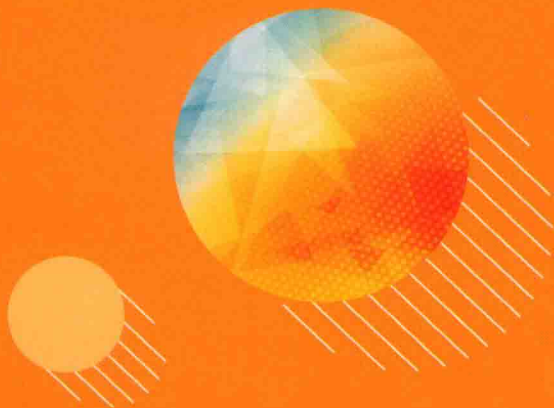


抽象·推理·建模

——小学数学思想和方法的教学研究

CHOUXIANG
TUILI
JIANMO

杨明媚/著



抽象·推理·建模

——小学数学思想和方法的教学研究

CHOUXIANG
TUILI
JIANMO

杨明媚/著

贵州师范学院内部使用

图书在版编目(CIP)数据

抽象·推理·建模：小学数学思想和方法的教学研究 / 杨明媚著. — 南京：南京大学出版社，2019.9
ISBN 978-7-305-08436-2

I. ①抽… II. ①杨… III. ①小学数学课—教学研究
IV. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 218015 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
出 版 人 金鑫荣

书 名 抽象·推理·建模
——小学数学思想和方法的教学研究

著 者 杨明媚

责任编辑 郭 欣

编辑热线 025-83594058

照 排 南京南琳图文制作有限公司

印 刷 江苏凤凰数码印务有限公司

开 本 880×1230 1/32 印张 6 字数 150 千

版 次 2019 年 9 月第 1 版 2019 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-305-08436-2

定 价 32.00 元

网址: <http://www.njupco.com>

官方微博: <http://weibo.com/njupco>

官方微信号: njupress

销售咨询热线: (025) 83594756

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

序

Preface

2008年,郑毓信教授从新一轮数学课程改革的实际出发,提出了“做大气的小学数学教师”的观点,在数学教育哲学层面指出了小学教师研究数学教育的正确方向,即在小学数学教学实践中要体现数学的思维方法、数学的理性精神和数学的文化价值。杨明媚老师的著作《抽象·推理·建模——小学数学思想和方法的教学研究》是一线教师响应和实证“做大气的小学数学教师”号召的实践成果,记录了一名青年名师学习、思考和发展的成长轨迹。

回顾具有中国特色的小学数学教育历史,我们经历了以知识为中心的“双基”教学、以生活为中心的体验教学、以经验为中心的活动教学和以交往为中心的合作教学四个不同的发展时期,从边缘的操作范式改革逐渐回归到对数学本质深度理解的数学文化层次的核心改革。新一轮的课程改革以核心素养为指引,着力提炼大概念,设计教学目标,组织教学内容,实施教学过程,优化教学评估,让学生学习带得走的东西。义务教育数学课程标准修订组组长史宁中先生在其《数学思想概论》一书中指出:“数学发展所依赖的思想在本质上有三个:抽象、推理、模型,其中抽象是最核心的。通过抽象,在现实生活中得到数学的概念和运算法则,通过推理得到数学的发展,然后通过模型建立数学与外部世界的联系。”可见,三大基本思想:抽象、推理、模型,是小学生学习数学培育核心素养

的重要平台。创设一种追求理解的数学学习情境,实施一种追求理解的小学数学教学模式,是我们小学数学教师追求的目标。

杨明媚老师把“数学思想和方法”作为研究内容,深度研究课程标准,潜心学习相关理论,积极进行教学实践,从多维视角阐述抽象、推理和建模数学思想的实用意义,以多种形式设计促进学生理解的深层次学习活动。这样的教学研究过程是真研究,这样的教学研究成果是真功夫,体现了数学教师专业成长的必由之路。

