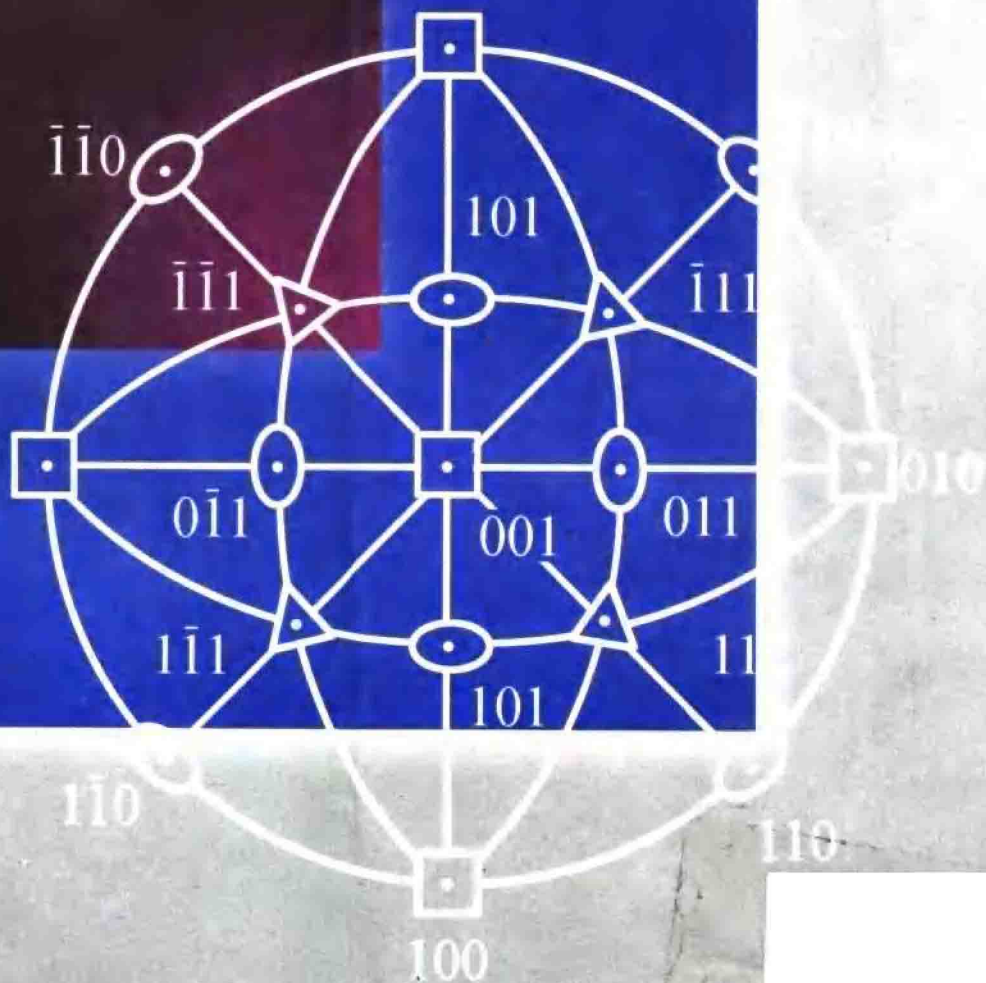


武汉大学本科生系列教材

周孝安
赵咸凯
谭锡安
郭玉华
合编

近代 物理 实验 教程



武汉大学出版社

近代物理实验教程

周孝安 赵咸凯 合编
谭锡安 郭五华

武汉大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

近代物理实验教程/周孝安…〔等〕编. —武汉: 武汉大学出版社, 1998. 1
武汉大学本科生系列教材
ISBN 7-307-02548-5

- I 近…
- II 周…
- III 物理, 近代—实验—教材
- IV O-33

武汉大学出版社出版

(430072 武昌 珞珈山)

湖北省武汉第二印刷厂印刷

(430100 武汉市蔡甸区正街176号)

1998年1月第1版 1998年1月第1次印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 23.625

字数: 570千字 印数: 1—2000

ISBN 7-307-02548-5/O·189 定价: 24.80元

本书如有印装质量问题, 请寄承印厂调换

前 言

武汉大学物理系近代物理实验室的前身是始建于 1955 年的中级物理实验室。1978 年根据高等教育部的统一命名,改为近代物理实验室。本书是依据 1989 年审订的《综合大学物理专业近代物理实验教学基本要求》,在武汉大学物理系近代物理实验教学实践和历届近代物理实验讲义的基础上编写的。近代物理实验室的建立集中了历年从事近代物理实验教学的教师和实验技术人员的集体智慧,虽然他们有的已不在此实验室工作,但本教材中也有他们的劳动成果。

