

〔日〕山田嘉昭著

钱仁耕 乔端译

非线性 有限元法基础

清华大学出版社

内 容 简 介

本书分四章从理论上阐述了包括塑性和粘弹性的材料非线性以及对大位移、大应变问题进行分析的几何非线性两类非线性问题,并最大限度地应用了有限元法的方法和成果,对一些公式作了较详细的推导。

塑性·粘弹性

〔日〕山田嘉昭 著

培風館 昭和 55 年 12 月初版

非线性有限元法基础

〔日〕山田嘉昭 著

钱仁根 乔 端 译

☆

清华大学出版社

北京 清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本: 850×1168 1/32 印张: $9\frac{3}{4}$ 字数: 260 千字

1988 年 9 月第 1 版

1988 年 9 月第 1 次印刷

印数: 0001~5000

定价: 1.70 元

ISBN 7-302-00236-3/O·44(课)

译 者 的 话

本书是根据日本《有限元法基础和应用丛书》之六，山田嘉昭著“塑性·粘弹性”一书译出的。考虑到原书的内容，中译本书名改为“非线性有限元法基础”。

非线性问题包括材料非线性和几何非线性两方面的内容。非线性有限元法在近二十年中获得了较大的发展，在技术科学的许多领域中得到了应用。但是，由于非线性问题本身比较复杂，求解比较困难，因此，直到现在还不能像线弹性有限元法那样得到广泛的应用。译者深信，随着科学技术的发展，以及电子计算机容量的增加，计算速度的提高和使用的普及等，非线性有限元法一定会被广大工程技术人员用来解决工程实际问题。

目前国内介绍非线性有限元法的书籍还不多，因此，我们将山田嘉昭这一著作翻译为中文，介绍给大家。该书内容丰富，叙述深入浅出，对一些公式作了较详细的推导。对于学习或应用非线性有限元法的人员来说，这是一本很好的参考书。

原书中计量单位为英制，现一律换算为国际单位。

书末附有内容索引，供读者查阅。原书索引是按日文假名音序排列的，现改为按汉语拼音字母顺序，英文字母和希腊字母顺序排列。

译文中一定存在错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

译者

序 言

材料力学或固体力学中的非线性问题,包括塑性和粘弹性的材料非线性以及对大位移、大应变问题进行分析的几何非线性两部分。本书就是从理论上阐述如何解决这两方面问题的。解决这些问题的基础来自经典理论,在本书中首先改编理论,使其最大限度地适用于随着电子计算机的应用而发展起来的有限元法,其次根据有限元法适用范围,编入新的方法和成果,使读者在非线性问题的分析方面获得最新的信息和正确的指南。

本书共分四章。在第一章中,以基本的单向应力状态为例,引入材料非线性的概念,同时将以前分开讨论的塑性和粘弹性问题用统一的方法来处理。

在第二章中讨论几何非线性问题。从应变和不同定义的应力及其增量出发,通过虚功原理,导出有限元法的几何刚度矩阵和载荷修正矩阵。在本书中,根据物体或构件的位置和外轮廓形状的变化对内力或外力平衡的影响,来解决几何非线性问题。这样,就将理论和现象的物理解释简单地统一起来了。为了适用于数值分析,我们以改进的 Lagrange 形式将理论公式化。

在第三章中,推导了弹塑性应力-应变矩阵,它是使经典塑性理论适用于有限元法的关键。然后,将这一推导过程推广到与时间有关的粘弹性材料的情况,并将它对时间积分,这是提高计算精度的有用方法。在本章中还包括了与高温设计和非线性断裂力学有关的内容,如移动硬化,内层法和以全应变理论增量形式表示的新成果。

在第四章中,以简单的杆和梁结构为例,介绍大变形问题的分析。同时论述用多种方法推导与急跳和屈曲分叉有关的几何刚度矩阵。由此可以使读者了解到求解连续体几何非线性问题的统一

方法的要点。

本书曾在“计算机在结构工学中的应用讲座”丛书中以同样的书名出版过。不少读者还记得，在那本书中是将补遗和练习问题作为附录 I，而在附录 II 中介绍平面问题的弹塑性分析的程序。本书的编排当然应该努力做到尽可能与原著一致，采用同样的处理方法，但是由于现在对正文和两个附录作了修改，使得原稿变得庞大了，从而决定将程序的新版本以“弹塑性分析的有限元法程序——EPIC-IV 说明”的名字单独出版。如果读者有机会根据这一程序说明，将本书的理论编制成实用的计算程序，迅速而高精度地对弹塑性变形问题进行分析，则作者就感到非常荣幸了。