通常来说,来自基层教学一线的教师容易做的是移植性的研究活动,很少在理论方面有所突破,但一线教师的优势是在理论和实践的结合点上有所创新。如果把理论视作第一象限,把实践视作第三象限,那么教师的研究都属于第四象限的实践行为。研究型的教师,应当努力学习第一象限的理论,明晰学术流派,确定自己的教学文化信仰,在理论的引领下,大胆实践创新,解决教学中的问题。实践有两种范式:一是实证性的实践,通过案例和数据证明自己教学文化信仰的存在;二是范式性的实践,创新一种可操作范式,供大家借鉴和推广。《抽象·推理·建模——小学数学思想和方法的教学研究》属于第二种实践方式,显示了作者的理论功底和对小学数学教育未来发展的深层次思考,是小学数学教学研究中的一缕明媚的阳光。

愿苏州的小学数学教师队伍出现更多的学术型引路人,出现更多的教学改革优秀团队。寄上殷切的期望,权作为序。

江苏省特级教师



2019年9月

目 录

Contents

序 / 001

导 论 / 001

第一章 小学数学新课程标准与数学的学习方式 / 003

第一节 数学新课程标准的内涵解读 / 004

第二节 作为数学教育任务的数学思想和方法 / 008

第二章 小学数学学习与思维发展 / 014

第一节 小学生数学思维发展的层级模型和思维品质培养 / 014

第二节 小学生数学思维的基本方式和规律 / 022

第三节 批判性思维和思维导图 / 027

第三章 小学数学与抽象有关的数学思想 / 035

第一节 抽象思想方法的定义、功能和价值意义 / 035

第二节 小学数学中跟抽象有关的数学思想和方法 / 045

第三节 小学数学抽象思想和课堂教学改革 / 051

第四章 小学数学与推理有关的数学思想 / 060

第一节 小学数学推理思想中的合情推理 / 061

第二节	小学数学推理思想中的演绎推理 / 064
第五章	小学数学与建模有关的数学思想 / 074
第一节	关于数学建模思想的基本认识 / 075
第二节	小学数学四类建模思想的简单阐述 / 080
第三节	小学数学建模思想教学活动的设计 / 084
第六章	小学生数学学习中的问题解决 / 090
第一节	一般问题的分类 / 090
第二节	问题解决学习环境中的“积木” / 104
第三节	在问题解决环境中怎样运用案例 / 111
第七章	数学思维方法与小学数学课堂教学转型 / 121
第一节	小学数学课堂教学的误区 / 121
第二节	追求理解的小学数学课堂教学改革 / 124
第八章	小学数学思想方法教学活动设计的典型案例及其点评 / 132
第一节	数学学习方式的转变 / 132
第二节	关于抽象思维培育的案例及其点评 / 143
第三节	推理是数学学习的重要环节 / 157
第四节	培养学生建模意识,掌握一般的建模技巧 / 172
结 论	/ 180
参考文献	/ 182

导 论

教育真正的对象是“人”，而不是“知识”。新时代的教育变革是围绕着如何培育人的核心素养展开的。纵观人类的教育发展史，科学主义和人文主义两股思潮总是此消彼长。随着信息社会的来临，知识总量的迅速增加和知识陈旧率的加速，单一知识传授的教育方式已经不能适应未来社会发展的需求。人文主义和科学主义的互动和整合得到复归。世界上根本不存在具有普适性的所谓最好的教育，真正有意义的教育是“回到事实的本身”，凸显个体的主体地位。

数学是一种文化，是一种概念化、抽象化、符号化的推理方法的组合。学生为什么要学习数学，以及学生怎样学好数学，有“实质训练”和“形式训练”之争。“实质训练”主张学习跟生活密切关联的数学，关注数学的工具实用性；“形式训练”主张学生的思维 and 心智训练，关注数学的素养性。《义务教育数学课程标准（2011 年版）》把实质和形式统一在人的心智交汇的发展框架内，解决了两种极端主张的矛盾，使数学的文化价值和人的理性精神高度融合。

