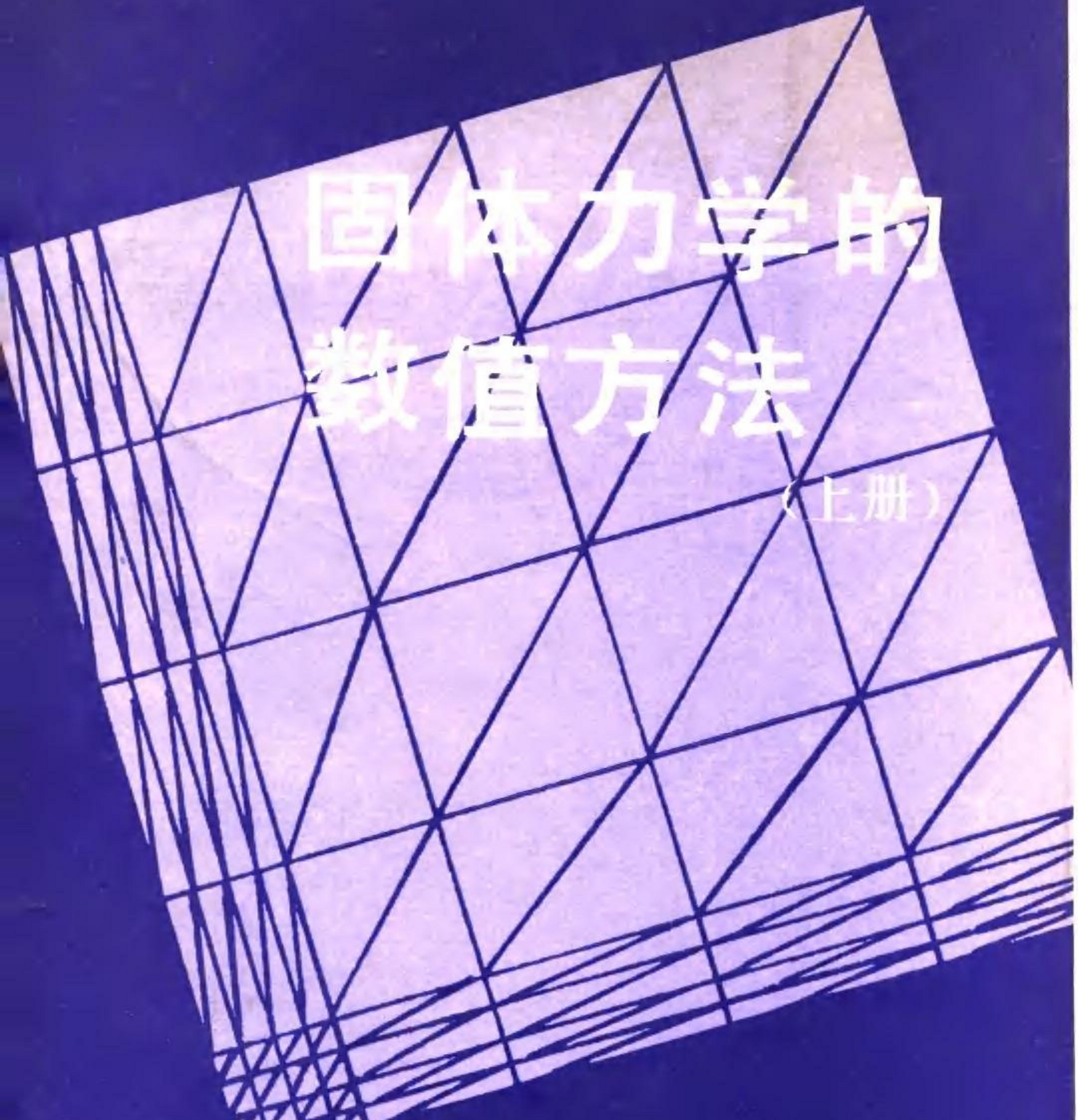

固体力学的数值方法

（上册）

杨海元　张敬宇　赵志岗　编著

天津大学出版社

固体力学的数值方法

（上 册）

杨海元 张敬宇 赵志岗 编著

天津大学出版社

内 容 提 要

本书(上册)主要讲授能量法，介绍弹性力学与塑性力学各种问题的能量原理，用能量原理构造近似解的广义伽辽金法、里兹法及理兹法的有限元形式。主要内容有：预备知识，弹性力学经典能量原理，广义变分原理，能量原理的应用，有限变形下的能量原理，特征值问题的能量原理等。

