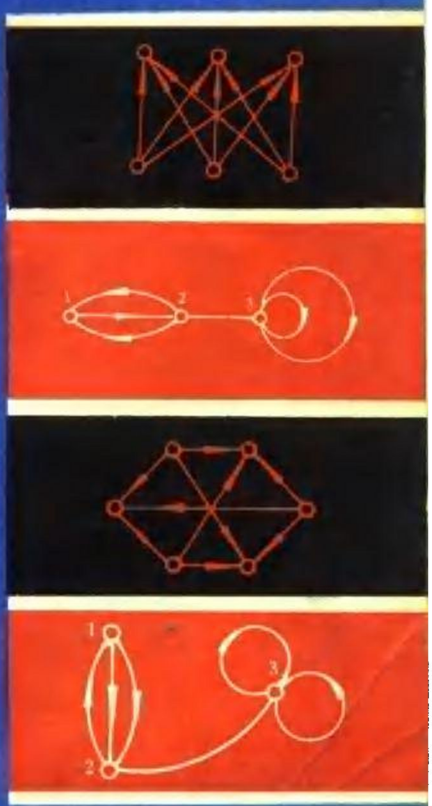
图论方法及应用

范逢曦 编著



山西科学教育出版社

图论方法及应用

范逢曦 编著

*

山西科学教育出版社出版 （太原并州北路十一号）

山西省新华书店发行 山西省七二五厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：8.75 字数：181千字

1987年4月第1版 1987年4月山西第1次印刷

印数：1—2,500册

*

书号：15370·61 定价：2.10元

内 容 简 介

本书是一部解决图论问题的方法学用书。它以“提高经济效益”为目的，以计算机为工具，紧密结合现实生活中“选择最优方案”的各种问题，如最短路径问题、极大流问题、计划评审法与关键路径法、欧拉图与哈密顿图以及运输问题等，系统地讲述了解决方法，计算机算法和一部分程序，可直接运用于实际。各章末均附有一定量的习题及部分答案。

本书写法由浅入深，深入浅出，通俗易懂，便于自学，可供广大从事系统工程、软科学、经济和科技管理以及工程技术人员阅读，又可作为大专院校相应专业的教科书或参考书。

目　　录

第一章　导言……………………………………………（ 1 ）
第二章　图………………………………………………（ 7 ）
　§ 1　基本定义…………………………………………（ 7 ）
　§ 2　子图与同构图……………………………………（ 14 ）
*§ 3　二元关系理论与简单有向图理论的联系…………（ 16 ）
　§ 4　路径………………………………………………（ 18 ）
　习题…………………………………………………（ 25 ）
第三章　图与计算机……………………………………（ 28 ）
　§ 1　图的存贮…………………………………………（ 28 ）
　§ 2　邻接矩阵的某些性质……………………………（ 35 ）
　§ 3　邻接矩阵的幂及其定理…………………………（ 38 ）
　§ 4　算法………………………………………………（ 41 ）
　§ 5　求图的路径矩阵算法……………………………（ 45 ）
　§ 6　Warshall算法……………………………………（ 49 ）
　习题…………………………………………………（ 56 ）
第四章　最短路径问题…………………………………（ 57 ）
　§ 1　树与生成树………………………………………（ 57 ）
　§ 2　网的最小生成树…………………………………（ 62 ）
　§ 3　网络中两结点间最小路径算法…………………（ 65 ）
　§ 4　网络中所有结点对的最小路径算法……………（ 76 ）
　§ 5　网络中二结点间最短路径的BASIC程序………（ 82 ）
　§ 6　最优原理…………………………………………（ 85 ）