1967年作者有幸接触到有限元法，推导出进行塑性力学问题分析必需的弹塑性应力-应变矩阵。从那以后的十多年中，有限元法在理论和应用上的进步，完全达到了作者原来所期望和预测的结果。对有限元法的发展起着促进作用的因素是电子计算机。如果我们寄希望于各代电子计算机的能力及其未来的发展，则有限元法可以沿着这一方向继续前进。在微型计算机广泛使用的今天，希望本书和另一著作中所介绍的程序 EPIC-IV，不仅能加深读者对有限元法的理解，并且能对力学中其他问题求得实用的数值解。

最后，培風館的藤野晃先生完成了本书在印刷设计和索引准备等出版方面的困难工作，在此致以谢意。

山田嘉昭

1980年10月

目 录

第一章 绪论	1
1-1 单向试验和材料的塑性	2
1-2 粘弹性体,迟滞和松弛现象.....	6
1-3 多元件的力学模型及其等价性	11
1-4 松弛时间和迟滞时间	19
1-5 应力-应变曲线的实验式.....	23
第二章 有限变形的应变、应力及其增量	27
2-1 Green 应变张量	28
2-2 应变增量	36
2-3 不同定义的应力	38
2-4 应力速率	51
2-5 应力的平衡	60
2-6 虚功原理	67
2-7 梁单元和轴对称的板壳单元	72
第三章 屈服条件、塑性位势和本构方程	87
3-1 三维应力和屈服条件	88
3-2 塑性位势	97
3-3 弹性和塑性的本构方程	102
3-4 Bauschinger 效应及其处理.....	122
3-5 全应变理论	136
3-6 粘弹性体的本构方程	142
3-7 梁和板壳单元的弹塑性变形和应力-应变方程.....	158
3-8 注释	165
第四章 几何非线性问题概述	172
4-1 简单桁架	173

4-2	梁单元和几何刚度矩阵	177
4-3	刚架的非线性问题分析	186
4-4	梁单元刚度的增量表示和几何刚度矩阵	195
4-5	连续体的几何非线性问题	200
附录	补遗和练习题	209
A.	与粘弹性体单向响应有关的问题	209
B.	应力和应变的补遗	221
C.	屈服条件和本构方程的补充	240
D.	梁和柱单元的练习与补遗	284
索引		299

第一章 绪 论

塑性是材料产生永久变形的能力，它是金属的主要属性。金属材料中的应力超过弹性限度后，其应变分为弹性应变分量 ϵ^e 和塑性应变分量 ϵ^p 。若卸去载荷，弹性应变分量可以恢复，而塑性应变分量 ϵ^p 则永久地保留下来。一般塑性变形是在应力达到某一极限状态时开始产生的，此极限状态就是弹性限度。描述极限应力状态的法则称为屈服条件。因此，为了处理塑性变形问题必须确定屈服条件和研究达到屈服状态后应力-应变关系应该遵循什么样的法则。在弹性变形阶段，应力与应变成正比关系，而在塑性变形阶段，由于出现了永久变形，不能期望存在着同样的正比关系。

如前所述，塑性是能够与弹性相对照的材料特性。对于处于弹性和塑性变形阶段的问题，在外载荷条件和位移约束条件不变的情况下，物体内部的应力和应变状态不会发生变化，即应力和应变与时间无关，这是材料处于塑性变形与弹性变形时所共有的性质。

与此相反，粘性材料具有与时间有关的性质。例如，在一定的应力状态下应变随时间而增加的蠕变现象，以及在保持一定的应变状态下，应力逐渐下降的应力松弛现象。塑料是材料性质与时间有关的代表性材料。一般将它看做是具有弹性和粘性性质的粘弹性材料。

在本书中对具有塑性和(或)粘弹性的材料用统一的方法进行应力、应变的分析。对于产生永久变形的塑性材料，其应力应变间不存在正比关系。另外，对于粘弹性材料，由于具有与塑性不同的粘性，其应力应变间同样也不存在正比关系。因此，材料的塑性和粘弹性就成为材料非线性力学研究的内容。