固体力学的数值方法
(上册)
杨海元　张赣宇　赵志岗　编著
*
天津大学出版社出版
(天津大学内)
河北省永清县印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本：787×1092毫米1/16　印张：17 1/4 字数：430千字
1991年2月第一版　1991年2月第一次印刷
印数：1—2000
ISBN 7-5618-0235-8
O·26
定价：4.85元

前　　言

弹塑性力学的数值方法是弹性力学与塑性力学的重要组成部分，它推动了弹塑性理论的发展，也使得弹塑性理论广泛服务于生产实际成为可能，具有很大的实用价值和理论价值。本书是在作者们1980年编写的研究生教材《弹性力学（二）》的基础上编写的，它集中了迄今为止在工程实际中日益广泛采用的弹塑性力学的各种近似方法，主要有能量法、差分法、加权残数法和边界积分方程法等。

本书用来讲授能量法，即介绍弹性力学各种问题的能量原理，用能量原理构造近似解的广义伽辽金法、里兹法以及里兹法的有限元形式。除综合近期这些方面的有关成就外，其中有些内容反映了我们近几年来的有关研究成果和讲授这门课的经验。

第一章至第六章由张敬宇执笔，第七章至第九章由赵志岗执笔，全册由杨海元审阅、定稿。

编　者

1990年10月

目　录

第一章 预备知识

§1-1 张量符号表示法

对于弹塑性力学中所研究的物理量，经常用它们在指定坐标系中的分量来表示。最常用的坐标是笛卡尔直角坐标。考虑一般性的弹性力学空间问题，每个向量（或叫一阶张量）有三个分量，如点的位移向量有分量u、v、w；每个张量（指二阶张量）有九个分量，如点的应力张量有分量σ_x、τ_{xy}、τ_{xz}、τ_{yx}、σ_y、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{zy}、σ_z（由于剪应力互等、应力张量是对称的，只有六个独立分量）。为使各变量分量以及由它们组成的方程写得简单，经常采用指标符号。

1. 指标符号及有关约定

我们用带有一个下标的符号表示向量的分量，如用a_i表示向量$\vec{a}$的分量，规定下标i取值1、2、3，可得a_1、a_2、a_3。用带有两个下标的符号表示二阶张量的分量，如用b_{ij}表示张量B的分量，规定下标i、j分别取值1、2、3，可得b_{11}、b_{12}、b_{13}、b_{21}、…、b_{33}，即为B的九个分量。当然，类似地还可用带有三个下标的符号C_{ijk}表示三阶张量C的分量，等等。

具体地说，在本书中，将用x_i表示一点的坐标向量（或矢径，见图1-1）的分量，用u_i、f_i、$\bar{F}_{ni}$分别表示一点的位移向量、体力集度向量和表面力集度向量的分量。用σ_{ij}(图1-2)和e_{ij}分别表示应力张量和应变张量的分量。在图1-1中，把有关工程符号注在圆括号里，以资比较。

