普通物理实验

（非物理专业用）

主编：赵鲁卿　王玉文　（西北大学）
编委：　　黄逸菁　（西北大学）
　　　　　虞仲博　（山西大学）
　　　　　杨　虹　（新疆大学）
　　　　　宋家鍪　（延安大学）
　　　　　张　馨　（咸阳师专）

西北大学出版社

内 容 提 要

本书是在西北大学等院校非物理专业用普通物理实验讲义的基础上编写成的。绪论主要介绍误差及数据处理知识。全书编有力、热、分子物理学，电磁学和光学共29个实验，一些实验列入几种实验方法或仪器，可供不同情况选用。各实验均有思考题，许多实验都有误差计算实例。本书适合作综合大学和师范院校非物理类专业的实验教材，也可作工、农、医等有关专业的实验教材和参考书。

普通物理实验

（非物理专业用）

赵鲁卿　王玉文　主编

*

西北大学出版社出版发行

（西安市太白路）

新华书店经销　西安电子科技大学印刷厂印刷

*

787×1092mm　1/16开本　10印张　249.6千字

1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷

印数　1—7000

ISBN7-5604-0122-8/O·7　定价　2.85元

前　言

近几年来，出版了一些大学普通物理实验的书籍，但是至今尚未见到适用于综合大学和师范院校中非物理专业用的普通物理实验教科书。根据1980年高等学校理科物理教材编审委员会审订的综合大学化学专业普通物理实验教学大纲，参考了有关专业对普通物理实验的要求和本书编委会讨论的意见，我们以西北大学1986年铅印的《普通物理实验讲义》(非物理专业用)为蓝本，吸收本书各编写单位普通物理实验讲义的优点，参考了已出版的几本物理实验书籍，编写出本教科书。

本书除绪论外，共编入29个实验。其中力学、热学和分子物理学部分10个；电磁学部分10个；光学部分9个。最后附有10个常用的物理常数表。

对非物理专业各科(工科除外)来说，有的系科把普通物理实验作为普通物理教学中的一个重要组成部分；有的系科则独立设课。尽管情况各异，我们认为普通物理实验教学，始终具有与课堂讲授相互配合、相辅相成的一面；又有其相对独立的一面。

我们在编写过程中，力求使本书成为一本实用的，能加强物理实验基本知识、基本方法和基本技能的，使学生一开始就受到正规的、科学的、严格的实验训练，养成良好实验习惯的教科书。

本书在绪论中比较集中地介绍了误差和数据处理方面的基本知识。我们也力求把误差概念运用到具体实验中去，许多实验都给出了误差计算和数据处理的例子。其目的是让学生从模仿中逐步学会初步估算误差的方法。虽然实例中用的是算术平均误差，但各校可根据自己的实际情况，也可采用标准误差。误差方面的内容，在教学中可根据不同的系科、不同的实验学时，按教学进度分散使用，或只用其中一部分。

教师在组织实验教学过程中，实际上需要几个实验组成一轮循环。实验中所涉及的概念、公式、原理，往往超前于课堂讲授，或者是课堂讲授中所没有的内容。所以我们对每个实验原理的叙述，都写得比较详细。在照顾全书系统性的同时，也保持每个实验的相对完整性，以便学生在一个单元时间(3或4学时)内，能做完一个实验。

有些实验并列了两种或两种以上的实验方法或实验仪器。不同的学校可根据本校的实际情况，选用一种或让不同的学生分别做其中的一种。我们对实验步骤和仪器装置也描述得比较具体，其目的是想培养学生的自学能力，并让学生根据实验条件自己装置、调试仪器，养成按规则正确使用仪器的习惯。

书中虽没有编入用微型计算机计算数据的程序，但是有条件的学校，仍可用微型计算机让学生处理较复杂冗长的数据。我们也提倡笔算(包括心算)的方法，这对于培养学生正确理解运算过程和分析结果，不是没有好处的。

每个实验的末尾都附有思考题，任课教师可让学生笔答或口答其中个别题或全部题，以启迪学生深入思考某些问题，开发智能。

实验教学是一项集体的事业，无论是实验的准备或讲义的编写，都凝聚着在实验室工作的教师和技术人员的劳动和智慧。这本教材的诞生，也反映了各编写单位实验室人员的劳动

成果。

参加本书编写工作的有：黄逸菁(写绪论，实验二·A)；宋家鳌(写实验一，三，七)；杨虹(写实验二·B，五，九)；申礼文(写实验四，六)；姚合宝(写实验八，十)；赵鲁卿(写实验十一，十四·A，十七，十八)；杨章晙(写实验十二，十六)；张馨(写实验十三，十九)；苏玉祥(写实验十四·B，)；刘文蓉(写实验十五，二十)；王玉文(写实验二十一，二十二，二十四，二十五，二十八·A)；虞仲博(写实验二十三，二十四，二十七，二十八·B)；窦占平(写实验二十六，二十九)。宋家鳌、徐蓉、郭秀梅描绘了书中全部插图。赵鲁卿、王玉文任主编，统稿全书。