习题……………………………………………………………（ 91 ）
第五章 极大流问题……………………………………………（ 92 ）
§1 几个基本定义……………………………………………（ 92 ）
§2 引例………………………………………………………（ 96 ）
§3 增值法……………………………………………………（ 99 ）
§4 推广………………………………………………………（ 104 ）
习题…………………………………………………………（ 107 ）
第六章 PERT图与CPM法……………………………………（ 108 ）
§1 PERT图的有关概念………………………………………（ 109 ）
§2 PERT图的画法……………………………………………（ 115 ）
§3 PERT图参数计算的方法…………………………………（ 120 ）
§4 用计算机计算PERT图中关键路径的算法………（ 123 ）
§5 用计划评审法和关键路径法解决工期成本问题的过程………………………………………………………（ 127 ）
§6 用计划评审法和关键路径法解决工期成本问题的计算机实现……………………………………………（ 132 ）
*§7 完成任务时间的概率计算……………………………（ 139 ）
*§8 三时估计法权值的一些讨论…………………………（ 146 ）
习题…………………………………………………………（ 152 ）
第七章 欧拉图与哈密顿图……………………………………（ 154 ）
§1 问题的提出………………………………………………（ 154 ）
§2 定义和定理………………………………………………（ 158 ）
§3 用计算机解决一笔划问题的算法……………………（ 163 ）
§4 一笔划问题的扩充和应用……………………………（ 165 ）
*§5 含有奇结点的加权无向图一笔划问题……………（ 167 ）
§6 哈密顿图…………………………………………………（ 183 ）
§7 欧拉图与哈密顿图的关系……………………………（ 186 ）
习题…………………………………………………………（ 190 ）

第八章　运输问题的图上作业法和位势法……………（191）
§1　目的和方法………………………………………（192）
§2　简单交通图………………………………………（193）
§3　具有单圈的交通图………………………………（198）
§4　具有多圈的交通图………………………………（202）
*§5　定理1的一种证明………………………………（206）
§6　解运输问题的位势法……………………………（211）
§7　位势法解运输问题的步骤及BASIC程序………（218）
习题…………………………………………………（235）
第九章　图的其他几个有趣问题……………………（236）
§1　平面图与着色问题………………………………（236）
§2　拉姆齐问题………………………………………（240）
§3　图的因子分解……………………………………（242）
§4　FUZZY（模糊）图………………………………（247）
部分习题参考答案……………………………………（257）
参考书刊文献…………………………………………（267）
（注“*”均为较深内容，可选读）

第一章 导言

在数学领域中，专门研究由一组点和联接着点的一组线所组成的图的问题的学科，叫做图论。这是近二十年来离散数学论坛上出现的一门十分活跃的分支。它在生产、生活中有着广泛的应用，不少专题已列入科研课题。因为许多问题都是研究某一类事物和它们之间的某种关系，若用点表示某一类的若干事物，用线表示它们之间的某种关系，这样就可以把要研究的问题抽象成为由一组点和联接着点的一组线所构成的图，从而用图论方法，即一些特定的方法研究，使其获得解决。在阅读后面各章之前，我们可以提出一些较为简单的问题。

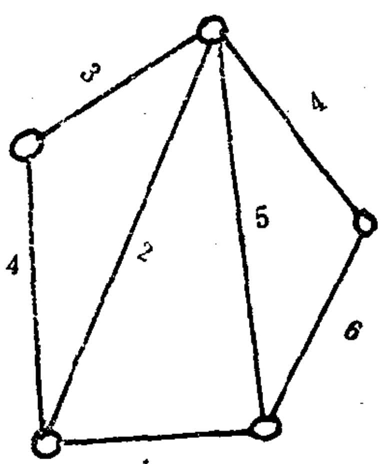


图 1—1

一、某乡镇的五个村，它们之间都有公路相通，如图 1—1 所示。图中连线表示二村间的实际路线（可能为弯曲路线）之长度，标在线的旁边。我们要在这些村间架起电话线，既保证各村之间都能通话（直接或转接），又要电话线路长度最短，试求一个最优方案。如果是50个村、100个村或更多的村镇，怎么求出最优方案呢？简言之，就是如何寻找一条连