《义务教育数学课程标准（2011 年版）》提出了十个核心概念：数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想、应用意识和创新意识，它们是学生在义务教育阶段数学课程学习中最应培养的数学素养，是促进学生发展的重要方面。核心概念本质上体现的是数学的基本思想，集中反映为

数学抽象、数学推理和数学建模思想。学生在学习数学以后,绝大部分的人不是以数学为职业的,但是数学的思维方式和数学的严谨治学态度会给所有人带来终身受益的效果。数学是个体健康、个性充分发展的重要平台。

《抽象·推理·建模》一书分为两个部分。第一部分是从第一章到第六章,重点论述了对新课标的深度理解,以及小学生数学学习与思维发展的关联。从抽象、推理、建模三种数学思想,分别阐述了作为教育任务的数学思想与方法在课堂教学活动中如何得以落实。第六章以问题解决为归宿,阐述抽象、推理和建模数学思想的实用意义,形成了数学思想和方法上的逻辑关系。第二部分是第七、第八章,介绍了以抽象、推理和建模思想为“形式训练”的课堂教学转型以及具体操作的范式,教学内容均取自苏教版小学数学教材,致力于“实质训练”和“形式训练”的融合。第八章的教学活动设计案例,以课堂实录加反思赏析的方式,分享了作者对活动设计的价值判断,供一线教师在操作和实施时参考。

本书的阐述立足于个体认知建构主义立场对数学思想和方法的影响,从多维视角理解数学思想和方法的活动设计,关注学习方式的转变,采用对话、交流、合作、操作、讨论等多种方式展开深层次学习活动,用数学文化的视野开创小学数学思想和方法教学的新时代。

第一章 小学数学新课程标准与 数学的学习方式

数学是一种认识,一种实践,一种思想体系。著名的数学史家克莱因说:“数学的特征:第一是基本概念的引入;第二是抽象;第三是理想化;第四是运用推理方法;第五是符号体系的运用。”数学是一种语言,一种人类认识世界的工具,是人类文化的重要组成,也是人类智力活动最好的文化遗产。

人类生活在三个世界:一是物质化的现实世界;二是精神化的文化世界;三是意义建构的自我世界。^① 人类区别于其他高级类哺乳动物就在于依托语言工具发展思维、创造文化。人类的进化是学习和发展的过程。根据日本学者佐藤学的观点,学习是三种实践,即认识世界的实践,创新和传承文化的实践,以及自我建构意义的实践。学生在学校里的学习是社会化三种实践的特殊形式,要求学生掌握交流语言、数学语言和艺术语言,在承接和创新的结合点上,使人类的文化基因获得繁衍,促使人类社会文明进步。

数学素养是现代社会每一个公民应该具备的基本素养。素养可以理解为素质和能力的集合。不同历史时期,社会对人的基本素养有不同的要求。工业社会初期,人的读、写、算是三大基本素

^① (日)佐藤学. 静悄悄的革命——课堂改变,学校就会改变[M]. 教育科学出版社,2014.

养。工业社会中期则强调知识的力量,把学习能力纳入视域。近代社会,知识经济概念的引入,基本素养的界定扩充到文化视域,指知识、能力、信仰、思维方式、生活态度的总和。就数学学科的基本素养而言,可以包括以下五个方面:① 数学知识和技能;② 数学能力;③ 数学应用;④ 数学思维;⑤ 数学语言符号的运用。数学素养的培养是通过课程来实现的。数学课程是国家课程。义务教育阶段的数学课程是经课程标准来体现国家意志的。基于课程标准的教学活动是学校数学教育的主流。在实施国家课程的过程中,要避免课程标准的衰减性变异和失真。深刻理解数学课程标准是提升数学素养的逻辑起点。