周衍勋教授对本书进行了全面仔细的审稿工作，并提出了许多宝贵的修改意见。

本书在编写过程中，曾得到张庆嵩教授、郭泰运教授、吴震教授的热情鼓励和帮助。西北大学教务处和出版社在本书编写和出版过程中，自始至终给了我们有力的支持和配合，在此一并表示感谢。

由于编写时间仓促和编者水平有限，书中不妥和错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1989.6.1.

目　　录

绪　论

一、普通物理实验课的目的及要求

物理学是自然科学中重要的基础科学之一。它是一门实验的科学。物理学理论的建立和物理现象和规律的发现，都是以严格的实验为基础，并以实验为手段来验证和检验的。当前科学技术在突飞猛进地发展，物理学已渗透到各自然科学及各种尖端技术领域中，并建立起许多与物理学有关的边缘学科。物理实验已成为对许多学科进行研究的重要手段。

普通物理实验课的目的是：

1．学习物理实验的基本知识、基本方法和基本实验技能。学习一些物理量（如长度、质量、时间、电阻、波长等）及物理常数（如重力加速度、物质的密度、折射率等）的测量原理和方法；学习正确处理实验数据和应用有效数字；熟悉常用仪器及测量工具的原理及使用方法。

2．通过实验观察、测量和分析，加深对物理概念、规律和理论的理解。

3．培养学生良好的实验习惯，实事求是的科学态度，严谨的工作作风及爱护国家财产、遵守纪律的优良品德。

普通物理实验课的要求：

一般做物理实验都包括：(1)准备；(2)观测与记录；(3)数据处理与分析这三个步骤；为此，要求：

1．实验前要做好充分的准备工作。要认真进行预习，理解实验原理和方法，明确实验条件及仪器的操作要点。对要测定的物理量要设计出记录表格。

2．在进行观察记录前，首先要认真安装和调整仪器，使仪器处于正常工作状态。使用仪器测量时，必须按操作规则进行。观测时精力要集中，尽量排除外界干扰，也不要影响别人。在实验室内，不允许乱动与本次实验无关的仪器。实验过程中遇到仪器出现故障或损坏时，应立即报告教师予以处理。

实验的原始记录是计算和分析结果的依据，数据要记录在专用记录本上，要求真实，严禁弄虚作假。字迹要清楚，使自己或别人都能看明白。测量的数据必须根据仪器的精度，用有效数字正确地记录下来，并注明所用单位。（这就是原始记录数据）。

3．实验过程中要随时检查数据。为了能做补充测量，一般在测量结束后，要请教师检查数据，经教师签字后，方可收拾仪器，清理桌面。尔后，根据原理部分的公式，对数据进行整理计算，得出最后实验结果并写出实验报告。实验报告要求字迹清楚，文理通顺，图表正确。若有两人同组者，必须各人分别处理数据和写出报告。实验报告的内容包括：

（1）实验名称，实验者姓名，同组者姓名，专业、班级及实验日期。

（2）实验目的。

（3）实验原理（用自己的语言简要叙述实验原理，不要抄书）。

（4）实验仪器及用具（仪器的型号、规格及编号）。

（5）实验步骤。

(6) 实验原始记录(实验课堂上记录的数据原本地抄在报告上)及数据处理(包括实验结果的计算，作图及误差处理)。

(7) 误差分析及讨论(分析判断实验结果的正确性如何，误差的来源，仪器装置及方法的改进意见)，并回答思考题。

二、实验中的测量误差

1. 什么是测量误差

物理实验离不开对物理量的测定，物理量的测定又需借助于特定的仪器，依据一定的理论或方法，在一定的测试环境下，由实验者去完成。由于受到种种因素的影响，如测试仪器的准确度、灵敏度或分辨能力的局限，或理论方法的近似性，或环境因素的不稳定性，或实验者生理上的缺陷等，造成了物理量测量值的近似性，从而形成了物理量的测量值与真实值之间的差异，此差异称为误差。设某物理量的测量值为 x，真值为 x_0，误差以 ξ 表示，则有

$$\xi = x - x_0 \tag{1}$$

因为真值 x_0 无法得到，因而误差 ξ 也无法得到一个确定值。所谓的误差大小，它仅仅是对测量值偏离真值大小的一种估计。例如对一长度的测量结果为 24.56±0.02mm，其中 24.56mm是测量值，0.02mm是误差值。但这并不表示此长度的真值是 24.58mm或24.54mm，而是表明该长度的真值落在 24.58mm～24.54mm 之间的概率是 68.3%(0.02mm 是由标准误差公式求得的)，或 54.6%，(0.02mm 是由算术平均误差公式求得的)。因而我们认为误差只是表明测量值偏离真值大小的一个量度。