通所有村点，并且是线路总长最短的路线。由此问题可推广到一般的问题，即在一复杂图中，如何寻找某两地间的最短路径和所有各地间的最短路径。

二、在某工程施工中，如何最大限度地使用人力、物力，从而提高工作效率、节省工期呢？在工期确定的前提下，按期完成的把握性（即可能性）又有多大呢？

三、在交通运输或信息传递方面，如何做到利用现有的固定设备，使之发挥最大的运输或传递效果呢？

四、在交通图上，特别是铁路运输的交通图上，如何进行物资调运方案的编制，方能达到总吨公里数为最少，即求出最佳调运方案呢？

五、一个邮递员从邮局出发，天天要走遍其投递范围的大街小巷，在其所走的路线中，能否找到一条最短的路线呢？也就是说，这个邮递员每天在每一条街上只是不重复地走过一次，最后完成任务返回邮局。这样的路线是否存在？若存在的话，应具有什么样的条件呢？与此同类的有一个如图1—2所示的哥尼斯堡桥问题。图中A、B、C、D四块陆地

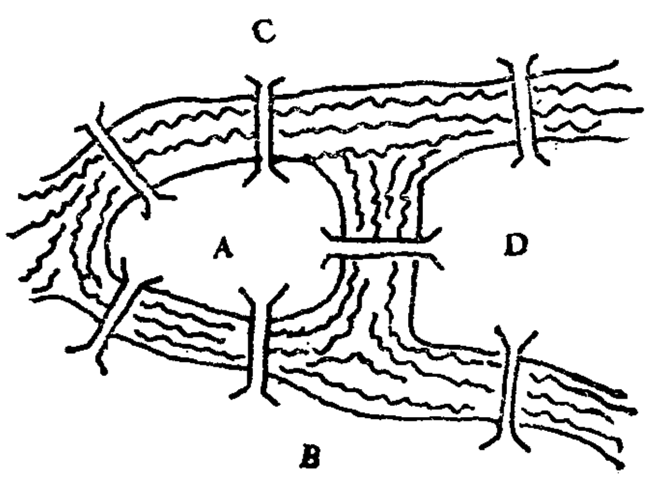


图1—2

由七座桥连通。一个游人想从四块陆地中任一地方出发，每桥只穿程一次，最后返回出发点，这种想法能否实现？

六、某个地区有若干村子，都有道路直接相通，售货员送货上门时，为了节省时间和体力，想寻找一条路线，每个村子只走一次并且走的总路程最短。这样的路线是否存在，能否找到呢？

七、上面五与六的问题有什么联系？二者的关系如何呢？

八、究竟什么叫图？图与计算机有什么联系呢？图论的问题能用计算机求解吗？

九、如何判定一个图是不是平面图，判定平面图有什么价值？平面图的面着色和点着色问题是什么含义？

十、魔方的原理是什么？能否用图的概念进行解释？

上面提出的纲要性的问题，都涉及到图论的内容及其方法的问题。如果您有兴趣的话，可以把这本书读下去，定会有所收益的。

解决图论的问题用什么样的方法呢？这就是本书讨论的重点。本书解决图论问题的方法主要是：运用图论的有关概念，把所讨论的问题归结成为图，吸收数学和现代科学的一些研究方法，形成算法，尽量运用电子计算机，选取最佳方案。用数学语言说，就是“图论与选优方法的交集”。

选优，即是用科学的理论和方法，在一定条件下，找得某一事物的最佳方案。这乃是国民经济建设中重要议题之一。我们在发展国民经济中，总是力求花少的代价而得到较大的经济效益，具体地说，就是用最少的人力、物力、财力、时间、空间，而获得最大的经济效益。

当然，人们根据需要，可以从多方面寻找选优的方法，例如，工程上较多的使用着数学方法，它的主要特征是：①对一个或多个自变量进行选择，使之满足客观问题的要求，得到容许解；一般地说容许解不是唯一的。②在容许解中选择使“好”的程度最大、“坏”的程度最小的解为最优解。在这本书里，不多讲这方面的方法，而是讲如何从图论的角度进行选优。用图的方法选优，它具备这样的一些特点：①图论模型有广泛的适用性；②图论的图解表达直观而清晰；③图论与数学和其它学科有着广泛、密切的联系，能够汲取各个方面的研究方法，不断地丰富图论方法本身。常常有这样的情形，有些用图能表达和解决的问题，用前述数学方法有的难以表达，有的则不易求解。

