板 壳 理 论

何福保　沈亚鹏　编著

西安交通大学出版社

刚体运动的要求，结果呈现出过刚现象。考潘(G. R. Cowper)等建议采用35个位移参数的扁壳单元，算例表明该单元有较好的精度。

阿迈脱(S. Ahmad)首先提出由三维等参元退化的壳单元，卡诺克一墨哥尔恰(W. Kanok-Nukulchai)和呼格海斯分别应用退化概念导出不同的单元型式，并用选择/缩减积分点的技术计算有限转动的非线性壳体的弯曲。

与薄板问题相似，采用C^0连续的位移函数在薄壳时因不满足基尔霍夫假设而引起自锁，除用缩减积分点可以避免自锁外，泼拉柴丕(G. Prathap)提出场相容的位移模式也可避免自锁现象。迄今国内外学者仍在探究既有较高精度又使计算简便的各种新型壳元。

内容简介

本书共分为三部分：薄板理论、薄壳理论和板壳稳定性理论。书中除系统地阐述了板壳线性弯曲的基本理论以及矩形板、圆板、圆柱形壳、旋转壳体、扁壳等的弯曲和稳定问题外，根据高科技发展和工业部门的需要，还详细介绍板壳的非线性弯曲理论、各向异性板壳理论、考虑横向剪切效应的中厚度板壳理论和板壳弯曲的有限元法等内容。各章都有典型例题，并附有一些具有工程背景的习题。

本书可作为工程力学专业本科生教材，亦可作为机械、航空、船舶、土木、化工、能源等工程专业的研究生及工程技术人员的参考书或自学用书。

(陕)新登字 007 号

板 壳 理 论

何福保　沈亚鹏　编著

责任编辑　陈　瀚

西安交通大学出版社出版

邮政编码 710049

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店经销

开本 850×1168 1/32　印张 19.25　字数：491 千字

1993 年 6 月第 1 版　1993 年 6 月第 1 次印刷

印数——1500

ISBN7-5605-0538-4/O·90　定价：10.75 元

序

板壳结构广泛应用于各个工程领域，在我国高等工业学校中工程力学专业和有关工程专业普遍开设板壳理论课程。目前在国内外已有板壳理论的专著，由于内容的侧重点不同而适用于教材的却为数不多。本书在作者多年来讲授板壳理论所编写讲义的基础上，根据教学实践的经验，不断充实和修改而成的。书中的部分内容是作者的科研成果。

作为工程力学专业的教学用书，本书着重于基本概念和基本理论的阐述，力求结合工程应用解决实际问题。在编写过程中，兼顾理论的系统性和应用性。在数学的应用上，侧重于力学模型的抽象和数学模型的建立及其求解方法。在内容的叙述方面，力求循序渐进，重点突出，物理概念清楚，使读者在学习过程中容易掌握全书内容。书中给出一定数量的例题和习题，使读者学而能用。

本书分为三部分：薄板理论、薄壳理论和板壳稳定性理论；以板壳线性弯曲问题为主、同时讨论非线性弯曲问题。由于复合材料层合板壳在各个工业部门开始广泛应用，需要各向异性板壳弯曲理论和考虑横向剪切效应的中厚度板壳理论的知识，在第四、六和十二章中，扼要地概述了这方面的内容。随着计算机的高度发展，使得采用数值解法分析各种复杂的板壳结构成为可能。本书除介绍经典解法外，还专章介绍板、壳的有限元法。以增强读者解决工程实际问题的能力。为了使读者易于掌握板壳的稳定性理论，首先阐述弹性系统平衡稳定性的一些基本概念，特别是简明易懂地介

绍科伊特(W. T. Koiter)的初始后屈曲理论，然后分别介绍板壳的线性和非线性稳定性理论。

由于板壳理论的内容相当广泛，书中不可能包罗板壳理论的全部内容。板壳理论的动力学问题未列入本书范围之内。

本书蒙同济大学徐次达教授、浙江大学林钟祥教授认真和详细地审阅了全部书稿和校对了全部公式，提出了许多宝贵意见和指出其不足之处，编著者根据两位教授的意见均一一作了修改。对于徐次达教授和林钟祥教授的严谨治学作风，编著者深表敬意，在此谨向两位教授致以深切的感谢。编著者还要感谢陈瀚教授，他为本书作了认真细致的编辑工作，确保了本书的质量。