本书共收进八个单元 27 个实验,撰写人的姓名已在各篇的末尾载明。

金明桥同志为本书绘制了插图。本书在编写过程中还参阅了有关院校的近代物理实验教材。在此一并致谢。

对书中的错误和不妥之处,我们真诚欢迎使用本书的教师、学生和各位读者批评指正。

编 者

于武汉大学物理系

湖北 430072

1996 年 6 月

目 录

绪 论	1
0-1 怎样做好近代物理实验	1
0-2 实验的数据处理和误差分析	6
第一单元 原子物理实验	45
1-1 夫兰克-赫兹实验及再绍尔效应	45
1-2 氢(氘)原子光谱	55
1-3 钠原子光谱的拍摄与分析	70
1-4 塞曼效应	77
1-5 双原子分子光谱	86
1-6 x 射线标识谱与吸收	95
1-7 电子电荷的测定 ——电视显微 CCD 技术的应用	102
第二单元 原子核物理实验	114
2-0 预备知识	114
2-1 盖革-弥勒计数器及核衰变的统计规律	130
2-2 γ 闪烁谱仪及 γ 射线能谱的测量	143
2-3 符合测量	154
2-4 穆斯堡尔效应及穆斯堡尔谱分析	163
2-5 正电子寿命谱	189
第三单元 光学	197
3-1 激光拉曼光谱	197
3-2 光子计数	208
第四单元 真空技术	219
4-0 前言	219
4-1 电子衍射及中、低真空的获得与测量	222
4-2 射频溅射薄膜的制作与膜厚的测量	233
4-3 斯特恩-革拉赫实验——离子钛泵与超高真空的测量	238

第五单元 X 射线与电子衍射	249
5-0 晶体衍射的基本知识	249
5-1 多晶体 X 射线衍射及德拜相的摄取与分析	258
5-2 单晶体取向的测定(劳厄法)	272
5-3 透射电子显微镜	279
5-4 X 射线衍射仪的实验技术	286
第六单元 微波技术	294
6-0 微波技术基础知识	294
6-1 微波测量	307
6-2 微波电子顺磁共振实验	316
第七单元 磁共振技术	325
7-1 核磁共振	325
7-2 光泵磁共振	337
第八单元 计算机应用	347
8-1 核辐射的微机数据采集与处理	347
8-2 CCD 数字图像处理	351
附 录 综合大学物理学专业(四年制)近代物理实验教学基本要求	359
附 表	362
附表 1 常用物理常数	362
附表 2 标准正态分布的分布函数 $N(\chi; 0, 1)$ 数值表	363
附表 3 χ^2 分布的 $\chi^2(\nu)$ 数值表	364
附表 4 t 分布的 t_α 数值表	366
附表 5 里德伯表	368
附表 6 中华人民共和国法定计量单位	370

结 论

0-1 怎样做好近代物理实验

近代物理实验是为物理类专业学生在完成普通物理及无线电电子学实验后开设的实验课程。对四年制本科,一般安排在第六、七两个学期。分为必修和选修两部分,共8个学分,需148个学时,历时一学年。课内外学时比为1:1.5。

学生往往要用比做普通物理实验多一至三倍的时间进行实验前的准备及实验数据的处理和分析。这是正常的,因为近代物理实验有一定的难度和它自身的特点。经过一学期的努力,约有近15%的学生能获得优秀的成绩。但尚有少数同学达不到课程要求。许多学生往往是因为不懂得如何做好实验或思想上对实验能力和素质的训练缺乏正确的认识。下面就本课程的任务、教学内容和学习方法谈几点看法。这些问题如果认真解决了,就几乎可以保证一个学生在本课程中取得好的成绩。

一、近代物理实验课程的目的和任务

物理学是以实验为基础的科学。物理实验在物理学发展史上占有重要的地位。例如量子论的产生就是基于对光和实物相互作用的研究。近代物理实验不同于普通物理实验,是一门涉及知识面较广、综合性和技术性较强的实验课,在整个物理专业实验教学中具有承上启下的作用,它从近代物理的主要领域选取一些在物理学发展史中起过重要作用的著名实验以及在实验方法和实验技术上有代表性的实验进行教学。在教学中要求对学生进行严格的实验素质训练,活跃学生的物理思想,锻炼他们对物理现象的洞察力,正确认识新的物理概念的产生、形成和发展过程,培养严谨的科学作风和用实验方法研究物理现象与规律的独立工作能力。这将是我们在本课程中贯彻始终的目标。

