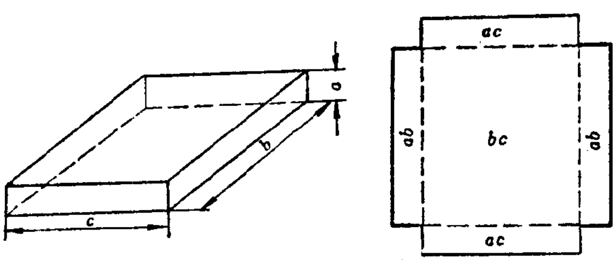
第二节　代数式的运算

在计算代数式的值时，常常要先把它化简，然后再把已知值代入到代数式的字母中去，使计算简便。

一、代数式的加减法

在代数式的运算中，常常遇到有些项是完全相同的，有的只是系数不同，这样的项叫做同类项，应予合并，以简化代数式。合并时，只要把它们的系数相加或相减就可，这叫做同类项合并。

例如要做一只无盖的长方形铁皮油盘，尺寸如图 1-8a 所示，求所用的铁皮展开面积 S。



a)　　b)

图 1-8

把油盘展开，得到图 1-8b 所示的五个矩形，所用的铁皮展开面积就是这五个矩形面积的和，即

$$S=ab+ab+ac+ac+bc$$

将同类项合并后

$$S=2ab+2ac+bc$$

［例 1］ $7x^2+5x-6-4x^2+1=(7-4)x^2+5x-6+1$
$=3x^2+5x-5$。

［例 2］ $(2a^2-4a+3)-(4a+3a^2-2)+(2a-5)$
$=2a^2-4a+3-4a-3a^2+2+2a-5$
$=-a^2-6a$。

二、代数式的乘法

1. 单项式乘多项式

例如两块焊接的长方形铁板，尺寸如图 1-9 所示，求它的面积 S 时，可用两种方法：

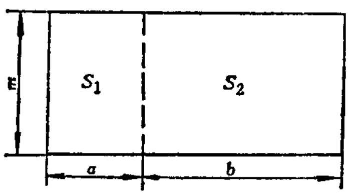


图 1-9

(1) $S=m(a+b)$；

(2) $S=S_1+S_2$
$=ma+mb$。

比较以上两式，可知

$$m(a+b)=ma+mb。$$

它表明了：单项式乘多项式得到一个新的多项式。由此可得它的一般形式：

$$m(a+b-c)=ma+mb-mc。$$

这种把单项式与多项式相乘化为新的多项式的形式，叫做乘法展开。这个式子叫做乘法展开式。

在进行乘法展开运算中，单项式与单项式相乘时，只要把系数与系数相乘，同一字母的次数相加即可。

[例 1] $7xy(2x^2y+3xy^2+1)$

$=7xy\cdot 2x^2y+7xy\cdot 3xy^2+7xy\cdot 1$

$=14x^3y^2+21x^2y^3+7xy$。

[例 2] $(3a+4b-1)2a-(5b+4a)b$

$=6a^2+8ab-2a-5b^2-4ab=6a^2+4ab-2a-5b^2$。

[例 3] 钢锭的截面如图 1-10 所示，求它的截面积 S。

如图，钢锭的截面积为

$S=S_1+2S_2+4S_3$。

其中 S_1、S_2 都是矩形，S_3 是圆的 1/4；即

$S_1=a(a-2R)=a^2-2aR$,

$S_2=R(a-2R)=aR-2R^2$,

$S_3=\frac{1}{4}\pi R^2$。

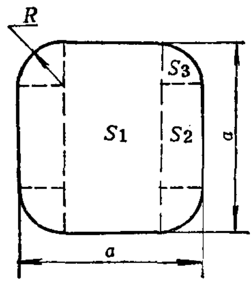


图 1-10

$$\therefore\quad S=a^2-2aR+2(aR-2R^2)+4\cdot\frac{1}{4}\pi R^2$$

$$=a^2-2aR+2aR-4R^2+\pi R^2$$

$$=a^2-(4-\pi)R^2。$$

2. 多项式乘多项式

两多项式相乘，先将两式按照某一个字母的降幂排列起来，将一个多项式的每项与另一多项式的每项相乘，再将它们的乘积相加减(即代数和)即可。

在将一个多项式的每项与另一多项式的每项相乘时，可把前面的一个多项式看作单项式，然后进行乘法展开。

[例 4] $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$

$=a^2+2ab+b^2$。

[例 5]　$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2$

$$=a^2-2ab+b^2\text{。}$$

[例 6]　$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$。

3．乘法公式

在生产实践中，经常要遇到多项式相乘的特殊类型，可把它们归纳成以下乘法公式，应熟记之。

(1) 常数乘以多项式：

$$a(x+y+z)=ax+ay+az\text{。} \tag{1-1}$$

[例 7]　$e(2a+7b-3c)=2ea+7eb-3ec$。

(2) 两数和与两数差的积：

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2\text{。} \tag{1-2}$$

[例 8]　$(2x+5)(2x-5)=4x^2-25$。

(3) 两数和的平方：

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\text{。} \tag{1-3}$$

[例 9]　$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$=x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\text{。}$$

(4) 两数差的平方：

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\text{。} \tag{1-4}$$

[例 10]　$(3x-2)^2=(3x)^2-2(3x)(2)+(2)^2$

$$=9x^2-12x+4\text{。}$$

(5) 立方和：

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3\text{。} \tag{1-5}$$

(6) 立方差：

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3\text{。} \tag{1-6}$$