第一节 数学新课程标准的内涵解读

《义务教育数学课程标准(2011 年版)》把数学定义为“数学是研究数量关系和空间形式的科学”,这对义务教育阶段的数学课程而言的,有两层含义:一是数学是门科学,是受人类长期实践检验的客观真理;二是研究对象是事物的数量关系和空间形式。数学有抽象性、精确性、广泛应用性的特征。抽象、推理、建模是数学基本思想的核心。

一、数学课程的基本理念

《义务教育数学课程标准(2011 年版)》指出:“义务教育数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标,要面向全体学生,适应学生个性发展需要,使得人人都能获得良好的数学教育,不同的人在数学上得到不同的发展。”义务教育的数学课程基本理念是面向全体学生的大众数学教育,保障每个人的优质学习权和教育公平权,使得不同的人的在数学上得到不同的发展。

根据义务教育数学课程的基本理念转型,中小学数学课程的属性和价值也在发生变化,这种变化可以理解为课程文化对教师的知识观、学生观、学习观、教学观的影响。《义务教育数学课程标准(2011年版)》阐明了数学课程的四大属性:一是基础性,指数学课程在培养公民素质的必要性和后继发展中的重要性;二是普及性,指数学课程是面向不同民族、不同信仰、不同社会背景和家庭财产状况的所有人群的义务教育课程;三是发展性,指数学课程不是一个静态的结构课程而是人类文化的重要组成部分,融合在人类文明进步中的特殊语言;四是道德价值性,指数学在培养学生情感态度、思维方式、人格意志等方面有着不可替代的功能。以上四大属性中,基础性知识和基本能力的培养是显性属性,思维素养、道德观念是隐性属性,两者是相辅相成、互相融合的整体。

数学课程的四大基本属性,决定了数学课程的价值,解决了学校为什么要开设数学课程以及学生为什么要学数学的问题。数学有知识性价值,是学习物理、化学、生物等学科的基础;数学有思维性价值,数学是思维的体操,决定了思维语言的进化;数学有文化价值,是人类文化历史发展的重要组成部分;数学还有德育功能,即培养公民的理性精神。任何国家、任何民族、任何历史发展时期,数学都被教育列入核心课程范畴,是个体学会认知、学会生存、学会活动、学会做事的必备素养。

二、正确认识数学教学活动的本质

数学教学活动是数学教学和数学学习合并后的总称。数学教学和数学学习是同一事物的两个方面。旧的教学论观点,把教学和学习割裂开来,研究了教材教法,排斥了学习模式和方法;讲究了学生主体参与性,忽视了教师的指导引领。该观点反映在课堂教学的设计和活动组织上,就产生了主体论之争的悖论。

《义务教育数学课程标准(2011年版)》明确指出:“教学活动

是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。”根据日本教育家佐藤学“学习是三种实践”的观点,那么课堂就是学生实践的场域,教师是学生实践的合作者、组织者、引领者。学校的课堂教学活动是一种师生共同积极参与的实践活动,课堂是学习活动的实践共同体。

数学教学活动有以下六个基本要求:① 学生学习数学应该是一种生动活泼的心智投入过程;② 认真听讲,积极思考,动手实践,自主探索,合作交流是主要的活动方式;③ 学生应该有足够的时间和空间经历观察、猜测、推理、论证、计算等活动过程;④ 教师应该基于学生的认知起点和发展水平,提供数学活动平台和学习机会;⑤ 数学活动重点关注学生良好的数学习惯和掌握正确的思维方式;⑥ 教师要发挥积极引导作用。在开展数学教学活动的过程中,要注意信息技术与课程内容的整合,注意学习评价的积极作用,让数学教学活动真正变为师生共同参与数学文化构建的实践活动。