电子计算机科学的发展为图论与之结合和图论方法的发展开辟了新的途径。许多图论命题的证明以及图论方法，用算法描述后都可借助于计算机求解，收到特殊的成效。举一个著名的“四色定理”的例子就可以看出。最早提出“四色定理”猜想的是德国天文学家兼数学家默比乌斯，但他用数学推理方法证明这个定理，辛苦一生没有成功。1850～1852年英国人格思里试图证明“四色定理”，一直没有成效。1890年英国数学家海胡特证明了“五色定理”，这是很了不起的贡献。但“四色定理”的证明却毫无进展。直到1976年才由美国三位科学家阿丕、哈肯和摩尔利用电子计算机证明了这一定理。据文献记载，他们证明“四色定理”要作逻辑判断近100亿个，证明程序需百万步，使用高速电子计算机还花了一千二百多个小时。如果靠人去计算证明简直是不可思议的。假定一个人每秒运算一次，按一天工作八小时计，

大约相当于一个人25万年的工作量。这就充分说明，图论的产生虽然大约有二百年的历史了，人们称图论的先驱和奠基人是欧拉（他在1736年解决了当时闻名的“哥尼斯堡桥”问题），但在计算机诞生以前，图论及其方法的研究受到种种限制，发展十分缓慢，并不引人注意。近十几年来，图论的蓬勃发展是同新技术的发展相联系的，正是因为这样，现在它涉及的领域就更为广泛，诸如数学、物理学、化学、系统工程、通讯工程、建筑工程、经济学、社会学、语言学、心理学以及计算机科学的各个领域，都与之紧密联系着。就以心理学方面来说，1936年心理学家莱温提出：一个人的“生活空间”可以用一张平面地图来代表。在这样一张地图中，各个区域代表一个人的各种活动，例如他的工作环境，他的家和他的嗜好。实际上，从本书开头就讲到的图的通俗定义中也可以想象到，用一些点代表人，而人与人之间的关系用一些线来代表，这本身就构成了一张图。心理学与社会学都可以在这个基础上研究。由此可见，图的这种应用是很有独到之处的。

遵照“科学技术事业发展的重点应当是为经济建设服务，特别是为解决国民经济中具有重大经济效益的关键问题服务”的方针，作者结合自己多年从事科研、教学的实践，编写了这本书。本书并没有把图论的内容作包罗万象的阐述，而是以计算机为前提和工具展开图论方法学研究的，从应用与计算机结合的角度讲述的，并且总是围绕着“提高经济效益”这样一个原则和目标。每部分既有抽象阐述，又有浅显的例子和方法的结论，有的还有算法、计算机程序及一些习题。本书有较广泛的实用价值，读者面较宽，可供从事系统

工程软科学、社会学、心理学和工、农、商业等国民经济各部门的技术工作者及业务管理人员阅读，又可作为高等和中等专业学校管理科学、系统工程、经济学、社会学、心理学和通讯、计算机、建筑以及数理化等相应专业的教科书和教学参考书。

第二章　图

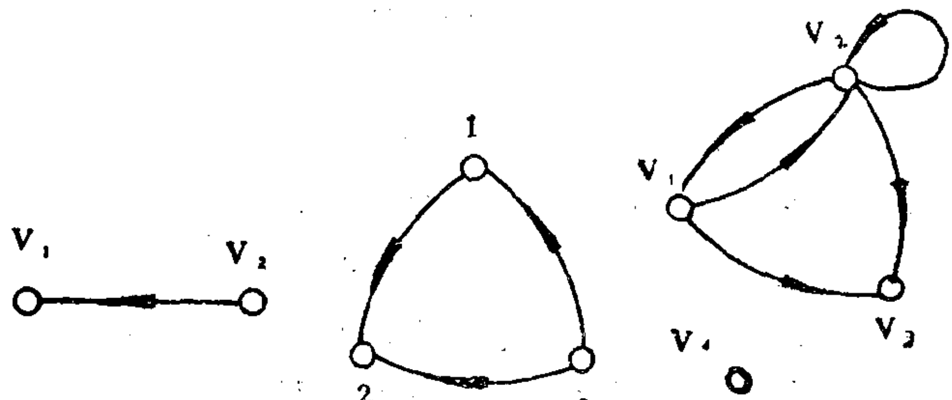
§1 基本定义

图论的术语，目前尚没有统一和标准化，在不同场合几个不同的名称作为同一意义经常碰见。从图论的应用领域的多样性来看，这种现象是很自然的，也是可理解的。很多研究图论的专家、学者认为，图论的术语是决不可能统一的，而且也没有这个必要。尽管如此，这并不影响对图的研讨。莎士比亚在《罗密欧与朱丽叶》一文中有这样的一句话："叫什么名字还不都是一样？我们不管把玫瑰花叫成什么，闻起来还是那么甜香。"这就从文学的角度和哲学的高度说明了不求名词术语统一的必要与可能。