在弹性问题中应变大小为千分之一的数量级，而在塑性或粘弹性问题中，由于问题的性质或材料的非线性行为，与弹性问题相比，多数是大应变问题。因而，处理问题时，必须考虑物体的形状变化和构件的位置变化；必须区别它们在变形前和变形后的坐标；同时必须研究对于大位移或有限变形的应力，应变及其增量应如何定义等。这样的问题属于几何非线性的研究范围。

在本书中，用统一的分析方法来讨论材料非线性以及几何非线性问题。如果先叙述一下结论的话则是：将变形的全过程分成若干阶段，在每一阶段采用线性增量关系，即所谓分段线性理论。这样可将在弹性问题中取得成功的有限元法或矩阵法容易地推广到非线性问题中去。

为了使本书自成体系，在叙述上首先从拉伸或压缩的单向应力状态开始。

1-1 单向试验和材料的塑性

单向试验是指均匀的拉伸或压缩的单向应力状态的试验。在弹性变形阶段，由这样的试验得到的信息是拉压弹性模量（杨氏模量） E 和 Poisson 比 ν 。对于各向同性材料，可以在材料的任何方向上截取试样。而对于各向异性材料，则必须在不同方向上截取试样，分别测定它们的 E 和 ν 。

设试样原来的截面面积和标距分别为 A_0 和 l_0 ，在变形后它们的值为 A 及 l 。设载荷为 P ，则名义应力或 Lagrange 应力 s 和名义应变 e 分别为

$$s = \frac{P}{A_0}, \quad e = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (1)$$

与式(1)相对应的，以试样变形后的尺寸，即 A 和 l 为基准的真应力或 Euler 应力 σ 和对数应变 ϵ 分别为

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad \epsilon = \ln \frac{l}{l_0} \quad (2)$$

名义应变 e 和对数应变 ε 分别以试样变形前后的标距长度为基准, 由应变增量 de , $d\varepsilon$ 沿变形路径积分求得的, 即

$$e = \int_{l_0}^l de, \quad \varepsilon = \int_{l_0}^l d\varepsilon, \quad de = \frac{dl}{l_0}, \quad d\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

除去以式(1)和(2)表示的应力和应变外, 还有按下列定义的 Kirchhoff (或 Piola-Kirchhoff) 应力 t 和 Green 应变 λ 。

$$t = \frac{Pl_0}{A_0 l} = s \frac{l_0}{l}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \quad (3)$$

由于弹性应变的数量级在 0.1% 左右, 所以在弹性变形阶段, 用式(1)~(3)中任一式计算应力和应变, 在数值上它们之间几乎没有什么差异。但对于有限变形或大变形问题, 以及塑性和粘弹性情况, 使用这二组公式的任一组计算应力和应变, 不仅数值上, 而且从理论本身的意义上来说, 都存在着不可忽视的差异。

现在来计算功的增量 dW , 对于式(2)的真应力和对数应变

$$dW = \sigma d\varepsilon = \frac{P dl}{Al}, \quad \text{变形后的体积 } V = Al \quad (4)$$

dW 表示变形后单位体积内功的增量。对于式(1)和(3)的情况,

$$dW_0 = s de = t \cdot d\lambda = \frac{P \cdot dl}{A_0 l_0}, \quad \text{变形前的体积为 } V_0 = A_0 l_0, \quad (5)$$

其中 dW_0 为变形前单位体积内功的增量。设变形前、后材料的密度分别为 ρ_0 和 ρ , 由质量守恒定律得

$$\rho_0 A_0 l_0 = \rho Al \quad (6)$$

应用式(6), 则

$$dW_0 = \frac{Al}{A_0 l_0} dW = \frac{\rho_0}{\rho} dW \quad (7)$$

要注意到, 在式(1)~(3)的各种应力间, 存在下列关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= s \frac{A_0}{A} = s \frac{\rho l}{\rho_0 l_0} \\ t &= s \frac{l_0}{l} = s \frac{\rho A}{\rho_0 A_0} = \sigma \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{A}{A_0} \right)^2 = \sigma \frac{A}{A_0} \cdot \frac{l_0}{l} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

在拉伸试验中,一般由于

$$A < A_0, \quad l_0 < l, \quad \rho < \rho_0$$

所以, $\epsilon < s < \sigma_0$ 。

在应用式(1)~(3)中任一公式定义的应力、应变时,材料的拉伸弹性模量 E 的值,几乎没有差异,即

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \approx \frac{s}{e} \approx \frac{t}{\lambda} \quad (9)$$