三、数学课程标准总目标的变化和理解

新数学课程标准的总目标跟以往的数学大纲相比较主要有两个显著性变化:一是“双基”发展为“四基”,把数学的基本思想和基本方法纳入到总目标之中,明确了模型思想、统计思想、化归思想、分类思想以及获得数学活动的基本方式,主要是观察、实验、猜测、验证、推理和交流。十大核心理念是“四基”的重要内容。二是明确提出“增强发现和提出问题的能力。数学素养是人的社会化必须具备的基本素养之一。”关于什么是素养?什么是基本素养?不同时代、不同学科领域,有不同的解读。现代素养问题的研究已经跟人的学习和发展研究联系在一起,总体上把素养分成三个维度:一是知识维度,包括“对什么是知识?知识怎样分类?如何学习有用的知识?”等等一系列的基本认识;二是操作维度,包括动作操作

和心智操作的程序意义方法掌握；三是反思维度，包括价值取向和批判能力。素养是一个复杂的生命系统。所谓复杂，是指素养的三个维度不是孤立存在的，而是相互依存和相互关联的。所谓生命系统，是指素养是个体与环境、与社会文化交互的动态生成过程，有文化传承因子，有社会文化影响，也有个体心智的投入。素养的形成需要时间的积累。

数学素养是什么呢？因为数学功能是多元的，素养的解读是多元的，所以数学素养的定义也是多元的。但是，基本的数学素养可以从数学思维和数学知识技能两个方面去考虑。阅读、写作、计算是二十世纪初全世界公认的基本素养，现在计算拓展到推理、程序编制，听、说、读、写、算还是基本素养。数学思维包括数学的价值观，数学思维和方法。数学的思维方式还是抽象、建模、数据分析、图形和数字的结合，致力于事物的精确性和随机性的科学表征。《义务教育数学课程标准（2011年版）》的三维目标体系和数学教育的“四基”要求，为提升全民族数学素养指明了方向，提供了一个实施数学素质教育有效的操作平台。

《义务教育数学课程标准（2011年版）》明确了学生在义务教育阶段数学课程学习中应该具备的数学素养，分三个层次十个核心理念。三个层级，是指数感、符号意识、运算能力领域的层级。第一层次包括空间观念、几何直观、数据分析；几何直观、推理、建模是第二层次的数学素养；第三层次指超越内容和计算能力的实际应用和创新意识。学生学习数学以后，99.5%的人不是以数学为职业的，但是数学的思考方式、数学的精准态度以及严谨的治学意识会给100%的人带来终身受益的效果，让学生学会思考、学会抽象、学会推理、学会数学思维是数学课程标准的核心本质。

第二节 作为数学教育任务的数学思想和方法

日本著名的数学教育家米山国藏指出：“学生们在初中、高中接受的数学知识，因毕业进入社会后几乎没有什么机会应用这种作为知识的数学，所以通常是出门后不到一两年，很快就忘掉了。然而，不管他们从事什么业务工作，唯有深刻于头脑中的数学精神、数学思维方法、研究方法、推理方法和着眼点等，却随时随地地发生作用，使他们受益终生。”作为数学教育任务的数学思想和方法是《义务教育数学课程标准（2011年版）》“四基”的重要支柱。数学中最主要的成分始终是思想方法，这是人类共同的思想渊源和文化基因。

一、数学思想和方法的价值取向以及课程地位

数学思想和方法指数学思维的形式化语言以及运用这种特殊语言解决具体实际问题的总称^①。数学修养必须结合两个不同领域：一是数学的思想方法，二是数学知识的基本范围。小学数学的基本思想是抽象思想、推理思想和模型思想。三种基本思想可以派生出其他思想方法，涉及十大数学核心概念。当今社会的高度科技化、信息化，用数学眼光看待世界，分析问题和解决问题是现代数学教育观的新内涵。小学数学的基本方法分两个层面：一是数学的全域方法，例如枚举法、等量代换法、逐步逼近法、假设法……等等，指数学从哲学层到探索操作层的范式。另一种是具体的解题方法，例如解方程、割补法（添辅助线）、四则运算……等

^① 张莫宙，李士锜，李俊. 数学教育学导论[M]. 高等教育出版社，2003.