二、课程教学内容及特点

1. 近代物理时期以量子论的建立为标志,量子力学的发展与原子物理有着密切的联系。原子物理实验是近代物理实验课程选题的重要组成部分,其中有些是物理学发展史上的著名实验。这些实验提供学生亲自研究近代物理学中一些基本物理现象和规律的机会;亲自测量一些基本物理量如 e 、 e/m 、 g (Landé因子)、 γ (旋磁比)、 μ (原子磁矩、核磁矩)、 c (光速)等。做好这些实验有助于学生了解如何用实验手段研究物理现象与规律,加深对物理概念和理论的理解,并认识物理实验在物理学发展史中的地位和作用。

2. 近代物理实验综合性较强,它要求学生运用涉及物理学许多领域的知识和实验技术。学生在普通物理实验中使用过的仪器如示波器、真空泵等,在本课程中还需进一步熟练和更灵活地运用。在本课程中还将接触一些比较精密的、近代物理研究中常用到的测试仪器和技术,如精密光学摄谱仪、核辐射探测仪、真空技术、X射线和电子衍射技术、多通道脉冲分析技术、微波测试技术、磁共振技术等。通过实验进行科学实验技能、特别是正确选用和使用基本仪器设备能力的培养。

3. 实验误差与数据处理是一个重要的训练内容。实验课中学生要在普通物理实验训练的基础上,提高分析实验系统误差和随机误差的能力,用简明的方法有条理地表达数据,科学地处理数据,正确地表达实验结果。要学习对大量数据进行理论曲线拟合的方法。

4. 电子计算机在科学研究、现代管理和生产流程、工艺控制等方面应用越来越广泛。将计算机引入物理实验,大大提高了测量精度和实验自动化的程度。由于另开设有“微机原理及应用”和“接口技术”课程,本书将着重将微机用于实验数据的采集、处理和实验过程的控制方面。

三、学习方法

1. 在近代物理实验的选题中,许多是历史上著名的实验。成功地做出这些实验的第一个物理学家(有的实验就是以他们的名字命名的)以坚韧不拔的精神,经历了数年的努力。这些典型的实验已被重复过几千上万次。正如培养神枪手需要练习打靶一样,一个真正的物理学家正是从重复这些人所共知的实验开始训练出来的。历史事实证明,一个新的物理现象的发现往往需要物理学家从成千上万个几乎相同的物理现象中发现具有新鲜的、差别微小然而也可能是本质不同的性质。这种对物理现象的洞察能力是物理学家取得成功的极其可贵的素质。

实验课和理论课不同,主要靠学生自己动脑思考、动手操作。近代物理实验课中许多选题是需要学生自己作好实验准备的。特别是有些选题是三年级学生在理论课中没有涉及的内容,需要学生自己学习。所以实验前一定要认真阅读有关资料,努力作好理论的各种准备:弄明白命题的目标,实验的物理思想,实现的方法,所用的公式,需要什么仪器及其精确度,以及关键的实验步骤等。总之,一个有科学头脑的、善于且勤于学习的学生,应将大部分时间花在实验前的准备上。通常,读取数据的时间是不需要很多的。最初,许多学生对这样做很不习惯并感到费力,但经过自己一段努力和教师的严格要求,是会尝到甜头的。

实验选题的内容虽具有相对的稳定性,但随着我国经济建设的发展,将不断地提出要求增加新实验,引进新方法,改进旧实验。学生要善于看参考资料和仪器说明书。通过参阅资料,用读者自己的心得体会去补充教材内容。学生在这一环节中的表现,也是实验能力评分的依据之一。

教材中每一个实验编写的风格和要求的侧重方面不一定相同。所以,撰写内容有的着重在原理部分,有的着重在实验方法、实验步骤或数据处理上。总之,需要学生自己去开动脑筋,发挥其创造精神。

2. 学生通过实验课要锻炼自己设计实验和选用仪器的能力。一个物理现象或物理规律需要用实验方法予以实现;物理量需要通过一定的仪器来测量;实验结果要求达到一定的精确度需要各种仪器精确度相配合。用成套的仪器测量所需要的全部实验结果的机会在现实

生活中是很少的。一个新的物理现象的发现往往没有现成成套的仪器可以利用。所以设计实验和选用仪器的能力是进行科学研究工作、解决实际问题必须具备的能力。

桌上已摆好进行实验所用的设备,但决不要满足于现成的东西。要多问几个为什么,看看这些仪器是否适合自己的需要,是否有更好的实验方案和方法。

要爱护国家财产,遵守操作规程。那种一知半解、进实验室就盲目地乱动旋钮、乱拨开关的坏习气,只说明一个学生没有好的实验素质,决不反映他的聪明。

实验前要检查仪器的好坏。一些数字式仪表都有自检方法。有些表头需要轻轻敲一敲看它能否自由摆动,有的仪器需要先试试或进行调谐才能正式读取数据。实验中出现的异常现象如仪器失调、指示值与实际不符等,要善于且勤于作好记录(有专门的记录本供使用)。如果你习惯于观察并作好这些记录,说明你已初步具备进行研究工作的重要素质之一。但还没有证明你具备修理这些仪器的能力时,仪器出了故障,要找实验室有关负责人帮助你排除,不得自行拆开。