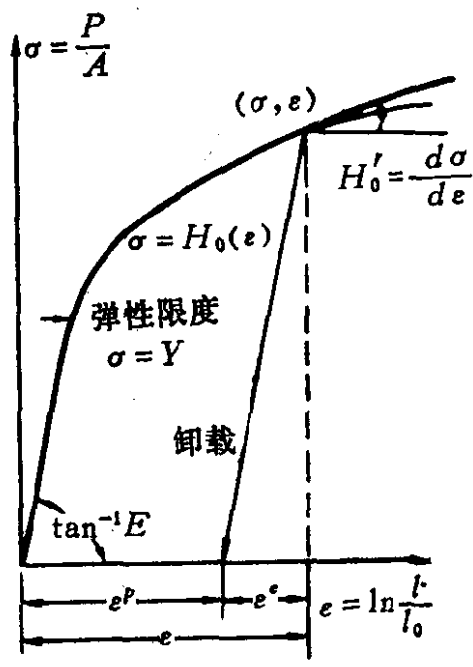


图 1.1 塑性材料的应力-应变曲线

若测得拉伸或压缩时的横向应变分别为 $\epsilon_b, e_b, \lambda_b$, 则可由下式计算出 Poisson 比,

$$\nu = - \frac{\epsilon_b}{\epsilon} \approx - \frac{e_b}{e} \approx - \frac{\lambda_b}{\lambda} \quad (10)$$

我们知道, 对于各向同性弹性体只要给出 E 和 ν 两个弹性常数, 就可以描述材料的全部弹性特性。

在图 1.1 中将材料超过弹性限度, 进入塑性状态时的应变 (全应变) ϵ 分为弹性分量 ϵ^e 和塑性分量

ϵ^p , 即

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (11)$$

式(11)的增量形式为

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (12)$$

在本书中, 除非是发生断裂的特殊情况, 应变增量 $d\epsilon$ 不是以变形前的尺寸, 而是以变形后的尺寸为基准进行测定的。因而, 单向试验时的应变为式(2)的对数应变, 同样, 应力为式(2)的真应力 σ 。

用式(12)中的弹性应变增量 $d\epsilon^e$ 来表示式(9), 则有下列关系

$$d\sigma = E d\epsilon^e, \text{ 或 } d\epsilon^e = \frac{d\sigma}{E} \quad (13)$$

同样, 对于塑性应变增量有

$$d\sigma = H'd\varepsilon^p, \text{ 或 } d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{H'} \quad (14)$$

因此,由式(12)

$$d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E} = d\varepsilon - d\varepsilon^p = d\varepsilon - \frac{d\sigma}{H'}$$

解出的 $d\sigma$ 为

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= \frac{EH'}{E+H'} d\varepsilon = E d\varepsilon - \frac{E^2}{E+H'} d\varepsilon \\ \text{或} \quad d\sigma &= H'_0 d\varepsilon, \quad H'_0 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{EH'}{E+H'} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(15)的 H'_0 为图 1-1 中应力-应变曲线上切线的斜率,称做切线模量。根据图 1.1 中的实验结果,如果不是用全应变 ε 而是用塑性应变 ε^p 来描绘应力,则得到如图 1.2 所示的曲线。式(14)的 $H' = d\sigma/d\varepsilon^p$ 就是这种曲线的斜率。因为 H' 表示随塑性应变 ε^p 的增加,材料硬化和变形抗力变化的程度,所以称做应变硬化率。

在解决金属塑性变形问题时,对于各向同性材料,除弹性常数 E 和 ν 外,现在又增加了一个力学常数,它就是应变硬化率 H' 。作为首次近似,假设塑性变形时不发生体积的变化,即,如果考虑弹性变形,则体积变化完全是由弹性变形引起的。因此它只与拉压弹性模量 E 和不等 0.5 的 Poisson 比 ν 有关。由此可得,单向试验中的横向应变增量的弹性分量 $(d\varepsilon_b)^e$ 和塑性分量 $(d\varepsilon_b)^p$ 分别为