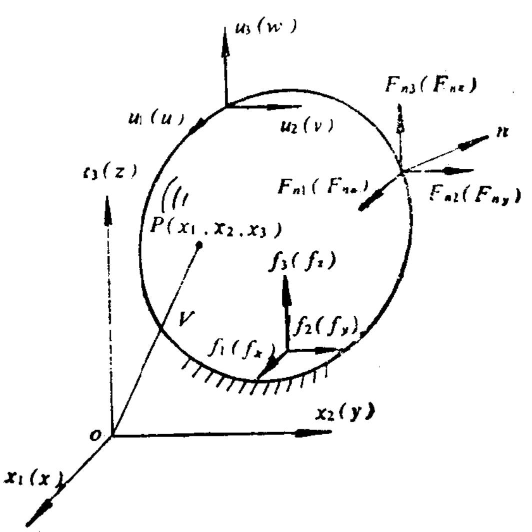

图 1-1

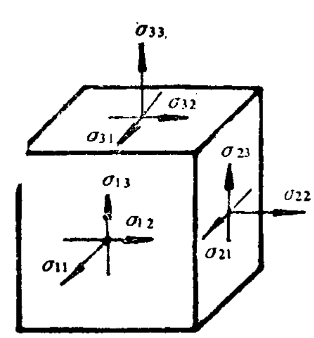

图 1-2

对于用指标符号书写的方程式有下面几条约定：

取值约定：当某指标在某方程的同一项中只出现一次时，意味着该指标应取值1、2、3。例如，据此约定，方程

$$a_i + b_i = c_i \tag{1-1}$$

代表着如下三个方程

$$a_1 + b_1 = c_1$$
$$a_2 + b_2 = c_2$$
$$a_3 + b_3 = c_3$$

求和约定：当某指标在某方程的同一项中出现二次时，意味着对重复指标由1～3取值求和。例如

$$\left.\begin{aligned}
a_i b_i &= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\
a_{ij} b_i c_j &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_i c_j = a_{11} b_1 c_1 + a_{12} b_1 c_2 \\
&\quad + a_{13} b_1 c_3 + a_{21} b_2 c_1 + a_{22} b_2 c_2 \\
&\quad + a_{23} b_2 c_3 + a_{31} b_3 c_1 + a_{32} b_3 c_2 + a_{33} b_3 c_3 \\
a_{ij} b_j &= \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_j = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3
\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

逗号约定：有时在一个量的指标后面加逗号，逗号后再加写指标i或ij等，这意味着该量对x_i或连续对x_i、x_j等求偏导，例如

$$a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, \qquad b_{ij,k} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}, \qquad c_{ij,kl} = \frac{\partial^2 c_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \tag{1-3}$$

应特别指出，取值约定和求和约定同样适用于带逗号的指标。例如，上面的$a_{i,j}$代表着如下九个量：$\frac{\partial a_1}{\partial x_1}$、$\frac{\partial a_1}{\partial x_2}$，$\frac{\partial a_1}{\partial x_3}$、$\frac{\partial a_2}{\partial x_1}$……$\frac{\partial a_3}{\partial x_3}$。又如

$$a_{i,i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \tag{1-4}$$

按上述，我们有指标符号的两种情况：在一项中重复出现的指标和非重复出现的指标。重复出现的指标做哑指标（简称哑标），这是因为一项中的重复指标可代换以其它任何字母而不影响其效果。例如，不难验证

$$a_i b_i = a_l b_l, \quad a_{ij} b_{jk} = a_{in} b_{nk} \tag{1-5}$$

而非重复出现的指标则不能在一项中随意以其它字母代换，常叫做明指标（简称明标）。

2．弹性力学问题控制方程和边界条件的张量符号记法

对于由弹性力学经典理论得到的控制方程和边界条件，我们可以把各变量的工程符号直接替换以上面规定的张量符号，然后再根据上述诸约定缩写为比较简单的形式。下面把各方程替换后的形式和缩写后的形式一起列出，读者不难校验其正确性。

（1）平衡（运动）方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+f_1&=\rho\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}\\\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}+f_2&=\rho\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}\\\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+f_3&=\rho\frac{\partial^2u_3}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\quad \sigma_{ij,j}+f_i=\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}\tag{1-6}$$

（2）几何方程

$$\left.\begin{aligned}&e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\qquad e_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\qquad e_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\\&e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^*\\&e_{23}=e_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\\&e_{31}=e_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\end{aligned}\right\}\quad e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\tag{1-7}$$

（3）物理方程（广义虎克定律）

对于各向同性材料，用应力表达应变时，有：

$$\left.\begin{aligned}&e_{11}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\mu(\sigma_{22}+\sigma_{33})]\\&e_{22}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\mu(\sigma_{33}+\sigma_{11})]\\&e_{33}=\frac{1}{E}[\sigma_{33}-\mu(\sigma_{11}+\sigma_{22})]\\&e_{12}=\frac{1}{2G}\sigma_{12}\\&e_{23}=\frac{1}{2G}\sigma_{23}\\&e_{31}=\frac{1}{2G}\sigma_{31}\end{aligned}\right\}\quad e_{ij}=\frac{1}{2G}\sigma_{ij}-\frac{\mu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}\tag{1-8a}$$

式中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & 当 i=j\\0 & 当 i\neq j\end{cases}\tag{1-9}$$

而E、G和μ分别为弹性模量、剪切弹性模量和波松系数。

用应变表达应力时，有

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{11}=2Ge_{11}+\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})\\&\sigma_{22}=2Ge_{22}+\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})\\&\sigma_{33}=2Ge_{33}+\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})\\&\sigma_{12}=2Ge_{12}\\&\sigma_{23}=2Ge_{23}\\&\sigma_{31}=2Ge_{31}\end{aligned}\right\}\quad \sigma_{ij}=2Ge_{ij}+\lambda\delta_{ij}e_{kk}\tag{1-8b}$$