在物理实验中一切测量值都包含有误差，因而在测量中我们应尽量设法减小它。为了能较确切地评估测量结果的准确程度，我们还应计算出测量误差。为此我们研究一下误差的性质及产生的原因，以便采取适当的措施，把误差减到最小值，以达到最好的测量效果，并计算出它的大小。

2. 误差的种类，性质和产生的原因

实验中的误差一般可分为三大类：

(1) 系统误差　在相同的测量条件(理论方法、测试条件、实验者)下，对同一物理量作多次测量时，误差的符号和绝对值都保持不变，或是按某一规律变化，这种误差称为系统误差。由此定义可见：系统误差的特点是具有方向性和等值性。

例如：用千分尺测量长度时，由于零点未调整好，如偏离 +0.01mm，则用其测量某物体长度时，在相同测量条件下作多次重复测量，每次的测量值均要比真值大 0.01mm，这就是仪器未调整好而引入的系统误差。系统误差产生的原因可归结为：

a. 仪器装置的缺陷　　仪器装置未调整好，如零点，垂直度，水平度等；仪器示值标度不准，如温度计的刻度标值在制造中刻得不准确；电流表、电压表的示值不准等都会带来系统误差；还有仪器设备结构上的缺陷，如天平的不等臂性，砝码的标称质量不准等。

b. 理论方法的近似性　　大多数物理量不能直接进行测量，因此，总是要依据一定的方法和一定的理论表示出它与某些可以直接测量的物理量之间的关系式，最后算出测量结果。比如用单摆测定重力加速度 g 时，我们是直接测量摆长 l 和周期 T，而后根据公式

$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$算出 g 来。单摆的摆角 θ 趋近于零时该公式才能成立，当 $\theta=5^\circ$ 时，系统误差约为 0.1%，如果要求测量的精确度更高，则 θ 还应更小，或者要作相应的修正。因而在做这个实验时，即使满足 θ 很小的条件，其结果仍会有 0.1% 左右的误差存在，这是因为理论方法的近似性造成的。

c. 实验者本身的生理缺陷　　指由于实验者分辨能力的差异或者感觉器官的不完善等引入的误差。

由产生系统误差的原因可见，一般系统误差可采取适当的方法和措施加以消除或减小到最低程度。但是造成系统误差的各种原因往往错综复杂，我们只有加强实验能力的训练，不断积累经验，才能逐步提高分析误差的能力，并设法使其减到最小。这也是我们实验课的目的任务之一。

(2) 偶然误差(随机误差)　假如在实验中已消除了系统误差，在多次测量同一量时(在相同测量条件下)，测得的值总是有差异，且变化不定，即无一定的大小和方向，这种误差称为偶然误差或称随机误差。这类误差的起因是多方面的，如实验条件和环境因素的微小或无规则的变化，实验者反应快慢不一致或精力不集中、情绪不稳定而引起读数差错等等。由于偶然误差的存在，使每次测量值有时偏大，有时偏小，但它也并非毫无规律。在相同测量条件下，对同一物理量作多次重复测量(应在上百次以上)，就可以发现偶然误差存在着规律性。观测次数越多，规律性越明显。例如测量一钢球的直径，重复测量 150 次，其结果如表Ⅰ。表中 x 表示对钢球直径的测量值，N 表示测量值落在 $\Delta x=0.01$mm 间隔内的测量次数。由这些测量值求出的平均值为 7.36mm。以表中的 N 为纵坐标，x 为横坐标作竖直线图，如图 1 所示。由图 1 中的竖直线可以看出偶然误差的分布规律。根据实验可知，当测量次数趋于无穷大时，满足正态分布规律，如图 1 中的虚线所示。即：在相同条件下，做多次测量时，正的和负的误差出现的概率相同；误差小的值比误差大的值出现的概率大；绝对值很大的误差出现的概率几乎为零。由此可知，当测量次数无限增多时，测量列的算术平均值可作为测量的最佳值。由于真值是无法得到的，所以我们就以此最佳值来作为最理想的测量值。因而，在实验中，在条件允许的情况下，经常采取对同一量做多次重复测量，以其算术平均值作为测量的最佳值。但做普通物理实验时，要做太多次的测量是不实际的，且在多次测量中要保证同一测量条件也难以达到。实际上，一般物理实验重复测量 5～10 次也就可以了。