等,指一种解题的技能技巧。在小学生的数学实践活动过程中很难区分哪一个是数学思想,哪一种是数学方法。数学思想和方法是默会性知识,靠经验积累逐步形成的。所以数学教材并不专门设置数学思想和方法的学习单元,把数学思想和方法从数学活动的实际境脉中剥离出来,效果并不好。“四基”中强调数学的过程和方法,就是借助教材提供的实际学习境脉,提升学生体验数学思想的实际水平,掌握基本的数学方法,并不是追求数学知识的记忆和技能的熟练。

数学思想和方法是极其丰富的。那么,究竟哪些作为学校数学教育的任务呢?哪些适合小学生的学习认知能力呢?每一种数学思想和方法都是经历一个萌发和孕育的过程,由“潜”到“显”。小学生的数学思想和方法学习要浸润在数学文化历史境脉中,遵循以下基本原则:

① 考虑学生的可接受性。根据小学生的认知起点,选准适当时机,采用适当方法,进行有效的数学活动体验。

② 选配合适的知识载体。数学思想方法必须以数学知识学习为平台,把数学思想和方法从知识中剥离出来,单独学习,效果并不好。

③ 发挥对后继学习的重要意义。例如小学数学中的等量替换思想、假设推理思想以及数学解题的四步法等等,都是小学生以后学习数学必须掌握的思想方法。让学生在理解实质的基础上,掌握和运用学习知识过程中反映的数学思想和方法是教师组织课堂教学活动必须关注的重要教学目标。

二、小学数学教学中的数学精神、思想和方法

小学数学进行数学思想方法教学是否可行?2014年人民教育出版社编辑室主任、审编王永春教授著的《小学数学与数学思想方法》给出了很好的回答。该书依据课程标准,以人教版教材为依

托,总结了小学数学教材中教学思想方法的操作性案例,系统论述了小学数学思想方法的学习意义和可操作性的范式,为进一步深化小学数学思想方法的教学研究起着学术引领作用,使一线教师能结合教材学习内容,适时适量及时有效地体现思想方法的教学目标,达到提高数学素养的要求。

数学精神指学生在学习数学过程体现出来的意识、态度和情绪。日本数学论专家米山国藏概括了七种主要数学精神:一是应用化精神,包括自身内部的应用和对外实际问题解决的应用;二是组织化系统化精神,致力于认知结构化;三是探索研究精神;四是精细化精神;五是严密化精神;六是整体统一化精神;七是简约化经济化精神,追求多种方案中的组合选优^①。数学精神是一种对科学的信仰和对科学的态度,追求严谨的治学态度和作风始终是我们学校教育的重要目标。

数学思想和数学方法既有联系又有区别。小学数学教学活动中主要在学习内容的融合上渗透数学思想和数学方法。因此,把两者合起来称数学思想方法。数学思想侧重于数学全域性理念,数学方法重点是解题方法,两者的交集就是落实课程标准中的十大核心理念和每单元学习要掌握的知识和技能。根据《义务教育数学课程标准(2011年版)》的解读,小学数学思想有三个基本思想:抽象思想、推理思想和建模思想。每种基本思想又演变、派生和发展出很多较低层次的数学思想,例如分类思想、函数思想、归纳思想等等。数学方法的操作性比较强,往往渗透在习题训练中,加深对数学概念、公式、定律法则的理解,小学、中学、大学数学的学习内容是不同的,但是内容所渗透的数学思想是一致的。数学思想和方法的教学要求学生必须掌握一定的数学知识以及具备一

^① (日)米山国藏. 数学的精神、思想和方法[M]. 四川教育出版社, 1986.