* 这里定义的剪应变相当于工程剪应变分量的一半。

这里，λ为拉梅常数，且有关系

$$\lambda=\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \tag{1-10}$$

对于各向异性材料，可写出缩写式的一般形式

$$\left.\begin{array}{ll} e_{ij}=b_{ijkl}\sigma_{kl} & (a) \\ \text{或者} & \\ \sigma_{ij}=a_{ijkl}e_{kl} & (b) \end{array}\right\} \tag{1-11}$$

这里a_{ijkl}和b_{ijkl}泛称弹性常数，为四阶张量的分量。考虑到应力张量和应变张量的对称性以及应变能密度函数存在的事实，它们有如下关系

$$\left.\begin{array}{ll} a_{ijkl}=a_{klij}=a_{jikl}=a_{ijlk} & (a) \\ b_{ijkl}=b_{klij}=b_{jikl}=b_{ijlk} & (b) \end{array}\right\} \tag{1-12}$$

（4）力的边界条件

设边界上一点处外法线为n，并令

$$n_1=\cos(n,x_1)\ ,\ n_2=\cos(n,x_2)\ ,\ n_3=\cos(n,x_3) \tag{1-13}$$

在力给定的边界S_1上有关系

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2+\sigma_{13}n_3=\bar{F}_{n1} \\ \sigma_{21}n_1+\sigma_{22}n_2+\sigma_{23}n_3=\bar{F}_{n2} \\ \sigma_{31}n_1+\sigma_{32}n_2+\sigma_{33}n_3=\bar{F}_{n3} \end{array}\right\} \sigma_{ij}n_j=\bar{F}_{ni} \tag{1-14}$$

（5）位移边界条件

在给定位移的边界S_2上有关系

$$\left.\begin{array}{l} u_1=\bar{u}_1 \\ u_2=\bar{u}_2 \\ u_3=\bar{u}_3 \end{array}\right\} u_i=\bar{u}_i \tag{1-15}$$

对于控制方程和边界条件若按其反映的客观规律的性质进行分类，那么方程（1-6）、（1-14）属于一类，它们反映了对应力的平衡性要求；（1-7）、（1-15）属于一类，它们反映了对于位移和应变的协调要求；（1-8）属于一类，它反映了应力应变间的物性要求。这种分类法在本书中经常提到。

§1-2 二维和三维问题的分部积分公式

一、二维问题

今有xy平面里的区域A，A的边界为S。边界上一点处的外法线为n，见图1-3。n的方向余弦分别为

$$n_x=\cos(n,x)\ ,\ n_y=\cos(n,y) \tag{1-16}$$

设在区域A里有函数$f(x,y)$和$g(x,y)$，则存在如下关系

$$\int_A f\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}A=\int_A\frac{\partial(fg)}{\partial x}\mathrm{d}A-\int_A g\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}A=\int_S fgn_x\mathrm{d}S-\int_A g\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}A \tag{1-17a}$$

这里，第二步用了格林公式。我们称式（1-17a）为二维问题的分部积分公式，在本书的推演中经常用到这类变换关系。类似地有

$$\int_A f\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}A=\int_S fgn_y\mathrm{d}S-\int_A g\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}A \quad (1\text{-}17b)$$

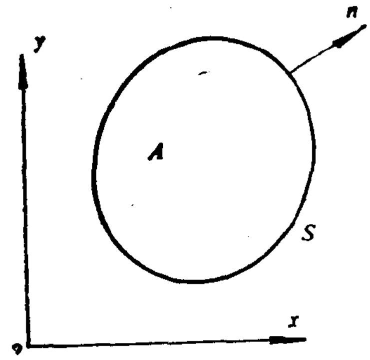

图 1-8

二、三维问题

今有xyz空间（参看图1-1）里的区域V。V的边界为S。边界上一点处的外法线为n。n的方向余弦分别为

$$n_x=\cos(n,x), \quad n_y=\cos(n,y), \quad n_z=\cos(n,z) \quad (1\text{-}18)$$

设在区域V里有函数$f(x,y,z)$和$g(x,y,z)$，则存在如下关系

$$\int_V f\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial(fg)}{\partial x}\mathrm{d}V-\int_V g\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}V=\int_S fgn_x\mathrm{d}S-\int_V g\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}V \quad (1\text{-}19a)$$

这里，第二步用了奥氏公式。我们称式（1-19a）为三维问题的分部积分公式。类似地有

$$\int_V f\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}V=\int_S fgn_y\mathrm{d}S-\int_V g\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}V \quad (1\text{-}19b)$$

$$\int_V f\frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}V=\int_S fgn_z\mathrm{d}S-\int_V g\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}V \quad (1\text{-}19c)$$