表Ⅰ

x(mm)	7.31	7.32	7.33	7.34	7.35	7.36	7.37	7.38	7.39	7.40	7.41
N	1	3	8	18	28	34	29	17	9	2	1

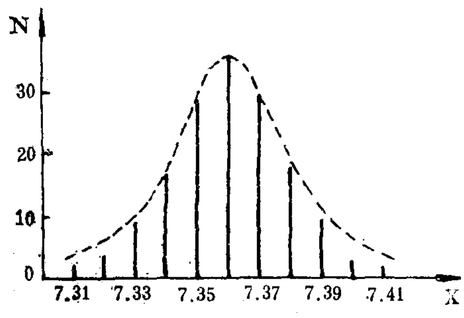


图 1

(3) 粗大误差(过失误差)　　在测量中有时会碰到一些无法解释的突出误差，即突然出现了偏离整个测量数据较大的数值，这是由于粗大误差而引起的，它在测量过程中容易被发

现。产生的原因可能是测量者粗心大意，或是由于仪器设备突然故障所致等。如果在测量过程中，有把握认为是由于粗大误差而引起的某测量值的偏离，可注明原因后剔除。若实验后发现，则必须经过分析判断来决定取舍。

3. 偶然误差的估算

本节中我们假定在系统误差已经消除的情况下，来讨论偶然误差的估算问题。

(1) 直接测量值误差的估算

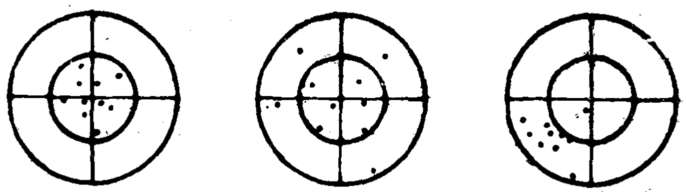
在实验中，凡是借助某些仪器可以直接测量出来的量称为直接测量值。而依据某些理论公式将直接测量值代入计算而得的量称为间接测量值。如用单摆测重力加速度实验中的摆长 l 和周期 T 为直接测量值，重力加速度 g 为间接测量值。实验中对某一物理量做多次测量所得到的一系列数据，我们称其为测量列。

如何来判断一测量列中数据的好坏？定性地说，可用测量的精密度(或称精度)，准确度和精确度来说明。

a. 精密度，准确度和精确度

所谓测量的精密度高，是指测量列的数据比较集中，偶然误差较小。测量的准确度高，是指测量数据的平均值偏离真值较小。而测量的精确度高是指测量列数据既集中，而平均值偏离真值又小。

现在举打靶例子来说明这三个词的意义。图 2 中的(*a*)表示射击的精密度较高，但准确度较差。(*b*)表示射击的准确度高，但精密度差。(*c*)表示精密度和准确度都较好，即精确度高。



(*a*) (*b*) (*c*)

图 2

定量地衡量测量的好坏程度，可用测量列的标准误差或算术平均误差的估算来确定。

b. 测量列的标准误差

由误差理论定义的标准误差表达式为：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}{N}}, \tag{2}$$

式中 N 为测量次数，ξ_i 为各次测量值的误差。

因为真值不可知，所以 ξ 也是未知的。一般用算术平均值表示最近真值。各次测量值与算术平均值之差，称为偏差(亦称残差)，可用 v 来表示，即 $v_i=(x_i-\bar{x})$。由误差理论可以导出，误差 ξ 和偏差 v 有如下的关系：

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=\frac{N}{N-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2, \tag{3}$$

因此(2)式变为：

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}(x\ \ -\bar{x})^2},$$

或

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{N-1}}。\tag{4}$$

(4) 式中的 σ 即为任一次测量值的标准误差。实际上，(4)式中的测量次数 N 是有限的，因此这里的 σ 与无穷多次测量结果下的 σ 是有区别的，为简单起见，仍用 σ 表示。

标准误差 σ 的意义是，测量列中任一个测量值所产生的误差落在 $\pm\sigma$ 之间的概率为68.3%，或者说，真值落在 $x+\sigma$ 和 $x-\sigma$ 区间内的概率为68.3%，其中 x 为该测量列中任一测量值。因此，误差 σ 越小，测量值越集中，或者说测量的精密度越高。