3. 原始记录是实验中获得物理信息的最重要、最珍贵的资料。每个学生必须备一个实验数据原始记录本。实验前画好记录表格,严肃认真地记录一切现象和数据,不要涂改或撕掉。不要怕记了“坏数据”,只有通过数据的分析才能确定是否需要实验仪器或实验操作进行改进。即使是一台完好的仪器也可能偶然地给出不合理的数值(如G-M管实验)。科学工作的任务在于善于合理地剔除不合理的数据。遇到这种情况,可对原始记录数据加上记号。

要善于自己判断数据是否合理。例如弗兰克-赫兹实验,在读取第一轮数据后就应根据记录在坐标纸上作出简图,大致估计一下各峰值的位置是否合理;作测定电子电荷实验时,应用最初的数据进行估算,看所选油滴是否恰当。不要将一大张数据表交给教师“审查”。征求教师意见时,要能提出你自己的看法。

简明地、有条理地表达数据是实验能力的重要方面,实验课中记录表格的设计和作图能力反映了学生实验素质的差异,希望同学们予以重视。

为使同学们巩固计算机语言编程能力,实验室提供了用微型计算机处理实验数据的条件。要求每个学生在一学期中至少用一次自编程序在计算机上处理实验数据。

四、实验课的进行程序

1. 时间安排和编组

近代物理实验课中,由于实验本身的原因,完成各实验命题所需时间是不同的,实验室内工作时间一般为4~8小时。按大纲要求的课内外学时比为1:1.5。各学生完成实验所用的时间也是有差异的。我们给予各班安排固定的实验课时间,但各学生准备实验的时间不受此限制。

学生一般以二人为一组进行实验。这是因为:一方面,有的实验需要两人合作(如Millikan油滴实验);另一方面,万一出了事故,有个同伴在场便于急救。

2. 实验预习

我们将准备实验的环节仍叫“实验预习”。实验的准备工作要二人协调一致。步调不一,造成同伴等待是浪费别人时间。他不等你,自己先做,你没作好预习,实验无收获,也是浪费时间。

不作预习,不得动用仪器,这是实验课的纪律。事实证明,学生没有准备(其他人也一样),是没有能力完成实验的。

实验前的准备工作在“教学方法”一节中已作了叙述。通常包括弄清命题目标、实验物理思想、所用公式、需直接测量的物理量和记录数据的表格等。对设计性实验,还要写出自己的实验方案及步骤。

3. 实验报告

实验报告的内容通常包括:

命题;

实验的物理思想、原理、基本公式、实现方案等;

实验步骤,按实验现象出现的客观规律及待测量的次序,合理安排实验的操作程序;

(以上几部分实际上在预习时已准备好,不用重写。如有变化,可作补充。)

经整理后的数据及图表;

运算及数据处理过程;

误差分析;

表达结果;

对结果进行讨论。

各个实验对报告还可能具体要求,以上的书写程式仅作参考。

五、实验室安全知识

近几年来,近代物理实验室除发生过学生违反操作规程损坏仪器的事故外,尚未发生过人身事故。但安全操作仍是到实验室来工作的全体人员应予以足够重视的问题。

1. 电气

除 220V 和 380V 的供电外,许多实验设备(如各种放电管、激光管、X 射线衍射仪、电子衍射仪以及各种核探测设备等),均使用从 400 伏到 4 万伏不等的高压电源。这些高压电都是能致命的,一定要注意实验中各种高压电器的标志。实验前在确认断电的情况下先检查地线,接好高压线后再连接供电线(有的仪器不必另外接高压线,应先接通低压电源再开高压开关),使用完后一定要将高压降下来再断电。作为一个常识,接高压线或高压开关,只能用一只手操作。

射频电磁波能够通过小电容器耦合。接触高频高电压器件的任何部分都是危险的。因为人体起着接地电容器的一个板极的作用。例如高频火花发生器约 20 兆赫兹,你的身体对地电容的作用几乎像一根电线连到水管上一样。所以要严格遵守操作规程。

需要打开仪器外壳时,一定要先拔掉电源插头!