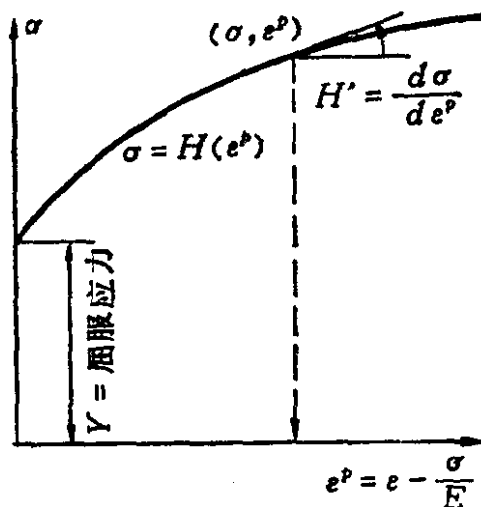


图 1.2 塑性材料的应变硬化曲线

$$(d\varepsilon_b)^e = -\nu d\varepsilon^e, \text{ 以及 } (d\varepsilon_b)^p = -\nu^p d\varepsilon^p,$$

$$\nu^p = \frac{1}{2} \quad (16)$$

因此,总的横向应变增量 $(d\varepsilon_b)$ 为

$$d\varepsilon_b = -(\nu d\varepsilon^e + \nu^p d\varepsilon^p) = -\left(\nu d\varepsilon^e + \frac{1}{2} d\varepsilon^p\right)$$

它与式(12)给出的纵向应变增量 $d\varepsilon$ 之比为

$$-\frac{d\varepsilon_b}{d\varepsilon} = \frac{\nu d\varepsilon^e + \nu^p d\varepsilon^p}{d\varepsilon^e + d\varepsilon^p} = \frac{\nu d\varepsilon^e + \frac{1}{2} d\varepsilon^p}{d\varepsilon^e + d\varepsilon^p} = \nu^{ep} \quad (17)$$

当 ν^{ep} 的测定结果不满足式(17)的关系时,或由 ν^{ep} 、 $d\varepsilon^e$ 、 $d\varepsilon^p$ 实测值求得的 ν^p 不等于 $1/2$ 时,应该考虑到体积变化不仅是由于弹性变形,而且也是由于塑性变形产生的。土壤和岩石就是这样的塑性材料。

1-2 粘弹性体、迟滞和松弛现象*

粘弹性体具有与时间有关的力学特性,如图 1.3 所示的两种力学模型可以看出其基本特性。图 1.3(a) 的模型为弹簧与粘性阻尼器串联连结,(b)为二者的并联连结。分别称它们为 Maxwell 模型和 Voigt (或 Kelvin) 模型。前者可用来描述输入应变 $\varepsilon(t)$ 的应力响应 $\sigma(t)$,而后者则可用来描述输入应力 $\sigma(t)$ 的应变响应 $\varepsilon(t)$ 。其中 t 为自然时间。图中的 C_e 和 C_i 称做柔度,它是弹性模量 E_e 和 E_i 的倒数。由于考虑的是单向应力状态,所以 E_e 和 E_i 为拉压弹性模量。 η 和 η_i 为粘性系数。 T 和 T_i 具有时间量纲,它们的定义为

$$T = C_e \eta = \frac{\eta}{E_e}, \quad T_i = C_i \eta_i = \frac{\eta_i}{E_i} \quad (18)$$

* 现在推荐有代表性的经典线粘弹性力学参考书 Flügge, W., Viscoelasticity, Blaisdell, 1967。其第二版以同样的书名在 1975 年由 Springer-Verlag, New York 出版。