如果用张量符号，则x、y、z分别以x_1、x_2、x_3表示，n_x、n_y、n_z分别以n_1、n_2、n_3表示，那么式（1-19）中三式可合并写为

$$\int_V f\frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{d}V=\int_S fgn_i\mathrm{d}S-\int_V g\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}V \quad (1\text{-}20a)$$

如果再使用逗号约定，把$\frac{\partial g}{\partial x_i}$和$\frac{\partial f}{\partial x_i}$分别表以$g_{,i}$和$f_{,i}$，则（1-20$a$）变为

$$\int_V fg_{,i}\mathrm{d}V=\int_S fgn_i\mathrm{d}S-\int_V gf_{,i}\mathrm{d}V \quad (1\text{-}20b)$$

式（1-20b）的形式在本书中使用较多。

第二章　弹性力学的经典能量原理

§2-1　概　　述

读者已熟悉把弹性静力学问题表示为微分方程的边值问题。这就是说，要找的某弹性力学问题的真解，是满足一定的微分方程和相应边界条件的解。为了构造近似解的方便，本章的主要内容是要把弹性力学问题的某些条件表示为某种能量原理，其结果是，可以认为弹性力学问题的真解又是满足一定能量原理的解。某问题的真解是唯一的，所以我们考察建立的能量原理是否正确，就是要证明满足能量原理的解同原有的边值问题的解是相同的。

本章主要讨论这样几个能量原理。首先是考虑虚功方程，从中引出两个对偶的原理，即虚位移原理和虚应力原理，前者用于以位移为基本变量（按位移）求解弹性力学问题，后者用于以应力为基本变量（按应力）求解。然后，由虚位移原理又推出最小势能原理。也用于按位移求解；由虚应力原理推出最小全能原理，也用于按应力求解。最小势能原理和最小余能原理都把问题表示为一种泛函的极值化原理，看得出，在具体求解弹性力学问题时，最小势能原理与虚位移原理的作用类似，最小余能原理与虚应力原理作用类似。不过，在向不同方面推广这些能量原理时，人们喜欢由不同的原理出发，所以长期以来，在弹性力学书里，它们是并存的。

本章还在上述能量原理的基础上讨论了两个有较大实用价值的问题：功的互等定理和应变能上下界定理。还讨论了建立在各种能量原理基础上的近似解法。

这里，和本书以后各章节，为简单计，如无专门指明讨论动力学问题，皆限于静力学问题。

§2-2　虚功方程

1. 可能位移和可能应力

在采用近似解法时，往往要针对待定的基本变量（如位移或应力）事先假设出某种形式的近似函数通常称为试函数，试函数中包含着若干已知函数和待定参数，并且往往要求不管那些待定参数为何值，试函数都能满足弹性力学的部分要求，这就引出所谓可能位移和可能应力的概念。

（1）可能位移和相应的可能应变

满足协调性要求的位移场称为几何可能位移场（简称可能位移或许可位移），也就是满足位移边界条件（1－15）的单值连续的位移场，由这样的位移场按几何方程（1-7）定义的应变场叫相应的几何可能应变场（简称可能应变，或许可应变），或者说，可能位移和相应的可能应变是满足了全部协调性要求的位移和应变。显然，如果由这样的应变场通过物理方程确定的应力场又满足平衡性要求，那么所说的可能位移和相应的可能应变就是问题的真

解，否则就只是可能的。真解是唯一的，而可能位移和可能应变可以有无数多组。

（2） 可能应力

满足全部平衡性要求的应力场，也就是满足平衡（运动）方程（1-6）和力边界条件（1-14）的应力场，叫平衡可能应力场（简称可能应力，或许可应力）。显然，如果由这样的应力场通过物理方程确定的应变场又满足全部协调性要求（即该应变场通过几何方程对应单值连续的位移场，且此位移场满足位移边界条件（1-15）），那么所说的可能应力就是问题的真解，否则就只是可能的。真解是唯一的，而可能应力可以有无数多组。

2. 虚功方程

在给出虚位移原理和虚应力原理（有的书中称为虚功原理和余虚功原理）这两个互相对偶的原理之前，先建立一个更有普遍性的恒等式——虚功方程。

设有一弹性体，体积域为V，表面S_1上作用有表面力，其集度为$\bar{F}_{ni}$，表面S_2上给定位移$\bar{u}_i$，全表面域$S=S_1+S_2$，且V内有集度为f_i的体积力作用，如图2-1所示。