由于算术平均值 $\bar{x}$ 是由多次测量值求平均的结果，所以它的可靠性比任一次测量值要高。可以证明，算术平均值 $\bar{x}$ 的标准误差为

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{N}},\tag{5}$$

即

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}。\tag{6}$$

由(6)式可知，平均值 $\bar{x}$ 的标准误差等于任一次测量值 x_i 的误差除以测量次数的平方根。这实际上是将真值可能存在的区间更加缩小了。

c. 测量列的算术平均误差

估算偶然误差常用的另一种方法是算术平均误差 δ，

$$\delta=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}|v_i|.\tag{7}$$

当测量次数趋于无穷多时，标准误差和算术平均误差之间有下列关系：

$$\sigma\approx1.25\delta。\tag{8}$$

按误差理论同样可知：当测量列的算术平均误差为 δ 时，在测量列中任一次测量值所产生的误差，落在 $\pm\delta$ 之间的概率为54.6%。或者，真值落在 $\bar{x}\pm\delta$ 之间的概率为54.6%。

d. 绝对误差和相对误差，测量结果的表示方法

上述 *b*、*c* 两节讲的偶然误差的估算方法，即标准误差 σ 和算术平均误差 δ 均属绝对误差，它可以表示同一测量结果的可靠程度。在多次测量的情况下，把测量结果表示成 $\bar{x}\pm\Delta x$，Δx 为绝对误差。如用标准误差估算，则为 $\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}$；如用算术平均误差估算，则为 $\bar{x}\pm\delta$。由此可见，不同的估算方法，得到不同的绝对误差 Δx，或者说，在 $\bar{x}\pm\Delta x$ 区间内，包含真值的概率是不同的。在普通物理实验中，对误差的估算不要求很精确，故采用算术平均误差来作为偶然误差的估算，既计算方便，又直观易懂。

在比较不同测量结果时，不能简单地用绝对误差的大小来判断哪一次测量结果较精确。例如，测量得两个长度分别为：$l_1\pm\Delta l_1=65.92\pm0.05$ cm 和 $l_2\pm\Delta l_2=4.00\pm0.05$ cm。它们的绝对误差相同，但它们仍有测量的好坏之分，这时引用相对误差的概念就容易判断。

$$\text{相对误差}=\frac{\Delta x}{x},\tag{9}$$

式中 Δx 为绝对误差，x 为测量结果。

相对误差常用百分数表示，故也称为百分误差。

上例中两长度测量的相对误差各为：

$$\frac{\Delta l_1}{l_1}=\frac{0.05}{65.92}\times100\%=0.07\%,$$

$$\frac{\Delta l_2}{l_2}=\frac{0.05}{4.00}\times100\%=1\%。$$

由此很容易看出：对 l_1 的测量好于 l_2 的测量。

e. 单次测量值的误差估计

在实际工作或某些实验中，往往对有些量的测量要求不高，不需要重复测量，或者条件不许可，不能进行多次测量，所以只做一次测量。对一次测量的误差估计，一般要由仪器的出厂说明书或检定书标明的仪器误差来定。对于没有标明误差的仪器，一般由仪器的最小分度值来定。

例如：在"用伸长法测定杨氏模量"的实验中，钢丝直径 d 和钢丝在外力作用下的伸长量 ΔL 的测量，是实验中主要的误差来源，要求多次测量，而镜尺到反射镜的距离 D，光杠杆前后脚距离 b，钢丝原来的长度 L，只需做一次测量。又因为 L、D 均较长，用米尺测量，可估计它们的误差为1mm(即米尺的1个最小分度)而 b 较短用游标卡尺测量，可估计误差为0.05mm。

f. 重复测量所得测量值相同时的误差估计

在实验中，经常会碰到对同一量在相同条件下多次测量，而得到的测量值完全相同。如用物理天平称衡某一物体的质量时，不改变条件，往往会出现多次测量值完全相同的情况，这并不能说明测量的偶然误差为零，因为误差存在于一切测量之中。这只是因为测量的仪器精度不够。测量的偶然误差又较小，所以反映不出来。在这种情况下，误差的估计可以由仪器的误差或最小分度值来确定，或者根据实验者的经验，按实际情况来确定。

g. 测量列中异常数据的取舍

在实验数据中，经常会碰到一些过分偏大或偏小的数据，若明显地是过失误差，就应予以剔除；但有些并不能表明是过失误差引起，在这种情况下，可应用统计理论中异常数据取舍准则来判别，最常用的是 3σ 准则。