Maxwell 模型的 T 称做松弛时间, Voigt 模型的 T_i 称做迟滞时间。

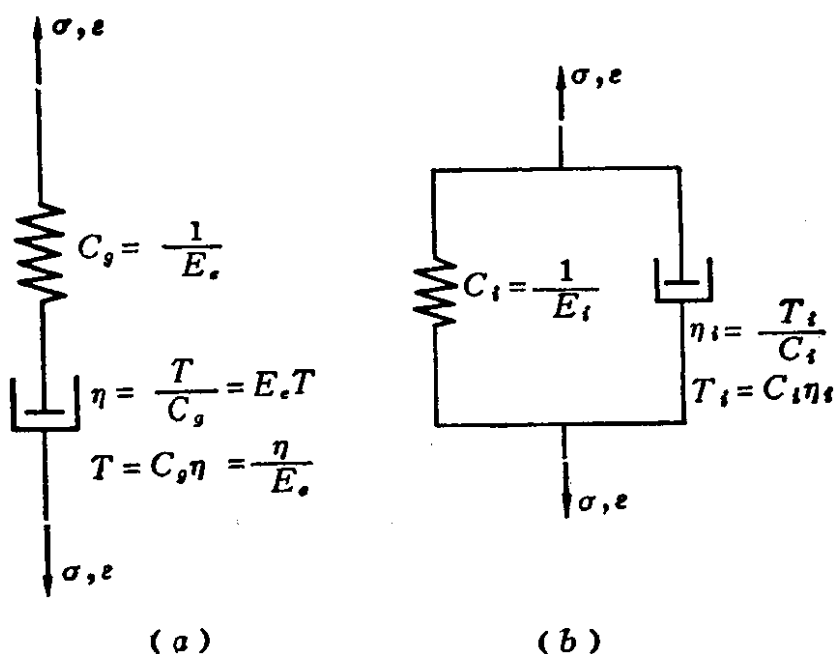


图 1.3 (a) Maxwell 模型和 (b) Voigt 模型

当单向应力状态的应力与应变分别为 σ, ε 时, 由于 σ 在串联元件中是一样的, 所以取各元件的应变增量的和组成 Maxwell 的控制方程。

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_g \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}, \text{ 或 } \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T} = \frac{1}{C_g} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (19)$$

如图 1.4 所示, 输入单位阶跃应变 $\varepsilon = 1(t)$ 时, 式(19)的应力解*为

$$\sigma = \frac{1}{C_g} e^{-\frac{t}{T}} = E_g e^{-\frac{t}{T}} = E(t) \quad (20)$$

$E(t)$ 称做松弛弹性模量, 或简称为弹性模量。在 Maxwell 模型中, 可以容易地求得对应于如图 1.4 所示阶跃应力 $\sigma = 1(t)$ 的应变响应为

* 参阅“山田嘉昭, マトリックス法材料力学, 有限要素法の基礎と応用シリーズ 2, 培風館, 1980”书中第一章的式(27)和(33)。

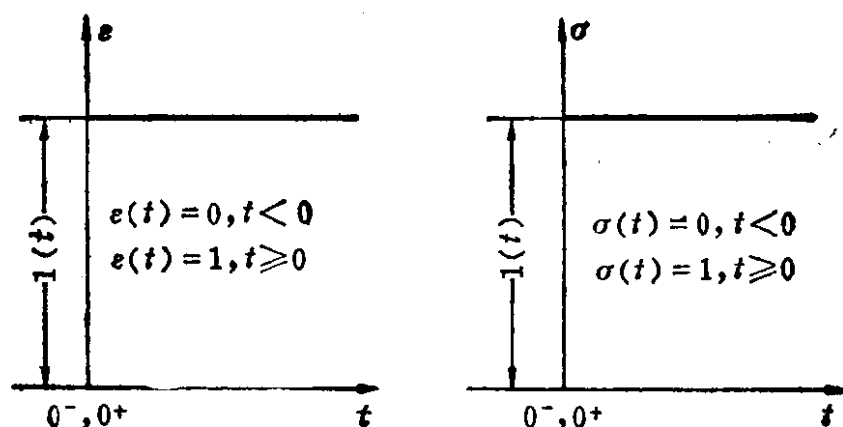


图 1.4 输入阶跃应变和应力

$$\varepsilon = C_g + \frac{1}{\eta} t = C_g \left(1 + \frac{t}{T} \right) = C(t) \quad (21)$$

式(21)中的 $C(t)$ 称做蠕变柔度。在讨论高分子材料的文献中, 多将文字记号 $C(t)$ 写做 $J(t)$ 。

但在 Voigt 模型中, 是由两个并联元件承受应力 σ , 而应变 ε 是相同的, 因此,

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{C_i} + \eta_i \frac{d\varepsilon}{dt}, \text{ 或 } \sigma = \frac{\varepsilon}{C_i} + \frac{T_i}{C_i} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (22)$$

对于阶跃应力 $\sigma = 1(t)$, 式(22)的解为

$$\varepsilon = C_i(1 - e^{-\frac{t}{T_i}}) = C_i(t) \quad (23)$$

$C_i(t)$ 为 Voigt 模型的蠕变柔度, 上式表示持续作用单位应力 $\sigma(t) = 1$ 时的蠕变关系。

在 Voigt 模型中, 为了分析作用阶跃应变 $\varepsilon = 1(t)$ 时的应力响应, 必须注意到阶跃函数 $\varepsilon = 1(t)$ 的导数在时刻 $t = 0$ 时为无限大, 实际上它是如图 1.5 所示的 δ 函数 $\delta(t)$, 它在 0^- 处为 $+\infty$, 而在 0^+ 处为 $-\infty$, 而积分值为 1。即