2. 防辐射

γ 射线和 X 射线都能伤害人体。实验中已采取了必要的防护措施。一次实验所接触和吸收的剂量是很微量的,对身体并无妨碍。但即使这样,也应该尽量避免直接接触放射源。实验前请参阅 2-0-1 节关于放射性辐射的防护知识。

在调整 X 射线照像系统和电子衍射仪时,X 射线对人眼的损伤是不能忽视的。所以要戴上铅玻璃眼镜,并不要让 X 射线直接照射眼睛。不用的窗口要用铅板遮盖,并加防护罩。因为高压使空气电离产生臭氧和 N_2O ,实验室内要有良好的通风。

激光能使人产生灼伤。小功率激光管发射的激光也不能直接照射眼睛。因为人眼就像一个小透镜,它将光斑聚焦在眼底,局部能量将增大许多倍。

光谱室的电弧中有很强的紫外线成分,同样能灼伤眼睛,也要注意装好防护屏。

3. 机械

在转动机械装置旁工作,要将头发束好。过长的头发、过宽的裤腿和飘动的衣裙都不适宜在转动机械旁工作。

4. 低温

有的实验要接触液氮、液氦。直接接触易使皮肤局部冻伤。但主要危险来自残存液体蒸发使密闭容器爆炸,抛出玻璃碎片。所以要将容器充足液体。容器不用时,要让残存液体顺利地自然蒸发。

5. 仪器

仪器损坏的主要原因来自学生违反操作规程。其中又以接错电源占多数。所以学生一定要在接线路时谨慎一些,弄清楚输入、输出电压以后再连线。对不作预习,违反操作规程,严重损坏实验设备的情况均要作处理,直至取消实验资格。我们希望不要出现这种情况,所以同学们要认真作好实验前的准备工作,用科学的态度和踏实的作风,完成实验课的学习任务。

(周孝安 编)

0-2 实验的数据处理和误差分析

0-2-1 引言

物理学发展史说明,物理学是以实验为基础的科学。物理规律的发现、物理概念的建立以及物理学的不断发展,无不以科学实验为基础。可以这样说,在物理学发展的各个历程,无不贯穿着理论与实验的互相依托,相辅相成,互相促进,共同发展。物理学能取得今天如此辉煌的成就,正是实验和理论密切结合的结果。美籍华裔物理学家丁肇中教授在1967年冬荣获诺贝尔物理奖后特意用中文发表了一封信,他写道:“中国有一句古话:‘劳心者治人,劳力者治于人’。这种落后的思想,对发展中国家的青年有很大的害处。由于这种思想,很多发展中国家的学生都倾向于理论的研究,而避开实验工作……。事实上,自然科学理论不能离开实验的基础。特别是,物理学是从实验产生的……。我希望由于我这次得奖,能够唤起发展中国家的学生的兴趣,从而注意实验工作的重要性。”这段肺腑之言表达了一个海外学者对中国青年学生的殷切期望,说得是多么中肯啊!

提供事实、验证理论、测定常数、推广应用这四个方基本上概括了实验在物理学发展中的作用,而实验又总是除了观察实验现象外,还必须对有关的物理量进行测量,以得到一系列的实验数据,然后再运用一定的数学工具,对实验数据进行科学的分析和整理,才能总结出所测定的各个物理量之间的规律性联系,从而认识所研究对象的本质。例如焦耳于1840年从电流的热效应发现所产生的热量与电流的平方、电阻及时间成正比,在此基础上,焦耳先后于1843、1845、1847、1849,直至1878年,用了多种方法测量热功当量,历经40年,共进行了400多次实验,获得了大量数据,为热力学第一定律的建立直接提供了确凿的依据。又例如密立根于1906~1917年测单个电子电荷值 e ,前后历经11年,实验方法做过三次改革,做了上千次数据,根据这些数据所做的运算,确定 e 值的精确值为 $(4.770 \pm 0.005) \times 10^{-10} \text{esu}$ 。1937年,豪斯顿发现密立根采用的粘滞系数 η 值(是他的一位研究生哈灵顿在1916年测出的)有系统误差,经过豪斯顿的改进, η 值提高了0.4%,代入密立根的数据,得到 $e = 4.803 \times 10^{-10} \text{esu}$ 。用X射线晶体衍射法所得的最佳结果为 $e = (4.8021 \pm 0.006) \times 10^{-10} \text{esu}$ 。1973年起采用的国际标准值为 $e = 1.6021892 \times 10^{-19} \text{库} = 4.803242 \times 10^{-10} \text{esu}$ (误差 2.9×10^{-6})。电子电荷是基本常数,对它的精确测定,在理论上和实际工作中都有重要意义。从上述的例子可以看出物理实验及物理实验数据的处理对物理学所具有的重要作用。