由本节中的 b 可知，σ 为测量列的标准误差，它表示在此测量列中真值落在区间 $x+\sigma$ 和 $x-\sigma$ 之内的概率为68.3%。根据误差理论亦可计算出落在区间 $[x+2\sigma,\ x-2\sigma]$ 之内的概率为95.5%，落在区间 $[x+3\sigma,\ x-3\sigma]$ 之内的概率为99.7%。由此可见，任一测量值落在 $x\pm3\sigma$ 范围外的可能性几乎是不存在的。3σ 称为极限误差。所以凡是误差大于 3σ 的测量值，应该舍弃。

在采用算术平均误差的情况下，根据(8)式可以算出，当任一测量值误差大于 4δ 时，该值应该舍弃。

(2) 间接测量结果的误差估算

间接测量值是由直接测量值代入公式后计算得到的，所以直接测量值的误差会传递给间接测量值。

a. 误差传递的一般公式

设有函数 $y=f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n)$，其中 x_1，$x_2, x_3, \cdots x_n$ 分别为直接测量值，它们的相应误差为 Δx_1，Δx_2，Δx_3，$\cdots\cdots\cdots\Delta x_n$，由此引起的间接测量值 y 的误差为 Δy。

则有：
$$y+\Delta y=f(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2,\ x_3+\Delta x_3,\ \cdots\cdots x_n+\Delta x_n)。\tag{10}$$

可以认为，各直接测量值的误差是一微小改变量，它们引起的间接测量值 y 的微小改变量是 Δy。将(10)式右边按泰勒级数展开，得：

$$\begin{aligned}
&f(x+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2,\ \cdots\cdots x_n+\Delta x_n)\\
&=f(x_1,x_2,\cdots x_n)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\\
&\quad+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\Delta x_1)^2+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\Delta x_2)^2\cdots\cdots\\
&\quad+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\Delta x_n)^2+\cdots\cdots\\
&\simeq f(x_1,x_2,\cdots x_n)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n。
\end{aligned}$$

因而

$$\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n。\tag{11}$$

相对误差：

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{y}+\frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{y}+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{y}。\tag{12}$$

(11)式是误差传递的基本公式，公式中等号后边各项，称为分误差。$\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n$ 前的系数，称为误差的传递系数。从这一式中可以看到，某一测量值的误差对总误差的贡献，是由该量本身的误差与相应的误差传递系数决定的。

b. 误差的算术合成

当直接测量值的误差估算用算术平均误差时，间接测量值的误差采用算术合成法传递。误差的算术合成是在误差传递基本公式的基础上，考虑到最不利的情况，即将各分误差项均取正值。即

$$\Delta y=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\delta x_1+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\delta x_2+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\delta x_n,\tag{13}$$

$$\frac{\Delta y}{y}=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\frac{\delta x_1}{y}+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\frac{\delta x_2}{y}+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\frac{\delta x_n}{y}。\tag{14}$$

为方便计，现将常用运算关系的误差算术合成公式列于表Ⅱ中，供查找。

c. 推求误差传递公式的一般步骤

若函数表达式中，有乘除形式时，先将函数两边取自然对数，然后再求全微分；而后合并同一测量值误差(即分误差)前的系数。若各直接测量值的绝对误差是由算术平均误差计算而得，则用算术合成公式计算，将各微分符号改为算术平均误差的符号(习惯上用绝对误差符号 Δ 代替 δ)；并将各项的误差传递系数取绝对值相加。若各直接测量值的绝对误差由标准误差计算而得，则用标准误差的传递公式，即用方和根合成，各微分符号改为标准误差符号。