这里，我们从本书的体统上确定一套术语。首先直观地作些定义。

有向图就是由结点以及连接某些结点对之间的具有方向的边所组成的图形。通常，结点用小圆圈表示，一般标上字母记号（如V_1，V_2，……）或数字（如1，2，3 ……）；边用直线或弧线表示，并在边上打上箭头以示方向。如图2—1就是有向图的例子。如果两结点之间至少有一条连接它们的边，则称这两个结点是相邻的。比如，图2—1（3）中，V_1与V_3，V_2与V_3是相邻的；而V_1与V_4，V_2与V_4，V_3与

V_4是不相邻的。在一个有向图中，不与其它任何结点相联的结点称为孤立结点。如图2—1(3)中，V_4就是孤立结点。有向图的边通常用始结点在先、终结点在后的有序结点对来标记。例如图2—1（1）中的边表示为〈V_2，V_1〉，图2—1（2）中的三条边分别表示为〈1，2〉，〈3，2〉，〈3，1〉。显然，始结点和终结点是由边的指向确定的。

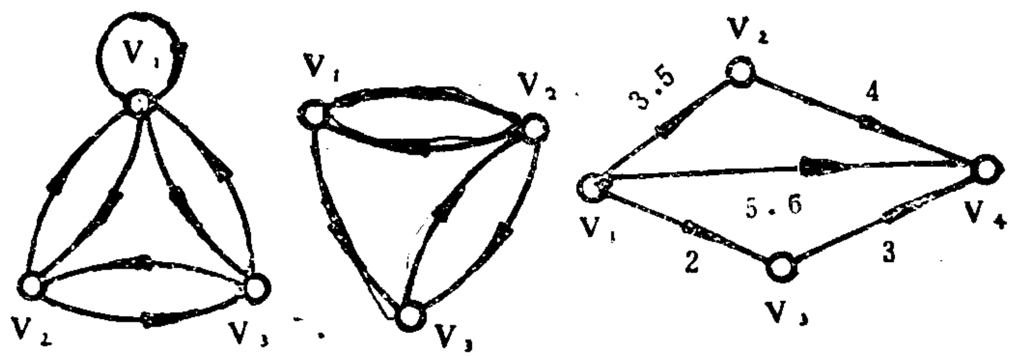


（1）　　　　（2）　　　　（3）

图2—1

任何一对结点间没有重复边的有向图称为**简单有向图**，而包含有重复边的有向图称为**多重有向图**。在某些实际问题中，每条边上都标有一定意义的数字，这样的图，我们称之为**加权有向图**。每条边上的数字称为这条边的**权**。如图2—2，（1）为简单有向图，（2）为多重有向图，（3）为加权有向图。

无向图就是由结点以及连接某些结点对的没有方向的边组成的图形。如图2—3是一个无向图。比如图中(A，B）是一条边，因为（A，B）=（B，A），所以我们认为(A，B）与（B，A）是相同的边。同时我们说A邻接B或B邻接A。因为无向图和有向图的最主要区别是边有没有方向，因