令σ_{ij}为某一任意的可能应力场，它不一定是V中的真实应力场，只是满足平衡性要求，即在体内满足平衡方程，在S_1上满足力边界条件，假设此可能应力场已存在于V中，此后，弹性体中又产生了某一任意的可能位移场u_i。这个位移场，不但不一定是V中真实的位移场，而且也不一定和假设已存在的可能应力场σ_{ij}有什么联系，只是满足协调性要求，即在V内单值连续，在S_2上满足位移边界条件。于是F_{ni}和f_i要在u_i上做功，叫它外力虚功；σ_{ij}也要在与u_i相应的应变场e_{ij}上做功，叫它虚变形功。之所以称为虚功，是因为σ_{ij}和u_i作为虚应力和虚位移都不一定是真实的。

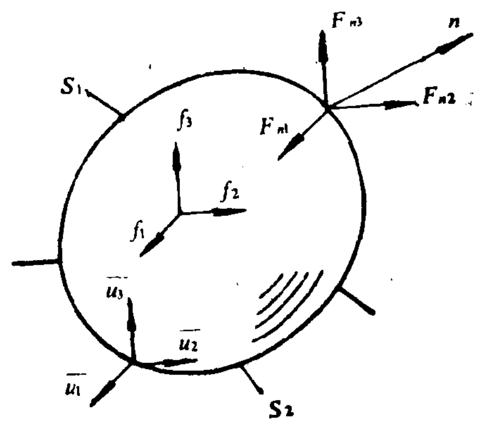

图 2-1

整个物体的外力虚功，据常力作功的算法，可表达为

$$\text{外力虚功}=\int_V (f_1u_1+f_2u_2+f_3u_3)\,\mathrm{d}V+$$

$$\int_{S_1}(\bar{F}_{n1}u_1+\bar{F}_{n2}u_2+\bar{F}_{n3}u_3)\,\mathrm{d}S+\int_{S_2}(F_{n1}\bar{u}_1+F_{n2}\bar{u}_2+F_{n3}\bar{u}_3)\,\mathrm{d}S$$

$$=\int_V f_iu_i\mathrm{d}V+\int_{S_1}\bar{F}_{ni}u_i\mathrm{d}S+\int_{S_2}F_{ni}\bar{u}_i\mathrm{d}S \tag{2-1}$$

这里，F_{n1}、F_{n2}、F_{n3}为S_2上与应力值相应的面力（集度）分量，它们与该处应力分量σ_{ij}及表面外法线方向余弦n_i间有如下关系

$$\left.\begin{aligned}F_{n1}&=\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2+\sigma_{13}n_3=\sigma_{1j}n_j\\F_{n2}&=\sigma_{21}n_1+\sigma_{22}n_2+\sigma_{23}n_3=\sigma_{2j}n_j\\F_{n3}&=\sigma_{31}n_1+\sigma_{32}n_2+\sigma_{33}n_3=\sigma_{3j}n_j\end{aligned}\right\}\quad F_{ni}=\sigma_{ij}n_j \tag{2-2}$$

在式（2-1）和（2-2）的第二步用了求和约定，在式（2-2）的最后一步中用了取值约定。

整个物体的虚变形功，据常力作功的算法，可表达为

$$虚变形功=\int_V(\sigma_{11}e_{11}+\sigma_{12}e_{12}+\sigma_{13}e_{13}+\sigma_{21}e_{21}+\sigma_{22}e_{22}$$

$$+\sigma_{23}e_{23}+\sigma_{31}e_{31}+\sigma_{32}e_{32}+\sigma_{33}e_{33})\mathrm{d}V=\int_V\sigma_{ij}e_{ij}\mathrm{d}V \tag{2-3}$$

式（2-3)的第二步也用了求和约定。

下面将要证明，式（2-1）与式（2-3）恒等，亦即

$$\int_V\sigma_{ij}e_{ij}\mathrm{d}V=\int_V f_iu_i\mathrm{d}V+\int_{S_1}\overline{F}_{ni}u_i\mathrm{d}S+\int_{S_2}F_{ni}\overline{u}_i\mathrm{d}S \tag{2-4}$$