例：写出函数 $N=\dfrac{x-y}{z-x}$ 的误差传递公式，x，y、z 均为各自独立的直接测量值。(用算术

表Ⅱ　常用运算关系的算术合成公式（表中符号$\varDelta$表示算术平均误差）

运算关系 $N=f(A,B,C,\cdots)$	绝对误差 $\varDelta N$（$\varDelta N$取绝对值）	相对误差 $E_r=\dfrac{\varDelta N}{N}$
$N=A+B+C+\cdots$	$\varDelta A+\varDelta B+\varDelta C+\cdots$	$\dfrac{\varDelta A+\varDelta B+\varDelta C+\cdots}{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\cdots}$
$N=A-B$	$\varDelta A+\varDelta B$	$\dfrac{\varDelta A+\varDelta B}{\overline{A}-\overline{B}}$
$N=AB$	$\overline{A}\varDelta B+\overline{B}\varDelta A$	$\dfrac{\varDelta A}{\overline{A}}+\dfrac{\varDelta B}{\overline{B}}$
$N=ABC$	$\overline{B}\,\overline{C}\varDelta A+\overline{A}\,\overline{C}\varDelta B+\overline{A}\,\overline{B}\varDelta C$	$\dfrac{\varDelta A}{\overline{A}}+\dfrac{\varDelta B}{\overline{B}}+\dfrac{\varDelta C}{\overline{C}}$
$N=A^n$	$n\overline{A}^{n-1}\varDelta A$	$n\dfrac{\varDelta A}{\overline{A}}$
$N=\sqrt[n]{A}$	$\dfrac{1}{n}\overline{A}^{\frac{1}{n}-1}\varDelta A$	$\dfrac{1}{n}\dfrac{\varDelta A}{\overline{A}}$
$N=\dfrac{A}{B}$	$\dfrac{\overline{B}\varDelta A+\overline{A}\varDelta B}{\overline{B}^2}$	$\dfrac{\varDelta A}{\overline{A}}+\dfrac{\varDelta B}{\overline{B}}$
$N=\sin A$	$(\cos\overline{A})\varDelta A$	$(\mathrm{ctg}\overline{A})\varDelta A$
$N=\cos A$	$(\sin\overline{A})\varDelta A$	$(\mathrm{tg}\overline{A})\varDelta A$
$N=\mathrm{tg}\,A$	$\dfrac{\varDelta A}{\cos^2\overline{A}}$	$\dfrac{2\varDelta A}{\sin 2\overline{A}}$
$N=\mathrm{ctg}\,A$	$\dfrac{\varDelta A}{\sin^2\overline{A}}$	$\dfrac{2\varDelta A}{\sin 2\overline{A}}$

合成公式）

解：取对数求全微分得：

$$\ln N=\ln(x-y)-\ln(z-x),$$

$$\frac{dN}{N}=\frac{d(x-y)}{x-y}-\frac{d(z-x)}{z-x},$$

$$\frac{dN}{N}=\frac{dx-dy}{x-y}-\frac{dz-dx}{z-x}。$$

将同一测量值的微小变化量（即认为误差）前系数合并，则有：

$$\frac{dN}{N}=\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{z-x}\right)dx-\frac{1}{x-y}dy-\frac{1}{z-x}dz。$$

用算术合成，将微分号变为$\varDelta$，且各项传递系数取绝对值相加，则有：

$$\frac{\varDelta N}{N}=\left|\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{z-x}\right)\right|\varDelta x+\left|\frac{1}{x-y}\right|\varDelta y+\left|\frac{1}{z-x}\right|\varDelta z。$$

在推导时必须注意：

(i)　若各直接测量值的误差以算术平均误差计算求得，则用算术合成。

(ii)　先计算出相对误差，然后再计算绝对误差比较方便。

当然，我们亦可用(11)、(12)式来推导误差传递的一般公式，即根据(11)式先求出绝对误差，然后再计算出相对误差。

三、测量结果的有效数字

1. 有效数字的一般概念

在实验中，依据仪器精度读到的准确数字和一位可疑（估计）数字，统称为有效数字。有效数字位数的多少取决于测量精度。例如：用米尺测物长的结果为 5.65 ± 0.01 cm，其有效数字为三位；用精度为 0.05mm 的游标卡尺测同样的长度，结果为 5.655 ± 0.005 cm，有效数字为四位；用千分尺（螺旋测径器）测得的结果为 5.6551 ± 0.0001cm，有效数字为五位。

在上例中用不同精度的测长仪器，得到不同有效数字位数的测量结果。不能多取或少取，多取则毫无根据地提高了仪器的精度，少取则降低了仪器的精度。对间接测量值来说，有效数字位数，应依据直接测量值的有效数字位数，按照有效数字的运算法则而得出。

有效数字位数的取舍，必须与误差的估算结果相统一，即有效数字的最后一位，必须与误差有效数字所在的位数对齐。因而，对有效数字还可定义为：从误差所在的这一位及其前面的数字，均称为测量结果的有效数字。如 $I=360\pm0.5\mu A$ 和 $g=(9.80125\pm3\times10^{-4})m/s^2$ 是不正确的，应改为：$I=360.0\pm0.5\mu A$ 和 $g=(9.8012\pm3\times10^{-4})m/s^2$。由绝对误差来决定有效数字的位数是今后处理一切有效数字问题的依据。

测量结果的有效数字与相对误差也有关系。一般来说，有效数字位数越多，相对误差就越小，有效数字的位数越少，相对误差就越大。如：1.35 ± 0.01cm 有效数字是 3 位，其相对误差为 0.7%；1.3500 ± 0.0001cm 有效数字是 5 位，相对误差为 0.007%。后者是用千分尺测量而前者是用米尺测量的，所以后者的精度一定大于前者。因而在进行误差分析时，用误差的大小，或有效数字的位数，都能反映出测量精度的高低。