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) &= \pm \infty, \text{ 当 } t=0 \text{ 和 } \delta(t) = 0, t \neq 0 \text{ 时} \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau}^{\tau} \delta(t) dt &= \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

若用 δ 函数表示输入应变为 $\varepsilon = 1(t)$ 时, Voigt 模型的应力响应,

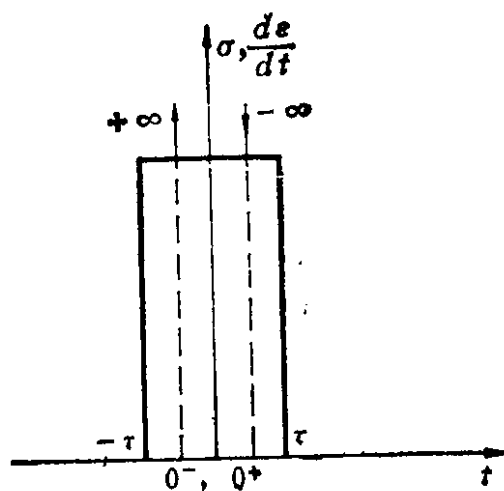


图 1.5 Dirac δ 函数 $\delta(t)$

则

$$\sigma = \frac{1}{C_i} [1(t) + T_i \delta(t)] \quad (25)$$

用 Laplace 变换可容易导出上面得到的 Maxwell 模型和 Voigt 模型的结果,以后分析由多个元件组成的多元件模型时,用 Laplace 变换进行分析是比较方便的。当给定时间 t 的函数 $f(t)$ 时,它的 Laplace 变换 $\bar{f}$ (将 s 取作自变量)定义为

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (26)$$

对于阶跃输入 $f(t) = 1(t)$, 若进行由上式给出的变换,且积分下限取作 0^- , 则得

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = - \frac{1(t)}{s} e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} \\ &+ \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt} 1(t) \frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (27)$$

$f(t)$ 导数 $\dot{f}(t)$ 的 Laplace 变换为

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt &= f(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} s f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0^-) + s \bar{f}(s) \end{aligned} \quad (28)$$

由于式(24)的 δ 函数 $\delta(t)$ 是阶跃函数 $1(t)$ 的导数, 所以由式(28)得, 其 Laplace 变换为

$$\int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = s \cdot \frac{1}{s} = 1 \quad (29)$$

将式(28)推广到二阶导数

$$\int_{0^-}^{\infty} \ddot{f}(t) e^{-st} dt = -\dot{f}(0^-) - sf(0^-) + s^2 \bar{f}(s) \quad (30)$$

此外,常用的 Laplace 变换公式为

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= t, \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s^2} \\ f(t) &= e^{-\alpha t}, \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{\alpha + s} \\ f(t) &= \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s(\alpha + s)} \\ f(t) &= \cos \omega t, \quad \bar{f}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2} \\ f(t) &= \sin \omega t, \quad \bar{f}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \\ f(t) &= \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2}, \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s(\omega^2 + s^2)} \\ f(t) &= e^{-\alpha t} g(t), \quad \bar{f}(s) = \bar{g}(s + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

例如, Maxwell 模型在阶跃应变 $\varepsilon = 1(t)$ 作用下, 若应用 Laplace 变换, 则由微分方程(19)得

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T} = \frac{1}{C_g} \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \delta(t) \quad (32)$$

考虑到式(28)和(29), 则式(32)的 Laplace 变换为

$$s\bar{\sigma}(s) + \frac{1}{T} \bar{\sigma}(s) = \frac{1}{C_g}, \quad \text{因此 } \bar{\sigma}(s) = \frac{1}{C_g(s + 1/T)}$$

应用式(31), 将 $\bar{\sigma}(s)$ 逆变换到时间 t 的物理平面内, 则有

$$\sigma(t) = \frac{1}{C_g} e^{-t/T} \quad (33)$$

这和由式(20)表示的结果是一致的。

若应用 Maxwell 模型或 Voigt 模型这种二元件模型表示材料特性时, 进行给定阶跃应变 $\varepsilon = 1(t)$ 的应力松弛试验, 或给定