这个恒等关系叫做虚功方程，它的意义是：外力在可能位移上作的功等于可能应力在相应于可能位移的应变上所作之总虚变形功。有人把这一客观规律称为虚功原理。

3. 虚功方程的证明

只要把式（2-4）中各种量之间的关系引入，虚功方程就得到了证明。

式（2-4）中的e_{ij}是与u_i相应的可能应变，它们之间应满足式（1-7），故式（2-4）的左端可写为

$$\int_V\sigma_{ij}e_{ij}\mathrm{d}V=\int_V\sigma_{ij}\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\mathrm{d}V=\int_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{j,i}\right)$$

$$\mathrm{d}V=\int_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+\frac{1}{2}\sigma_{ji}u_{j,i}\right)\mathrm{d}V=\int_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}\right)\mathrm{d}V$$

$$=\int_V\sigma_{ij}u_{i,j}\mathrm{d}V \tag{2-5}$$

推演中第三步利用了应力张量σ_{ij}的对称性，第四步用了哑标可代以其他任何字母这一性质。

式（2-4）中的f_i和σ_{ij}应满足式（1-6），$\overline{F}_{ni}$与σ_{ij}应满足式（1-14），故其右端头两项可写为

$$\int_V f_iu_i\mathrm{d}V+\int_{S_1}\overline{F}_{ni}u_i\mathrm{d}S=-\int_V\sigma_{ij,j}u_i\mathrm{d}V+\int_{S_1}\sigma_{ij}n_ju_i\mathrm{d}S \tag{2-6}$$

式（2-4）中的$\overline{u}_i$与u_i应满足式（1-15），再考虑到式（2-2），其右端第三项可写为

$$\int_{S_2}F_{ni}\overline{u}_i\mathrm{d}S=\int_{S_2}\sigma_{ij}n_ju_i\mathrm{d}S \tag{2-7}$$

把（2-5）～（2-7）代入式（2-4），可得

$$\int_V\sigma_{ij}u_{i,j}\mathrm{d}V+\int_V\sigma_{ij,j}u_i\mathrm{d}V=\int_{S_1}\sigma_{ij}n_ju_i\mathrm{d}S+\int_{S_2}\sigma_{ij}n_ju_i\mathrm{d}S$$

由复合函数求导数的法则，合并左端的两项，并注意到$S_1+S_2=S$，上式变为

$$\int_V (\sigma_{ij}u_i)_{,j}\mathrm{d}V=\int_S \sigma_{ij}u_i n_j \mathrm{d}V \tag{2-4a}$$

上式的成立是显然的，因为它就是关于乘积$\sigma_{ij}u_i$的奥氏公式，故虚功方程成立。也可以把上式左端的被积函数看作是以$\sigma_{ij}u_i$为分量的向量的散度，这样式（2-4a）就是散度定理的直接结果，故也有人把虚功方程看作散度定理的特殊情况。

4．虚功方程必然成立的物理解释

上面对虚功方程的成立作了严格的数学证明，其实从直观的物理概念也能看出它成立的必然性。

对给定的弹性体当假设已存在某可能应力场时，又发生某一可能位移场，对于物体的总虚功，存在两种算法：

一种算法是保持完整的物体为计算对象，这时没有内力显示，显示的力只是物体的外力，据功的概念，物体总虚功就是外力的总功，这便是式（2-4）的右端，亦即

$$\text{物体的总虚功}=\int_V f_i u_i \mathrm{d}V+\int_{S_1}\bar{F}_{ni}u_i\mathrm{d}S+\int_{S_2}F_{ni}\bar{u}_i\mathrm{d}S \tag{2-8}$$

另一种算法是把物体离散为无数多个单元体。首先，据功的定义计算每个单元体上能够显示出的力之功，然后对各单元体求和便是物体总虚功，先算一个单元体沿x_1方向诸力的功（图2-2），在P点有σ_{11}，σ_{12}，σ_{13}，u_1，取坐标增量$\mathrm{d}x_1$，$\mathrm{d}x_2$，$\mathrm{d}x_3$后的Q点有

$$\sigma_{11}+\frac{2\sigma_{11}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1,\quad \sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2,\quad \sigma_{13}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3,\quad u_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3$$