由于编著者水平有限，书中内容有不妥之处在所难免，恳切要求力学同行和读者给予批评指正。

编著者

1992 年 8 月

板壳理论发展简史[1][2]

确切地说，平板作为数学问题的研究，应从探究启拉第尼(E. F. F. Chiladni)振动实验结果的理论解释开始。在板面铺上一层细砂，启拉第尼得到平板各阶振型的节线和其相应的频率。1804 年，法国科学院邀请启拉第尼表演这一实验，拿破伦也亲临参加并对这次实验留下了深刻的印象。在他的提议下，法国科学院悬赏征文，征求平板的数学理论并与实验结果相校核。直至 1811 年 10 月截止，只有莎非格门(Sophie-Germain)一人应征。

莎非格门熟悉欧拉(L. Euler)在梁的弹性曲线方面的工作，即由弯曲变形能的积分式通过变分原理导出挠度曲线的微分方程式。她决定以同样的方式假设平板弯曲变形能的积分式为

$$U = A\iint\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2 ds \tag{a}$$

式中 ρ_1 和 ρ_2 为挠曲面的两个主曲率半径。但在推导积分式的变分时，她的计算有错，因此未能导出正确的方程式。当时作为评审人的拉格朗日(J. L. Lagrange)指出了她的错误并作了修改，得到所求方程的正确形式为

$$k\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{b}$$

泊松(S. D. Poisson)进一步改进了板的理论，为了给(b)式以物理意义，他设想板由许多质点组成，相互之间有分子力的作用，通过一组质点的平衡条件成功地得到了方程(b)。但由于假设所有质点都分布在板的中面内，因此方程中的常数 k 与板厚的平方成正比。

板弯曲的第一个满意的理论应归属于纳维(C. L. Navier)，在

他1820年8月14日提交科学院并于1823年发表的论文中，同样认为平板由许多质点组成，但假定质点分布在板的厚度内。弯曲时，质点的位移与板的中面平行，且与该平面间的距离成正比，由此得到在任意横向载荷作用下板弯曲的正确微分方程

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q \tag{c}$$

由于纳维认为质点之间相互作用力只与它们之间的距离改变成正比而与方向无关，所以他的结果只包含一个弹性常数。如果令泊松比等于$\frac{1}{4}$，则(c)式中的弯曲刚度D与正确值相同。纳维用(c)式求解简支矩形板，提出了正确的边界条件，并用双重三角级数得到在均布载荷和集中力作用下的解。这是板弯曲问题中首次得到的正确解。

在1829—1831年期间，泊松发表的以分子结构概念为基础的两篇弹性体平衡和运动的论文中，作为一个两维问题的解，同样得到横向载荷下板的挠曲方程式(c)，并且讨论了边界条件。对于简支和固定边，他提出的条件与现在应用的条件完全一致。对于边界受已知分布力的情况，他要求有3个条件，即横向剪力、弯矩和扭矩与作用在该边上的所有外力相平衡。由泊松提出的边界条件的数目和形式，引起了当时学者的热烈争论，成为以后一段时间内研究的主要课题。直至基尔霍夫(G. R. Kirchhoff)的著名论文发表以后，这个问题才得到了澄清。

基尔霍夫在1850年发表的一篇平板理论的重要论文是人们最早见到的一个完善的板弯曲理论。论文首先对这个问题作了简短的阐述，他提到莎菲格门企图导出板弯曲的微分方程以及拉格朗日修正她的错误。基尔霍夫讨论了泊松的工作，并指出泊松的3个边界条件一般是不可能同时满足的。泊松所以能正确地解出圆形板的振动问题，只是由于圆板振动的对称形式自然地满足了3个边界条件中的一个。

基尔霍夫的平板弯曲理论建立在目前公认的两个假设上：(1)

原来垂直于平板中面的直线，变形后仍保持为直线且垂直于弯曲后的中面，即直法线假设。(2)在横向载荷作用下板产生微弯时，板的中面并不伸长。基尔霍夫根据这两个假设列出板弯曲变形能的正确算式，并应用虚功原理进行变分运算，导出了著名的平板弯曲微分方程。同时，他指出边界上只存在两个边界条件，而不象泊松提出的 3 个条件。

随后，开尔文(Lord Kelvin)对边界条件的减少作了物理解释。他应用圣维南原理，将板边的分布扭矩用一组静力相当的分布剪力来代替，因此在边界上只须有等效横向剪力和弯矩这两个边界条件。