（1）　（2）　（3）

图2—2

此，有向图里的许多术语可以引伸到无向图里。

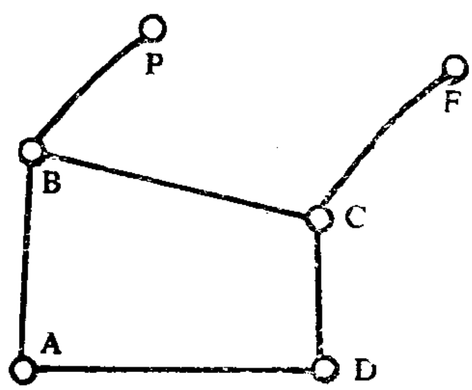


图2—3

有了上述初步直观概念之后，现在我们用集合论的观点来定义图。读者如不熟悉书中涉及到的集合论的一些概念时，应查阅有关书籍。

定义1　图G＝（V，E，ϕ），其中

V（G）是顶点的非空有穷集合，称为G的结点集合。

E（G）是边的有穷集合。

ϕ（G）是从边的集合E到顶点的集合V中的有序或无序的元素偶对的集合的映射。

通常可把图G写成（V，E）或简写成G。上述定义说明了，图G的每一条边，都与图中的有序或无序结点偶对相

联系。具体地讲，对于v_i，$v_j \in V$，如果有一条边$x \in E$，且与有序偶〈v_i，v_j〉或无序偶（v_i，v_j）相联系，则可以说，边x联接结点v_i和v_j。因而，可用$x=$〈v_i，v_j〉或$x=$（v_i，v_j）表示图的边。也可把边的集合E表示成结点偶对〈v_i，v_j〉或（v_i，v_j）的集合。由一条边联接起来的任何结点偶对，称为**邻接结点**。例如，图2—1（2）中，结点的集合是

$$V=\{1, 2, 3\}$$

边的集合是

$$E=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$$

有时为了简化，就把具有n个结点和m条边的图通称为（n，m）图。

定义2 在图G=（V,E）中，与V×V的有序偶相联系的边$x=$〈v_i，v_j〉，称为G的有向边。而与结点的无序偶相联系的边$x=$（v_i，v_j），称为图G的无向边。每一条边都是有向边的图，称为有向图，而每一条边都是无向边的图称为无向图。一些边是有向边，可是另外一些边是无向边的图，称为混合图。图2—1和图2—2为有向图，图2—3为无向图，图2—4为混合图。

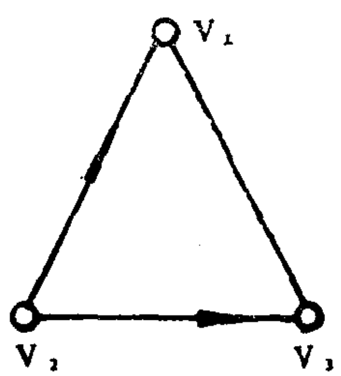


图2—4

根据上面定义可知，无向图与有向图的区别在于“无序偶”与“有序偶”之分。通常无序偶用一对圆括弧括起来；有序偶用一对尖括弧括起来。若〈V_1，V_2〉是有向图中一条边，称之为弧，则称V_1是弧的尾或初始点C，

V_2是头或终端结点，在图上用从尾到头的箭头表示。对于无向图则不同，因为（V_1，V_2）与（V_2，V_1）表示同一条边。

象图2—1（3）中结点V_2，存在一条联接结点到该结点本身的边，称为闭路或环。显然，环的方向是没有意义的。因此把它看成有向边或无向边均可。

定义3 在一个（n，m）无向图中，对于$n \geq 2$，如果n个结点中的每一个结点都邻接于其它n－1个结点，则称这样的图为无向完全图。通常以符号Kn表示。如果将图2—1（2）中有向图的箭头去掉，则构成了一个无向完全图。在无向完全图中，边与结点的关系可以表示为：

$$m = C_n^2 = n(n-1)/2$$

在一个有n个结点的图中，若对于$n \geq 2$，如果在每一对结点之间都有一对方向相反的有向边，则称这种图为有向完全图。如图2—2（1）为有向完全图。

需要指出的是，图的定义既然与连接任何一对结点的弧的长度、形状及位置无关（弧可以理解为有方向的边，在不涉及弧的方向时，常把弧改为边，有时弧和边统称为线），又没有指定结点位置的任意次序，所以表示图的图形不是唯一的。我们可以设置结点在任意个不同的位置上，也可以给出具有不同形状的弧或线来获得不同的图形。这种任意性，决定了看起来完全不一样的两个图形，可以表示同一个图。如图2—5（1）与（1′），（2）与（2′）是相同的。

定义4 在有向图中，对任一结点v，以v为始结点的边