此时有

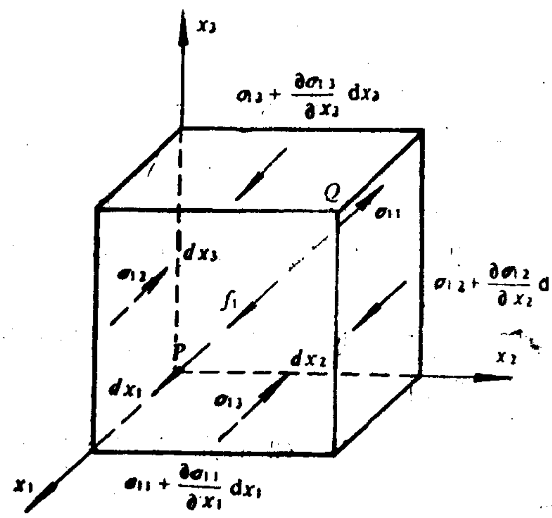

图 2-2

$$\begin{aligned}
&\text{单元体}x_1\text{方向力的全部虚功}\\
&=-\sigma_{11}u_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\\
&+\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)\left(u_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\\
&-\sigma_{12}u_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3\\
&+\left(\sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)\left(u_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3\\
&-\sigma_{13}u_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
&+\left(\sigma_{13}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\left(u_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
&+f_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\\
&=\left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+f_1\right)u_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\\
&+\left(\sigma_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\sigma_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\sigma_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=(\sigma_{1j,j}+f_1)u_1\mathrm{d}V+\sigma_{1j}u_{1,j}\mathrm{d}V
\end{aligned}\tag{2-9a}$$

这里，第二步略去了高阶微量，第三步用了求和约定，并把$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$写为$\mathrm{d}V$，类似（2-9a），可得

$$\text{单元体}x_2\text{方向力的全部虚功}=(\sigma_{2j,j}+f_2)u_2\mathrm{d}V+\sigma_{2j}u_{2,j}\mathrm{d}V \tag{2-9b}$$

$$\text{单元体}x_3\text{方向力的全部虚功}=(\sigma_{3j,j}+f_3)u_3\mathrm{d}V+\sigma_{3j}u_{3,j}\mathrm{d}V \tag{2-9c}$$

进而，把（2-9a）～（2-9c）加起来，并对体积域V积分，得到

$$\text{所有单元体的总虚功} = \int_V (\sigma_{ij,j} + f_j) u_i \mathrm{d}V + \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} \mathrm{d}V = \int_V \sigma_{ij} e_{ij} \mathrm{d}V \qquad (2\text{-}10)$$

这里，第一步用了求和约定，第二步用了式（2-5）的结果，并且由于σ_{ij}是许可应力，消去了包括$\sigma_{ij,j}+f_i(=0)$的一项。

以上两种计算总虚功的方法都是按照所显示出的力在相应位移上所作功的普通定义进行的，但是在第二种算法里，由于分割了单元体，在显示出的力中就较第一种算法多出各切割面上的力。然而，问题的前提是：这里σ_{ij}是可能应力，u_i是可能位移。就是说二者都有连续性，那就不难看出切割面上的力所做之功必然相互抵消。所以，从功的普遍定义出发，只要上述前提存在，则由两种计算方法得到的虚功也应相等，亦即式（2-8）与（2-10）相等。

$$\int_V \sigma_{ij} e_{ij} \mathrm{d}V = \int_V f_i u_i \mathrm{d}V + \int_{S_1} \bar{F}_{ni} u_i \mathrm{d}S + \int_{S_2} F_{ni} \bar{u}_i \mathrm{d}s$$

而这正是式（2-4）。

§2-3 虚位移原理和虚应力原理及其变分形式

现在。我们要从虚功方程出发，推导出一个鉴别可能应力场的原理，它就是虚位移原理，然后再推导出一个鉴别可能位移场的原理，它就是虚应力原理，二者有明显的对偶性。

1. 虚位移原理及其变分形式

原理：应力场是可能应力场存在的充分必要条件是，它与任意一种可能位移场搭配，均能使虚功方程（2-4）成立。

证明：

先证其必要性。就是要证，若应力场σ_{ij}是可能应力场，那么它同任一可能位移场u_i一起代入虚功方程，必然使方程（2-4）成立，其实这就是虚功方程本身的含意，毋需再证。

证其充分性，就是要证，如果一个应力场σ_{ij}^{*}与任一可能位移场u_i一起代入虚功方程使之满足，则它必定是可能应力场，或者说，此应力场必满足问题的平衡微分方程和力的边界条件。

现在把所考察的应力场σ_{ij}^{*}及任意可能位移场u_i（和相应的应变场e_{ij}）代入虚功方程（2-4），得到

$$(2\text{-}4)\text{左端} = \int_V \sigma_{ij}^{*} e_{ij} \mathrm{d}V = \int_V \sigma_{ij}^{*} u_{i,j} \mathrm{d}V$$

$$= \int_{S(S_1+S_2)} \sigma_{ij}^{*} n_j u_i \mathrm{d}S - \int_V \sigma_{ij,j}^{*} u_i \mathrm{d}V$$

这里，第一步用了式（2-5）的推演结果，第二步用了三维问题的分部积分。式（2-4）的右端各项为

$$(2\text{-}4)\text{右端第一项} = \int_V f_i u_i \mathrm{d}V$$