虽然薄板微分方程由基尔霍夫导出并用于声学，但在工程中运用板的理论是在 20 世纪才开始的。在近代结构中，薄板的广泛使用促进了理论的发展，莱维(M. Levy)研究了对边简支另两边为任意支承条件的矩形板。这个解具有很大的实用价值，工程师们研究了多种特殊的载荷情况，并积累了最大挠度和最大弯矩的数表。巴泼考维奇[3](П. Ф. Папкович)在《船舶结构力学》这本广博的专著中，不仅详尽地叙述了板的古典理论，而且创造性地发展了薄板弯曲和稳定性的计算方法，如将莱维解推广到对边固定而其他两边为任意支承的矩形板等。关于其他特殊形状的板，如椭圆形、三角形和扇形板等也都曾被许多学者研究过，并且出现了介绍薄板弯曲的专著。

在许多工程问题中，经常遇到四边固定的矩形板，但是这个问题在数学上遇到很多困难。柯洛维契(B. M. Куалович)首次得到该问题可作数值计算的解。布勃诺夫(И. Г. Бубнов)将这个解简化，并对各种大小的板作出在均布载荷下的最大挠度和最大弯矩的数表。在第 5 次国际应用力学会议上，铁木辛柯(S. P. Timoshenko)提出一种更为一般的解法，它能用于包括集中力在内的各种载荷形式。埃文斯(T. H. Evans)以铁木辛柯解为基础，制出更详细的表格。

在集中力作用点处的局部应力，由于不能按薄板近似理论来分析，那达依(A. Nadai)和华诺斯基(S. Woinowsky Krieger)曾专为此作过讨论。铁木辛柯和杨(D. Young)也讨论过集中力作用下周边固定的矩形板。

由一系列等距立柱所支承的板，在土建设计中具有很大的实用意义。葛拉索夫(F. Grashof)提出了这个问题的第一个近似解，并由莱威(V. Lewe)作了进一步的研究。关于该问题的更深入的探讨可参阅华诺斯基的论文。

公路路面板的应力分析，导致对弹性地基板的注意，尤其明显的反映在伟司脱高德(H. W. Westergaard)的工作中。盖适瓦诺夫(П. М. Герсеванов)、夏比罗(Г. С. Щапиро)、马里也夫(А. С. Малиев)基于温克尔(Winkler)假设，研究弹性地基板的弯曲问题。哥尔布诺夫-巴沙道夫(Горбунов-Посагов)舍弃了温克尔假设，将弹性地基作为半无限弹性体，得到半无限弹性体上薄板弯曲的近似解。

张福范在其专著《弹性薄板》中介绍的复杂情况下简支矩形板、固定矩形板、连续矩形板和悬臂板等的解法，丰富了经典的解析方法。

现代航空事业的发展，促使对薄板进行更为深入的分析研究。板受到面内外力作用的稳定性、板的后屈曲特性和颤振、以及加筋板等问题，在二次世界大战期间由许多学者和工程师进行了大量的研究。

同样，随着航空工业的兴起，胶合木板等新型材料在工业上日益广泛的应用，推动了各向异性板的弯曲理论。波兰科学家胡贝尔(M. T. Huber)研究正交各向异性板，得到在非对称分布载荷和边缘弯矩作用下圆板弯曲的解。在这一领域内的主要工作是属于苏联学者的。40年代中期，列赫尼茨基(С. Г. Лехницкий)首先总结了苏联学者在30年代对各向异性体平面问题和平板弯曲问题的研究成果。50年代高分子材料在国防和民用工业中获得应用，到60年代进一步发展纤维增强材料，用各向异性板理论分析新型材料

制成的板的强度、刚度等问题已开始受到广泛的重视。列赫尼茨基、阿姆巴尔楚米扬(C. A. Амбарцумян)惠特尼(J. M. Whitney)和美籍中国学者蔡(S. W. Tsai)等人相继出版专著，标志着这一领域的研究已经进入了高潮。

