

理科数学

欧维义 编

FU BIAN  
HAN  
SHU LUN

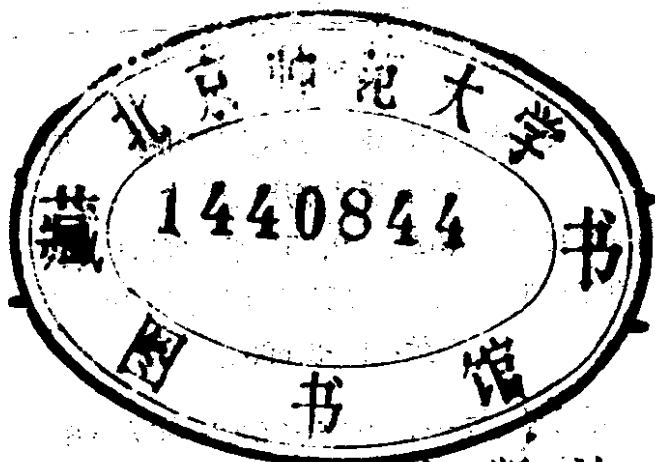
复 变 函 数 论

吉林大学出版社

# 复变函数论

欧维义 编

JY1199/08



吉林大学出版社

## 内 容 提 要

本书是作者根据为数学物理方法课程编写的《复变函数论》讲义修改而成的。内容包括：复数和复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数表示、留数理论及其应用、保形映射等六章。

本书取材适当，思路清晰，文字简洁，重点突出，适用范围广，便于自学和启发式教学。

本书可作为综合大学、师范院校以及理工科有关专业的教材或参考书；同时也可供广大科技工作者、从事理工科教学的青年教师与理工科的高年级学生和研究生参考。

## 复 变 函 数 论

欧 维 义 编

\*

吉林大学出版社出版 吉林大学印刷厂印刷

吉林省新华书店发行

850×1168 大32开 9.75印张 239,000字

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数：1—3,600册

ISBN 7—5601—0037—6/0·6

统一书号：13323·25 定价：2.30元

## 出版说明

根据教学需要，我们出版了这套《吉林大学本科生教材》，这套教材适合高等学校本科生基础课或选修课的教学，由我社逐年陆续出版。

吉林大学出版社

JUL 1991/08

## 序

本书是编者根据为吉林大学数学系力学专业、理科物理、化学各专业所开设的数学物理方法课程编写的〈复变函数论〉讲义修改而成。同属于数学物理方法课程的内容，还有数学物理方程和特殊函数及其应用。其中的数学物理方程，已于1985年由吉林科学技术出版社出版。

本书除讲授复变解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论和保形映射等常规内容外，还注重讲了非数学类复变函数论教材较少讲的，有关支点、支割线、多值函数单值化、黎曼面、多值函数的围道积分等有理论和实用价值的内容；在选材和习题的配备上，既注重计算技能的训练，又适当地强调了逻辑推理、分析证明能力的培养；在写法上，力求思想清晰，简明扼要，通俗易懂，以利于自学和启发式教学。

本书在编写过程中，得到江泽坚教授的指导和帮助，得到陈维钧、王毅、高玉环、卢喜观、金德俊等同志的帮助。在此，谨向他们致以谢意。

由于编者水平所限，错误和不妥之处，谨请读者指正。

编者

1987年3月于吉林大学

# 目 录

第一章 复数和复变函数	( 1 )
§1 复数的代数运算和共轭运算	( 1 )
1.1 复数的概念	( 1 )
1.2 复数的代数运算	( 1 )
1.3 复数的共轭运算	( 3 )
§2 复数的几何表示法	( 5 )
2.1 复数的点表示法	( 5 )
2.2 复数的极坐标表示法	( 6 )
2.3 复数的向量表示法	( 9 )
2.4 无穷远点和复数的球面表示法	( 11 )
§3 方根和曲线的复数方程	( 13 )
3.1 模与幅角的运算	( 13 )
3.2 方根	( 18 )
3.3 曲线的复数方程	( 19 )
§4 复变函数	( 24 )
4.1 函数的定义	( 24 )
4.2 函数的表示法	( 25 )
4.3 函数的定义域	( 25 )
4.4 复变函数的几何表示——映射	( 28 )
4.5 反函数和逆映射的概念	( 32 )
§5 函数的极限与连续性	( 37 )
5.1 函数的极限	( 37 )
5.2 函数的连续性	( 37 )