对物理量的测量,总是希望通过误差的数学处理使测量得到的物理量更接近于真实值,但由于测量的途径不一样,测量的仪器不相同,以及在任何情况下,测量值所表现出来的一定的随机性,即总是或多或少地偏离真值,再加上对数据处理所采用的不同方法,必然会产生对所测结果有不同的置信度,从而确定实验的有效程度,作为有关理论的依据。一个没有

标明置信度的实验结果是毫无意义的。例如对基本物理常数可以用不同方法测定,或者经各种定律和理论相互联系,这中间就有一个认定和协调的问题,如果众说纷纭或者不协调,必然引起严重误差。早在 20 世纪之初,科学界就有人致力于总结出一套协调的基本物理常数供公众采用。1929 年伯奇发表了著名论文《普通物理常数的可几值》,系统地对基本物理常数进行分析评定,对不同来源的数据进行对比,加以修正,用最小二乘法逐项处理基本物理常数,求其最可几值,并由此向公众推荐了一套较可靠的基本物理常数。论文发表后,反响强烈。物理学发展到今天,对基本物理常数的测定方法更加先进可靠,数据处理更加科学,数据结果更加精确,可信程度更高。下面选几个较重要的基本物理常数,列表略述其历史发展概况加以说明。

表 0-2-1 历年来真空中光速的测量结果

年代	工作者	方法	结果(千米/秒)	不确定度(千米/秒)
1907	Rosa, Dorsey	esu/emu	299784	15
1928	Karolus 等	克尔盒	299786	15
1947	Essen 等	谐振腔	299792	4
1949	Aslakson	雷达	299792.4	2.4
1951	Bergstrand	光电测距仪	299793.1	0.26
1954	Froome	微波干涉仪	299792.75	0.3
1964	Rank 等	带光谱	299792.8	0.4
1972	Bay 等	稳频 He-Ne 激光器	299792.462	0.018
1973		平差	299792.4580	0.0012
1974	Blaney	稳频 CO ₂ 激光器	299792.4590	0.0006
1976	Woods 等		299792.4588	0.0002
1980	Baird 等	稳频 He-Ne 激光器	299792.4581	0.0019
1983	国际协议		299792.458	(精确值)

表 0-2-2 历年来普朗克常数的测量结果

年代	工作者	方法	结果(10^{-34} J _s)	相对不确定度
1900	Planck	黑体辐射	6.55	
1916	Millikan	光电效应	6.547(6)	
1921	叶企孙等	X 射线连续谱	6.556(9)	
1955		平差	6.62517(23)	
1969		平差	6.626196(50)	7.5×10^{-6}
1973		平差	6.626176(36)	5.4×10^{-6}
1986		平差	6.6260755(40)	0.6×10^{-6}

表 0-2-3

历年来电子电荷的测量结果

年代	工作者	方法	结果(10^{-19}C)	相对不确定度
1917	Millikan	油滴仪	1.592(2)	
1930	Bearden	X 射线测晶体结构	1.603(1)	
1947		平差	1.60199(24)	
1950		平差	1.601864(23)	
1955		平差	1.60206(3)	
1963		平差	1.60210(2)	
1969		平差	1.6021917(70)	4.4×10^{-6}
1973		平差	1.6021892(46)	2.9×10^{-6}
1986		平差	1.60217733(49)	0.3×10^{-6}

表 0-2-4

历年来里德伯常数的测量结果

年代	工作者	方法	结果(cm^{-1})	相对不确定度
1890	Rydberg	光谱	109721.6	
1921	Birge	光谱精细结构	109736.9	
1929	Birge	光谱精细结构	109737.42	
1952	Cohen	平差	109737.309(12)	0.11×10^{-6}
1969	Taylor	液氮, 氖谱	109737.312(5)	0.046×10^{-6}
1972	Kessler	氦谱	109737.3177(83)	0.076×10^{-6}
1973		平差	109737.3177(83)	
1974	Hansch	饱和吸收光谱	109737.3143(10)	$9.1 \times 10^{-3} \times 10^{-6}$
1976	Goldsmith	偏振光谱法	109737.31476(32)	$2.9 \times 10^{-3} \times 10^{-6}$
1981	Amin	交叉光谱法	109737.31521(11)	$1.0 \times 10^{-3} \times 10^{-6}$
1986	Zhao 等	平差	109737.31534(13)	$1.2 \times 10^{-3} \times 10^{-6}$
1986		交叉光谱法	109737.31569(7)	$6.4 \times 10^{-4} \times 10^{-6}$
1989	Biraben 等	重新校对频率标准	109737.315709(18)	$1.6 \times 10^{-4} \times 10^{-6}$