2. "0"在有效数字中的地位

在测量值的数据中，用以表示小数点位置的"0"不是有效数字，如 0.025cm 中小数点前后的两个 0 都不是有效数字；而在数字中间和数字末位的"0"都是有效数字，如 20.45cm 和 501.0m 中的 0 都是有效数字。

若由于选择不同单位而出现的不反映仪器精度的"0"，如把 501.0m 换算成 501000mm，测量中本来是 4 位有效数字，但改变单位后，多出的两个"0"不能算有效数字。为了能正确表示测量结果的有效数字位数，一般采用科学记数方法，即任何值只写出有效数字，而单位换算的数量级用 10 的幂数来表示，如上例中的数可写为：

5.010×10^{-1} km，5.010×10^{2}m，5.010×10^{5}mm。

3. 有效数字的运算规则

（1）舍入法则　在有效数字运算中，常用四舍五入的舍入法则。为了尽量减小计算过程中带进系统误差，一般采用"四舍、六进、五配偶"的法则，即尾数小于四（包含四）者舍，大于六（包含六）者进，对于五，若前一位是奇数，则进 1 把它配成偶数；是偶数，则舍去。例如有 24.535 和 24.545 两数，若保留 4 位有效数字，则用此法则可得：24.54 和 24.54（五配偶）。

（2）加、减运算

参与加、减运算的各数按位数对齐后，以末位数的位数最高的一个数为准，将其余各数按舍入法则简约到比它多一位数。然后进行运算，将运算结果再简约到其末位与原最高的末

位数对齐。

如参与运算的各数已经算出误差，则应先找出绝对误差最大的数，以该数的末位为准，将其余各数简约到比它多一位，然后进行运算，运算结果的位数由总误差的值决定。

例 1　求长度之和 $l = l_1 + l_2 + l_3$。

其中，$l_1 = 57.30\ \text{cm}$；

$l_2 = 876.345\ \text{cm}$；

$l_3 = 1.6341\ \text{cm}$。

解：

$$\begin{array}{rl} 57.30 & \text{（末位数的位数最高）} \\ 876.345 & \text{（比末位数位数最高的数多一位）} \\ +\quad 1.634 & \text{（简约到比末位数位数最高的数多一位）} \\ \hline 935.279\text{cm} & \end{array}$$

将最后结果简约到与原来末位数位数最高的数位相同。所以长度之和 $l = 935.28\text{cm}$。

例 2　求长度之和 $l = l_1 + l_2 + l_3$。

其中，$l_1 = (57.30 \pm 0.01)\text{cm}$；　　（绝对误差最大）

$l_2 = (876.345 \pm 0.002)\text{cm}$；

$l_3 = (1.6341 \pm 0.0001)\text{cm}$。

解：　$l = 57.30 + 876.345 + 1.634 = 935.279\ \text{cm}$。

而　　$\Delta l = 0.01 + 0.002 + 0.0001 = 0.01\text{cm}$（误差只取 1 位）。

所以　$l = (935.28 \pm 0.01)\text{cm}$。（结果的有效数字末位与误差末位对齐）。

(3) 乘、除运算

乘、除运算结果的有效数字位数，应保留至与参加运算各数中有效数字位数最少的相同。为简化运算，在运算前，可先将各数约简至比有效数字位数最少的多一位。

例：　测得钢丝的直径　$d = 1.543 \pm 0.005\ \text{mm}$；

长度　$l = 76.5 \pm 0.1\text{mm}$；

质量　$m = 1.2778 \pm 0.0004\text{g}$。

求钢丝的密度。

解：密 度 $\rho = \dfrac{4m}{\pi d^2 l}$。

约简：$m = 1.278\ \text{g}$，π 亦取 4 位，即3.142。

则：

$$\rho = \frac{4 \times 1.278}{3.142 \times 1.543^2 \times 76.5} = 8.934 \times 10^{-3}\text{g/mm}^3 = 8934\text{kg/m}^3\text{。}$$

若无误差计算，结果为$\rho = 8.93 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$。

用算术合成，偶然误差计算如下：

ρ 的相对误差 $\dfrac{\delta\rho}{\rho} = \dfrac{\delta_m}{m} + \dfrac{\delta l}{l} + \dfrac{2\delta d}{d}$。

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{0.0004}{1.3} = 3.1 \times 10^{-4};$$

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{0.1}{76} = 1.3 \times 10^{-3};$$