5.3	连续函数的基本性质	( 39 )
<b>第二章</b>	<b>解析函数</b>	( 42 )
§1	可微函数	( 42 )
1.1	可微函数的定义及其判别定理	( 42 )
1.2	微商的运算法则	( 48 )
1.3	微商的几何意义	( 48 )
§2	解析函数	( 52 )
2.1	解析函数的定义	( 52 )
2.2	解析函数的运算法则	( 55 )
2.3	解析函数的判别定理	( 56 )
2.4	解析函数与调和函数	( 59 )
§3	初等函数	( 63 )
3.1	指数函数	( 63 )
3.2	三角函数	( 64 )
3.3	双曲函数	( 66 )
3.4	根式函数	( 67 )
3.5	对数函数	( 77 )
§4	平面场与解析函数	( 81 )
4.1	复变函数与平面场	( 81 )
4.2	流量与环量	( 82 )
4.3	无源无汇无旋的平面流速场	( 84 )
4.4	势函数和流函数	( 84 )
4.5	平面流速场的复势	( 85 )
<b>第三章</b>	<b>复变函数的积分</b>	( 91 )
§1	积分的定义和计算公式	( 91 )
1.1	一些规定	( 91 )
1.2	积分的定义	( 92 )
1.3	复积分与实函数的曲线积分	( 93 )

1.4	复积分的计算公式	( 94 )
1.5	复积分的基本性质	( 95 )
§2	柯西积分定理	( 100 )
2.1	单连通区域上的柯西积分定理	( 100 )
2.2	复积分的牛顿-莱布尼茨公式	( 101 )
2.3	复连通域上的柯西积分定理	( 104 )
§3	柯西积分公式和微商公式	( 109 )
3.1	解析函数的积分表达式	( 109 )
3.2	解析函数的无穷次可微性质	( 113 )
3.3	柯西型积分及其性质	( 116 )
§4	解析函数的一些重要性质	( 120 )
4.1	平均值定理与最大模原理	( 120 )
4.2	柯西不等式	( 123 )
4.3	刘维尔定理与代数基本定理	( 124 )
§5	解析函数的等价条件	( 127 )
5.1	柯西积分定理的推广	( 127 )
5.2	柯西积分定理的逆定理	( 127 )
5.3	解析函数的等价条件	( 128 )
<b>第四章 解析函数的幂级数表示</b>		( 129 )
§1	复数值级数	( 129 )
1.1	收敛、发散概念	( 129 )
1.2	收敛判别法	( 130 )
§2	复函数级数	( 137 )
2.1	收敛域的概念和逐点收敛准则	( 137 )
2.2	一致收敛的概念及其判别法	( 139 )
2.3	和函数的性质	( 142 )
§3	幂级数	( 147 )
3.1	幂级数的敛散性质	( 147 )
3.2	收敛域的结构和求法	( 148 )



3.3	和 数的性质	( 149 )
§4	解析函数的泰勒展开及其应用	( 150 )
4.1	泰勒展开定理	( 150 )
4.2	内部唯一性定理	( 156 )
4.3	解析函数在零点附近的性质	( 159 )
§5	解析函数的罗朗展开	( 164 )
5.1	罗朗级数和它的收敛域	( 164 )
5.2	环上解析函数的罗朗展开	( 166 )
§6	解析函数的孤立奇点	( 174 )
6.1	孤立奇点与非孤立奇点	( 174 )
6.2	孤立奇点的分类	( 175 )
6.3	孤立奇点的类型判别	( 177 )
6.4	无穷远孤立奇点	( 182 )
<b>第五章 留数理论及其应用</b>		( 187 )
§1	留数基本定理	( 187 )
1.1	留数的定义和留数基本定理	( 187 )
1.2	留数的计算方法	( 188 )
1.3	函数在无穷远点的留数	( 192 )
§2	留数定理在积分计算上的应用	( 198 )
2.1	在自变量变换下, 可化为围道积分的积 分	( 198 )
2.2	化定积分为围道积分的封闭化方法	( 201 )
2.3	在封闭化方法下, 可化为围道积分的积 分	( 206 )
§3	儒歇定理及其应用	( 219 )
3.1	对数留数定理和儒歇定理	( 219 )
3.2	幅角原理	( 224 )
3.3	解析映射的保域性质	( 226 )

<b>第六章 保形映射</b> .....	( 230 )
§1 解析映射的一般性质.....	( 230 )
1.1 映射的基本概念.....	( 230 )
1.2 解析映射的一般性质.....	( 231 )
§2 分式线性映射.....	( 236 )
2.1 特殊型的分式线性映射.....	( 236 )
2.2 分式线性映射的保形性.....	( 239 )
2.3 三对对应点唯一决定一分式线性映射.....	( 242 )
2.4 分式线性映射的保圆性.....	( 244 )
2.5 分式线性映射把对称点变为对称点.....	( 244 )
2.6 分式线性映射的应用例子.....	( 246 )
§3 初等函数构成的保形映射.....	( 249 )
3.1 角域到角域的映射.....	( 249 )
3.2 带域到角域的映射.....	( 253 )
§4 儒科夫斯基映射.....	( 257 )
4.1 儒科夫斯基映射.....	( 257 )
4.2 儒科夫斯基映射的逆映射.....	( 261 )
4.3 机翼剖面外部区域到圆外部的保形映射.....	( 262 )
4.4 圆柱绕流问题.....	( 266 )
<b>答案与提示</b> .....	( 269 )