事实上,由于物理学更加深入的发展,由于物理学作为一门基础学科必然渗透并融合于其它学科,而产生出许多物理学的分支学科和一些边缘学科,实验方法和手段更加复杂,要求测量的物理量更加精确,数据处理的方法更加可靠,置信程度要求更高,所以作为一名物理学本科生,在大学期间不仅要学好物理学的基本理论,还要做好实验,学会对实验数据的数学处理方法。实际上,不论是随机误差还是物理量本身实际数值的统计涨落,它们都服从统计规律,需要用数学的一个重要分支“概率论和数理统计”方法来处理,这方面已有很多相应的著作。这里只就实验中涉及到的有关实验数据处理的有关概念和理论及有关系统误差

的发现和消除方法作一扼要介绍。

0-2-2 误差理论基础

一、随机变量

1. 随机事件及其概率

在一定条件下,对某一物理量进行测量,由于测量中存在无法控制的某些偶然因素或被测对象的随机性,因此某一测得值 A 可能出现也可能不出现,我们称 A 为随机事件。

如果在一定条件下进行了 N 次重复测试,其中测得值 A 出现了 N_A 次,则比值 $\frac{N_A}{N}$ 称为随机事件 A 的频率。若重复进行很多组这样测试,发现随机事件 A 的频率 $\frac{N_A}{N}$ 总是在某一确定值的上下起伏,每组测试次数 N 越大,则起伏的幅度就越小。因此说,随机事件的频率存在一个极限值,此值称为事件 A 的概率,以 $P_r(A)$ 表示。

2. 随机变量及样本

测量的结果可随机地取不同数值的量称为随机变量。在一定条件下,对某一物理量的测量,被测的量就是一个随机变量,而每一次的测得值就是随机变量的取值。

随机变量的全部可能取值的集合称为母体或总体。如测试共进行了 N 次,得到的 N 个随机数 (x_1, x_2, \dots, x_N) 称为子样或样本。

随机数仅可取有限个或可数的一系列数值的随机变量称为离散随机变量。随机数可取某一区间内的任何数值的随机变量称为连续随机变量。

3. 分布函数和概率密度函数

在一定的条件下,某一随机变量的某一取值能否出现,是无法确定的,但是它出现的可能性,也就是它的出现概率是有确定数值的。因此在研究随机变量的问题中,我们不仅需要知道随机变量的全部可能值,还必须了解各种可能取值出现的概率,即随机变量的概率分布。

随机变量 X 的概率分布可以用分布函数 $P(x)$ 来表示。随机变量 X 取值小于或等于 x 的随机事件的概率 $P_r(X \leq x)$ 等于分布函数在 x 处的值,即

$$P(x) = P_r(X \leq x)$$

显然分布函数必满足

$$P(x = -\infty) = 0, P(x = \infty) = 1$$

对于离散型随机变量 X ,它只能取可数的数值 x_1, x_2, \dots ,除了用分布函数外,还常用概率函数 $p(x)$ 来描述它的概率分布。概率函数在某一点 x 处的值等于随机变量 X 取值 x 的概率,即

$$p(x) = P_r(X = x)$$

所以有 $P(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$ 及 $\sum_x p(x_i) = P(x = \infty) = 1$ (对 x 的所有可能取值求和),离散型随机变量概率函数和分布函数的形状如图 0-2-1 所示。

对于连续型随机变量,定义概率密度函数

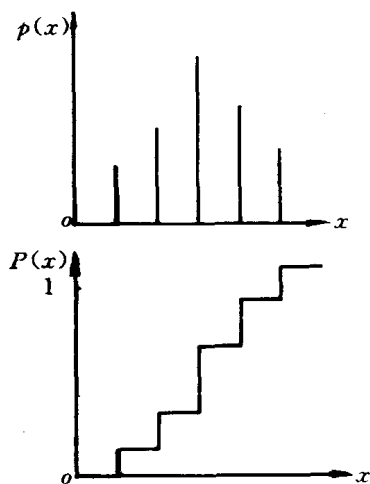


图 0-2-1 离散型随机变量的概率函数(上)及分布函数(下)

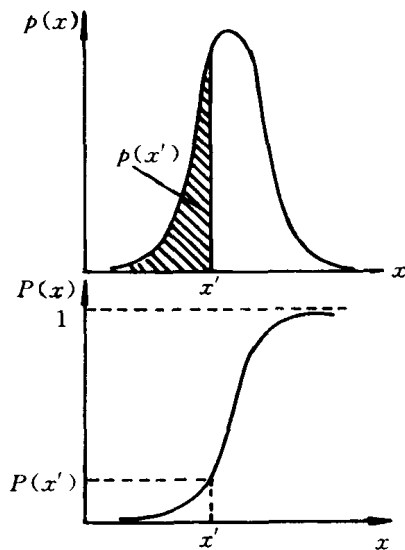


图 0-2-2 连续随机变量的概率密度曲线(上)及分布函数曲线(下)