在薄板的近似理论中，曾假设挠度远比板厚为小。对于具有较大挠度的板必须考虑板的中面变形。平板大挠度问题的基本微分方程已由基尔霍夫和克莱勃许(A. Clebsch)导出，微分方程是非线性的，因此很难求解。基尔霍夫只解出中面为均匀拉伸的最简单情况，这一领域的进展主要是由工程师们在分析船体壁板中的应力时所取得的。在研究长矩形板在均布载荷下的弯曲时，布勃诺夫归结成一狭条的弯曲问题，并对在船舶结构中所遇到的几种边界条件给出了解答。铁木辛柯讨论了边界作用均布力偶时的圆板大挠度问题，并研究了线性理论的正确范围。韦(S. Way)从理论和实验两个方面，研究了周边固定的圆板在均布载荷下的弯曲。弗普尔(A. Föppl)应用面内应力的应力函数，将很薄板的大挠度方程加以简化。卡门(Von Karman)将很薄的要求舍弃，提出圆板弯曲的大挠度方程。他的方程为那达依著作所采用，并被莱维(S. Levy)用于大挠度矩形板的研究。薄板大挠度问题由于非线性方程组在求解中遇到数学上的困难，一般都难以得到精确的解析解。目前最常用的是摄动法和基于变分原理的李兹(W. Ritz)法、伽辽金(Б. Г. Галёркин)法等近似解法。40 年代由钱伟长提出的摄动法，至今仍在国内外被广泛用于求解板大挠度弯曲和后屈曲问题。近年来，叶开源等进一步提出修正迭代法，并对摄动参数的选取和摄动法的收敛性作了细致深入的研究，使该法在理论上更加完善。

对于工程结构中大量存在的薄板问题，由基尔霍夫导出的近似理论已能得到满意的计算结果。但因近似理论中忽略了横向剪力对板变形的影响，致使得到的薄板基本方程是一个 4 阶的偏微分方程，因而每边只需两个边界条件。若板比较厚，或即使板很薄，在集中力作用点附近以及薄板边界周围，近似理论和边界条件不

仅不能得到满意的结果，甚至会导致错误的结论。但是严格按照弹性力学的方法又会遇到求解上的困难。平板弯曲分析中的这一困扰，要求研究者提出一些新的假定，建立新的理论，它既能避免数学上的困难，又能消除近似理论中忽略横向剪切变形所引起的误差。

瑞斯纳(E. Reissner)引入平均转角的概念，认为变形前垂直于中面的直法线，变形后仍为直线，以代替直法线假设。该理论考虑了横向剪切变形的影响，得到的基本方程是一组 6 阶偏微分方程式，在每一边上需要满足 3 个边界条件。随后格林(A. Green)、明特林(R. D. Mindlin)相继发展了瑞斯纳理论。同一时期亨奇(H. Hencky)、科龙(A. Kromm)和符拉索夫(Б. Власов)分别提出各自的精化理论。丕恩克[4](Vladimir Panc)在其专著中介绍了各种主要的精化理论。各种理论得到的方程式与瑞斯纳理论的基本关系式相比，差别都是属于 $(\frac{h}{a})^2$ 阶的量，h 和 a 分别表示板厚和中面的最小特征尺寸。这些精化理论特别是瑞斯纳理论和符拉索夫理论，目前被广泛用于复合材料层合板理论和薄板的断裂分析中。

对于厚板必须用三维弹性力学方法进行研究，在圣维南翻译克莱勃许的书中给出了这类问题的几个解。关于圆形板的几个严格解由科洛波夫(A. Korobov)求得。米歇尔(J. H. Michhell)提出平板严格理论的一般性探讨，且由乐甫(A. E. H. Love)在他的《弹性力学》专著中作了进一步的发展。由于数学上的困难，以往只有少量的问题得到严格解。

随着计算机和计算技术的发展，不仅使数值计算方法应运而生并广泛使用，而且也促进了弹性力学解析方法的重新活跃。约翰逊(M. W. Johnson)和立脱尔(R. W. Little)从二维弹性理论的基本方程出发研究板条问题的精确解。如果板条相邻两边分别指定位移和应力，则角点处往往出现应力奇异现象，这时解的收敛性很

差。这些问题在威廉姆斯(M. L. Willams)、彭什姆(J. P. Benthem)和格莱高里(R. D. Gregory)的论文中都已有详细的讨论。

如果板的形状、载荷情况和支承条件都比较复杂而难以求得精确解,工程师们就依赖于近似分析。在板的理论中广泛应用李兹法和伽辽金法,并得到很多重要的结果。在某些复杂情况下,采用差分方程并用数字计算得到所需的数字结果。