# 第一章 复数和复变函数

## § 1 复数的代数运算和共轭运算

### 1.1 复数的概念

**复数** 由实数  $x, y$  和虚数单位  $i$  构成的数

$$z = x + iy \text{ (或 } z = x + yi \text{)}$$

称为复数,  $x$  称为复数  $z$  的实部,  $y$  称为复数  $z$  的虚部, 分别记为

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

$\operatorname{Re}$  是拉丁文 *Realis* (实的) 开首两个字母,  $\operatorname{Im}$  是 *Imaginaris* (虚的) 开首两个字母。

虚部为零的复数就可看作实数, 即

$$x + i \cdot 0 = x$$

因此, 全体实数是全体复数的一部分。实部为零的复数称为纯虚数。

**共轭复数** 我们把实部相同而虚部为相反数的两个复数  $x + iy$  和  $x - iy$  称为共轭复数。与  $z = x + iy$  共轭的复数记为  $\bar{z}$ , 即

$$\overline{x + iy} = x - iy$$

显然复数共轭的概念是相互的, 即若  $\bar{z}_1 = z_2$ , 则有  $\bar{z}_2 = z_1$ 。

### 2 复数的代数运算

**复数的相等** 我们说两个复数  $z_1 = x_1 + iy_1$  和  $z_2 = x_2 + iy_2$  相等, 就是指它们的实部和虚部分别相等, 即

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

当且仅当

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

**复数的加(减)法** 两个复数  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$  相加(减)是那样的一个复数, 它的实部是  $z_1, z_2$  的实部与实部相加(减), 它的虚部就是  $z_1, z_2$  的虚部与虚部相加(减), 即

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

**复数的乘法** 两个复数  $z_1 = x_1 + iy_1$  及  $z_2 = x_2 + iy_2$  相乘, 可按分配律法则计算, 并且将结果中的  $i^2$  换成  $-1$ , 即

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

**复数的除法** 两个复数  $z_1 = x_1 + iy_1$  及  $z_2 = x_2 + iy_2$  相除(除数  $\neq 0$ ), 先将分子分母同乘以分母的共轭复数, 再进行简化, 即

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0) \end{aligned}$$

依据代数运算的定义, 不难证明, 复数的加(减)法、乘法运算满足法则:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad (\text{交换律})$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad (\text{结合律})$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (\text{分配律})$$

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \quad (\text{结合律})$$

例1.1 设

$$z = \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$$

求  $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, z\bar{z}$ .

解 由

$$z = \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i} = \frac{i^2 + (1-i)^2}{(1-i)i}$$

$$= \frac{-1-2i}{1+i} = \frac{(-1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-3-i}{2}$$

得

$$\operatorname{Re}z = -\frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im}z = -\frac{1}{2}$$

$$z\bar{z} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

例1.2 设  $z_1 = 3+4i, z_2 = 1-2i$ , 求  $\frac{z_1}{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ .

解 由

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

得

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -1-2i$$

### 1.3 复数的共轭运算

根据共轭复数的定义, 不难证明共轭复数有如下性质 (证明留作习题):

$$1) \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2;$$

$$2) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0);$$

$$3) \quad \bar{\bar{z}} = z;$$

$$4) \quad z\bar{z} = [\operatorname{Re}z]^2 + [\operatorname{Im}z]^2 = |z|^2;$$

$$5) \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}z, \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}z.$$

例1.3 设  $z_1, z_2$  为两个任意复数, 证明:

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

证 由共轭运算性质1), 3), 5), 推出

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1\bar{\bar{z}}_2$$

$$= z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

## 习 题

1. 将下列复数 $z$ 表示成 $x+iy$ 的形式, 并求它的实部、虚部和共轭复数:

1)  $\frac{1}{3+2i}$

2)  $\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$

3)  $\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$

4)  $i^8 - 4i^{2^1} + i$

5)  $\left(\frac{3+4i}{1-2i}\right)^2$

6)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

2. 由等式

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$$

求 $x$ 和 $y$ .

3. 若 $(x+iy)^2 = a+ib$ , 证明

$$x+iy = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right)$$

其中

$$\operatorname{sgn} b = \begin{cases} 1, & b > 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases}$$

4. 若 $x_n, y_n$ 为实数, 并且

$$x_n + iy_n = (1 - i\sqrt{3})^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

则

$$x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = 4^{n-1} \sqrt{3}$$

5. 设 $z = x+iy, y \neq 0, z \neq \pm i$ , 则当且仅当 $x^2 + y^2 = 1$ 时,  $z/(1+z^2)$ 才是实数.