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}$$

即随机变量的值落入某一点附近一无限小区间 dx 内的概率, 等于该点的概率密度与此无限小区间的乘积。显然有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

这就是归一化条件。

随机变量在某一区间 $[a, b]$ 内取值的概率为

$$P_r(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx$$

由图 0-2-2 可见, 密度曲线在横轴上任一点 x' 左侧曲线下包围的面积, 就是分布函数曲线在 x' 点的数值。由于归一化条件, 密度曲线下的总面积为 1。分布函数曲线为单调上升到 1 的曲线。

4. 随机变量分布的数字特征量

随机变量的概率分布是对于随机变量的一种完全的描述。如果一个随机变量的概率密度函数的形式已知, 那么只要给出函数式中的各个参数(称为分布参数)的数值, 则随机变量的分布就完全确定了。在物理实验中, 这种分布参数常常就是需要研究的物理量。在各种数字特征量中, 最重要的就是随机变量的数学期望值和方差。

(1) 数学期望值。随机变量 x 的数学期望值 $\langle x \rangle$ 定义为

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx$$

它的物理意义是作无穷多次重复测量时, 测量结果的平均值。它是随机变量概率密度分布曲线的重心位置, 随机变量则围绕着期望值取值。对于单峰对称的分布曲线, 期望值就是曲线的峰值位置。

离散型随机变量的期望值为

$$\langle x \rangle = \sum_x xp(x_i)$$

(2) 方差。随机变量 x 的方差 $\text{Var}(x)$ 定义为

$$\text{Var}(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx$$

对于离散型随机变量, 方差为

$$\text{Var}(x) = \sum_x (x - \langle x \rangle)^2 p(x_i)$$

方差的平方根称为随机变量的标准误差, 记为

$$\sigma(x) = [\text{Var}(x)]^{1/2}$$

因此方差又可写为 $\sigma^2(x)$ 。方差或标准误差的大小表征随机变量的数值在期望值左右分布的离散程度。方差越小, 随机变量的数值在期望值附近分布得越集中; 反之, 方差越大则数值越分散。

(3) 协方差。两个随机变量 x 和 y 的协方差定义为

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) p(x, y) dx dy \\ &= \langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle \end{aligned}$$

它表征在测试中二随机变量取值的相关程度。 $p(x, y)$ 称为联合概率密度函数。根据概率论, 若 x 与 y 为互相独立的随机变量, 则 $p(x, y)$ 等于 x 和 y 的概率密度函数的乘积, 即 $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$ 。可见, 当 x 和 y 相互独立时, 必有 $\text{Cov}(x, y) = 0$ 。反之, $\text{Cov}(x, y) = 0$ 。 x 和 y 可为互相独立的, 也可能不是互相独立的。若 $\text{Cov}(x, y) \neq 0$ 则 x, y 必定不互相独立, 或说它们之间存在某种联系。

通常用相关系数 $\rho(x, y)$ 来描述 x 和 y 的相关程度:

$$\rho(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

其中 $\sigma(x), \sigma(y)$ 分别为 x 和 y 的标准误差。

可以证明: $|\rho(x, y)| \leq 1$ 。当 $\rho(x, y) = 0$ 时, 则 x 与 y 互不相关。若 $\rho(x, y) \neq 0$ 则表明 x 与 y 之间存在一定程度的线性相关。当 $\rho(x, y) > 0$ 时, 若一个随机变量增加, 另一个随机变量有按线性增大的趋势, 称 x 与 y 正相关; 当 $\rho(x, y) < 0$ 时, 则一个变量随另一个变量的增大而有减小的趋势, 称 x 与 y 负相关。 $|\rho(x, y)|$ 之值越接近于 1 时, 这种线性相关性就越明显。当 $|\rho(x, y)| = 1$ 时, 则二个变量为完全线性相关, x 与 y 之间存在线性关系。

二、随机变量遵从的几种常用分布

1. 二项式分布

二项式分布是离散型分布。在对某一随机事件进行独立测量时, 若事件出现的概率为 p , 不出现的概率为 $q (q = 1 - p)$, 那么 n 次独立重复测量中, 该事件出现 k 次的概率为

$$P_n(k) = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (0-2-1)$$

它的数学期望(或称平均值)为 $\bar{k} = np$, 方差为 $\sigma^2(k) = npq$ 。

2. 泊松分布

泊松分布是离散型分布, 当二项式分布中的 n 很大 p 又很小时, 即对稀有事件进行很