从 60 年代开始,随着电子计算机的高速发展,有限单元法已广泛应用于力学的所有分支。对于几何形状复杂的板,在任意的载荷分布和支承条件下,有限元法都能简单地予以处理,因而成为薄板分析中最有用的方法之一。早期薄板有限元的主要工作是在近似理论的基础上,寻求具有 C^1 连续的单元形式。60 年代中期提出的各种保续单元如 21 个自由度的三角形单元、凝缩的四边形单元和混合单元等不同程度地满足单元间公共边上转角连续的条件,但是计算都很复杂。

对于中厚板的有限元分析,呼格海斯(T. R. J. Hughes)首先提出基于明特林理论的双线性 4 结点四边形单元。该单元考虑横向剪切变形的影响,同时若选择适当的高斯(C. F. Guass)积分点又可分析薄板问题。由于位移模式是双线性函数,刚度矩阵的计算非常简单,鉴于这些优点这个单元模式引起人们极大的兴趣。但是当板极薄时易发生单元闭锁(mesh locking)现象以及减少积分点时导致零能模式的出现。近年来提出的基于二类变量广义变分原理的 4 结点通用单元能克服上述缺点,对中厚板和薄板都能得到高精度的解。此外,唐立民提出的拟协调元是使变形方程弱化,而与弱化的平衡方程相匹配,选用适当的内插函数也可以自然地避免发生单元闭锁和零能模式。

薄壳主要是以沿厚度均匀分布的中面应力而不是以弯曲应力来承受外载。它具有重量轻、强度高的优点,所以在航天、航空、造船、化工、建筑、水利和机械等工业中得到广泛的应用。

自从 1874 年德国的阿龙(H. Aron)和 1888 年英国的乐甫建

立薄壳理论以来，随着壳体结构在工程中逐步推广，壳体理论也随之发展。特别自本世纪 60 年代开始，各国经济、科技的高速发展，促使理论研究飞速进展。以壳体论文为例，从 1886 年至 1960 年，每年的论文数量可用指数公式 $N=(e^{0.074n}-1)$表示，n 是从 1886 年开始计算的年数，1960 年为 238 篇。但近年来，壳体方面的论文数目已高达千篇以上；内容非常广泛，因而不可能全面评述壳体理论学科的发展动向。

1874 年阿龙将薄板理论中的基尔霍夫假设推广到壳体，1888 年经乐甫修正，形成至今仍然广泛采用的薄壳理论。进入 20 世纪后，在生产技术的推动下，壳体理论曾有较大的发展。当时主要是针对不同类型的壳体建立各种简化理论。50 年代开始对基尔霍夫-乐甫假设进行修正，使薄壳理论精确化。

在壳体一般理论的研究中，除了阿龙和乐甫外还有其他的科学家进行了深入的工作。虽然当时的乐甫理论一度被人们所追随，但是存在着许多缺点。这些缺点主要表现在基尔霍夫-乐甫假设的许可范围内对小量的处理上，具有不一致性。乐甫理论的这一缺点，后来被贝恩(R. Byrne)、诺伏日洛夫(В. В. Новожилов)、瑞斯纳、桑德尔(J. L. Sanders)，符拉索夫、钱伟长等人加以修正。其中贝雷(J. G. Berry)、瑞斯纳、科伊特、钱伟长等人抛弃了乐甫所保留的那些小量，而贝恩、弗吕格(W. Flügge)、诺伏日洛夫、桑德尔等人则补充了那些被乐甫所略去的小量，建立了他们各自的薄壳理论。因而这就产生了目前壳体理论中所出现的各种不同形式的基本方程，但是它们都在基尔霍夫-乐甫假设的精度范围之内。

在历史上壳体无矩理论的提出，要比一般壳体理论为早。由于壳体具有边缘弯曲的局部效应，在壳体的大部分区域处于无矩状态，加上无矩理论的计算简单，因此在工程计算上具有重要的意义。

早在 19 世纪，压力容器和水箱的计算公式已被广为应用。瑞斯纳在 1912 年首先讨论了非轴对称载荷下，旋转壳体的无矩理

论。对于负高斯曲率壳体的无矩计算开始由弗吕格(1947 年)进行研究。特鲁斯德尔(C. Truesdell)在 1945 年对旋转壳体的无矩理论作了评论性的讨论。在任意载荷作用下圆柱壳的无矩理论,由汤马(D. Thoma)首次提出。多角形穹顶的无矩计算,则由迪辛格(F. Dischinger)于 1929 年进行过研究。迪辛格还研究了仿射壳的无矩理论。折板结构的无矩计算,由克来谟(H. Craemer)在 1930 年作过讨论。对于任意形状壳体的薄膜变形,盖林(F. T. Geyling)于 1945 年在斯坦福大学发表的论文中作了详细的讨论。