6. 证明:

1) 复数 $z$ 为实数的充要条件是:  $z = \bar{z}$ ;

2) 设 $z_1, z_2$ 是两个复数, 若 $z_1 \cdot z_2$ 和 $z_1 + z_2$ 都是实

数, 则  $z_1$  和  $z_2$  或者都是实数, 或者是一对共轭复数.

7. 若多项式

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

的系数是实数, 则

$$\overline{P(z)} = P(\bar{z})$$

8. 设  $z_1, z_2$  是两个复数, 求证

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

9. 若  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$  是 (复的或实的) 常数, 则

$$1) \quad |\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2|^2 = (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2) \times (|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2) - |\alpha_1 \bar{\beta}_2 - \alpha_2 \bar{\beta}_1|^2$$

$$2) \quad \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 - \sum_{1 \leq k < j \leq n} |\alpha_k \bar{\beta}_j - \alpha_j \bar{\beta}_k|^2$$

$$3) \quad \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2$$

其中的2)是著名的拉格朗日(Lagrange)恒等式, 3)是著名的施瓦兹(Schwarz)不等式.

## §2 复数的几何表示法

无论从复变函数的应用, 还是从运用形象方法来研究复变函数, 讨论复数的几何表示法都是非常重要的.

### 2.1 复数的点表示法

在平面上取定直角坐标系  $Oxy$  后, 对一复数  $z = x + iy$ , 规定它和平面上的点  $M = (x, y)$  对应; 反过来, 对平面上的一点  $M(x, y)$ , 规定它和复数  $z = x + iy$  对应 (见图1.1).

这样, 我们就把复数  $z = x + iy$  和平面点  $M(x, y)$  建立了一一对应关系. 在建立了平面上的一切点组成的集合与一切复

数构成的集合的一一对应之后，我们就可把复数 $z = x + iy$ 和点 $M(x, y)$ 当作同意语。

今后，我们把实现这种对应关系的桥梁——直角坐标系 $Oxy$ 的 $x$ 轴称为实轴， $y$ 轴称为虚轴。把和复数建立了一一对应关系的平面称为复数平面或 $z$ 平面。

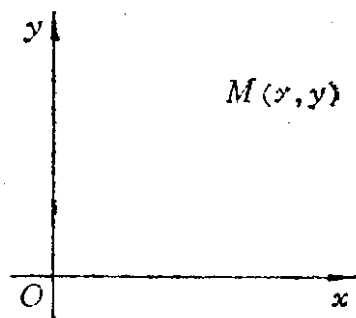


图1.1

## 2.2 复数的极坐标表示法

习惯上，把表示式

$$z = x + iy$$

称为复数的直角坐标表示。利用直角坐标与极坐标间的关系式

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

和欧拉 (Euler) 公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ，便可将 $z = x + iy$ 写成

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}$$

复数的这种表示称为极坐标表示，亦称为三角函数表示和指数函数表示 (见图 1.2)。式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $\theta$ 分别叫做 $z$ 的模 (或绝对值) 与幅角，记为

$$r = |z|, \quad \theta = \text{Arg } z$$

关于复数的模、幅角，应当指出下面几点：

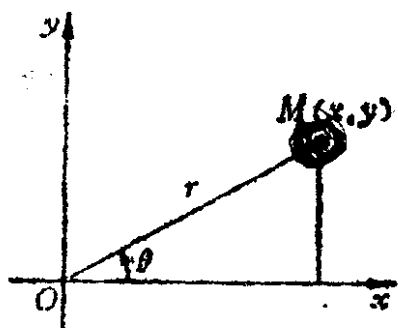


图1.2

1) 复数的模 关于复数的模，显然有

$$|\text{Re}z| \leq |z|, \quad |\text{Im}z| \leq |z|$$

由 $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ ，又有

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

2) 复数的幅角 任一不为0的复数 $z$ ，有无穷多个幅角。实际上，若 $\theta_0$ 是 $z$ 的一个幅角，则



$$\theta = \theta_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

都是  $z$  的幅角。以后我们把  $z (\neq 0)$  的满足条件

$$-\pi < \theta_0 \leq \pi$$

的幅角  $\theta_0$  称为  $\text{Arg}z$  的主值 (亦称主幅角), 记为  $\theta_0 = \arg z$ 。因此

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

复数幅角的主值概念和反三角函数的主值概念是类似的。

复数  $z = 0$  的幅角是不定的, 所以  $z = 0$  是唯一没有定义幅角的复数。

**3) 主幅角的求法** 给定一个复数  $z = x + iy \neq 0$ , 我们如何求它的主幅角呢?

鉴于

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$

$$\text{Arc tg } \frac{y}{x} = \arctg \frac{y}{x} + n\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \arctg \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$$

及图 1.3