圆柱形薄壳制作方便,应用极为广泛。此外,圆柱壳沿母线方向的曲率为零,而其周向曲率又为常数,所以易于进行理论分析。圆柱壳弯曲理论的建立,应当首推弗吕格的工作。他除了应用基尔霍夫-乐甫假设外,没有再作其它的近似,但是圆柱壳方程的表达式相当复杂。1933 年唐奈(L. H. Donnell)作了简化,对于较短的圆柱壳,唐奈方程具有一定的精度,但是对于较长的圆柱壳唐奈方程有显著的误差。1959 年莫利(F. W. Morley)对唐奈方程作了改进,从而提高了唐奈方程的精度并且扩大了它的应用范围,形式也得到了简化。1932 年符拉索夫针对周向加筋的长圆柱壳提出了一种简化的半无矩理论。它是在忽略柱体母线方向所有弯矩和周向变形基础上建立的理论,它还被推广应用于任意截面形状的长柱形壳体。

对于旋转壳的研究,德国的瑞斯纳(H. Reissner)和瑞士的迈斯纳(E. Meissner)分别于 1912 年和 1913 年以旋转壳经线上的横向剪力和纬线方向的主曲率半径的积作为变量,并用经线上切线的转角为另一变量,将壳体基本方程简化成两个互相耦合的 2 阶常微分方程组。由于壳体弯曲具有边界效应,作为初级近似,盖克勒(J. W. Geckeler)于 1926 年曾利用这一特点把方程进一步简化。由于原来微分方程具有渐近性质,因此可以用渐近积分方法求得精度较高的解。对于非轴对称边缘载荷作用下旋转壳的研究,哈文斯(A. Havers)、诺洛(H. Nollau)、威脱力克(W. H. Wittrick)进

行了这方面的工作。

对于工程上常用的拱高较小的扁壳，马格雷(K. Marguerre)、穆什塔利(Ф. М. Муштари)于 1938 年分别根据其几何特点建立了这类壳体的基本方程。1944 年符拉索夫将这一成果发展成为系统的扁壳近似理论。由于这个近似理论的简化和圆柱壳中的唐奈方程的近似假设相同，扁壳理论应用于零高斯曲率的圆柱壳同唐奈方程完全一致，因此扁壳方程也可以说是唐奈方程的推广。

壳体的弹性稳定性问题的研究，首先从 20 世纪初圆柱壳的研究开始。弗吕格等人用壳体变形的小挠度理论求得圆柱壳轴压的临界值。卡门和钱学森在 1939 年发现：薄壳失稳的临界载荷低于用线性理论求得的值，并且指出必须用几何非线性理论来处理这个问题。从此出现了非线性稳定理论。以后，施泰因(M. Stein)等人在 1962 年以后的数年中研究了非线性前屈曲性能及其对于临界压力的影响，他的研究成果肯定了小挠度理论的价值。

实际工程壳体中总存在着缺陷，它们都会影响稳定性。科伊特在 1945 年提出非完善结构的稳定性准则，引出“初始缺陷敏感度”的概念。他的理论将缺陷敏感度与理想的完善结构的初始后屈曲性能联系起来，因而称为初始后屈曲理论。

对于非线性壳体理论的研究，辛格(J. L. Synge)和钱伟长于 1940 年用张量工具建立了弹性薄板和弹性薄壳的内禀理论。根据这个理论，钱伟长于 1943 年从分析应变和薄壳曲率的量级入手，对这种内禀理论的各个方程进行不同近似程度的分类，其中不少是反映几何非线性理论的统一的薄壳方程组，后来被人称为钱伟长方程组。在非线性薄壳理论的方程组确定以后，寻求有效而简单的求解方法成为研究的主要内容。钱伟长提出的摄动法和叶开源提出的修正迭代法对于求解非线性薄壳问题都是十分有效的。可以说这些方法的出现，使得求解某些非线性方程的繁复工作成为可能。

研究薄壳有限变形问题的关键是建立正确的壳体大变形、大

转动的基本方程组。这方面值得提出的是彼得拉斯克维奇(W. Pietraszkiewicz)的一系列工作。国内陈至达[5]利用拖带坐标以及和分解定理导出考虑有限旋转的壳体变形分量表达式，在此基础上建立有限元方程，求解壳体的非线性问题。

在70年代以前，复合材料的壳体理论建立在基尔霍夫-乐甫假设的基础上，目前这方面的研究日趋精化，分析中都考虑横向剪切效应。对于层合壳体，蔡四维提出多层异性圆柱壳体的精化理论，周承倜利用能量法和有限差分法分析多层复合材料圆柱壳的非线性失稳特性，并讨论了横向剪切变形的影响。柯伯杨斯基(S. Kobayashi)等研究纤维-环氧复合圆柱壳的受压屈曲理论，分析了屈曲变形对屈曲载荷的影响。

在复合材料的壳体优化设计方面，孙(G. Sun)等讨论了多层复合材料圆柱壳受有组合载荷时屈曲载荷的优化问题。以屈曲载荷作为目标函数，以分层纤维方向作为优化参数进行优化设计，考虑了边界条件和非线性前屈曲效应，使用的方法是摄动法。文逊(J. R. Vinson)研究了具有腹板加强复合层壳受面内压力下的最小重量。

当前复合材料的壳体理论研究已较深入，今后应考虑基体的弹塑性(金属基)、粘弹性(树脂基)对复合材料壳体的弯曲、振动、稳定等的影响。

三维弹性理论解法可以用来分析厚壳。这个解可以作为一个参考标准用来检验各种实用理论和数值方法的可靠性及其适用范围。三维弹性理论的解法多种多样，最常用的方法是特征函数法。

史迪芬(G. P. Steven)研究了空心圆柱的特征值问题，讨论了壳厚取几种不同的极限情况时特征值的一些性质。长期以来，纳维方程解的推导大多是通过引入位移函数而归结为调和方程或双调和方程。这种方法往往显得迂回曲折，有时候也不易找到合适的位移函数。盖哈特(T. O. Gerhardt)和程埙直接从各向同性体球坐标中的纳维方程出发，通过变量分离，将偏微分方程化为一组耦合的

常微分方程，最终得到各向同性体一般非轴对称的位移通解。

壳体结构的耦合问题是目前壳体理论的主要研究方向，关于壳体和水在冲击波压下的相互作用，首先由卡莱(G. F. Carrier)用积分变换和级数解技巧给予系统地阐述。明特林等首先对横向阶跃入射波的情况给出了早期渐近解。盖尔(T. L. Geers)研究了潜浸在无限流体介质中无限长弹性圆柱壳受到横向瞬态声学波作用的问题。

壳体和土壤、岩石在冲击波压下的相互作用问题，曾由毛何(C. C. Mow)、巴龙(M. L. Baron)等人仔细研究。他们采用叠加法考虑由于常量的传播压力波的衍射作用引起的埋设壳体的响应。巴龙等人还采用积分变换确定在线弹性介质中无衬垫圆柱孔洞附近的压力波所引起的应力、位移、速度和加速度。苏联学者雅柯巴甫(Р. Г. Якупов)在爆炸波对壳体的作用研究方面作了大量的工作。

随着电子计算机的进步，薄壳理论数值计算以及理论分析和数值计算相结合两方面都有着迅速的发展。在各种数值计算方法中，有限元法最适宜分析具有任意曲面形状、复杂的加载和支承型式、不规则加筋和开孔等实际的壳体结构。按照对壳体几何形状的简化，壳体单元可以分为平板单元、曲面单元和由三维等参元退化的壳单元。

早在1961年，格里纳(B. E. Greene)等就已采用平板单元的概念。该单元表达格式简单，而且在平板弯曲单元上只要增添平面应力单元就能分析壳体问题。只是当时缺乏 C^1 连续的三角形平板单元型式，致使将它用于壳体分析的努力一度受到阻碍。

因为曲面单元在与单元界面相垂直的方向上的切线是连续的，同时在薄膜应变中耦合法向位移的影响，因此如果网格划分和结点位移参数相同，曲面单元常可得到比平板单元更好的结果。曲面单元的缺点是位移函数较难满足刚体运动的要求。斯脱列克莱特(G. E. Strickland)等提出的三角形扁壳元的位移函数未能反映