

环形激光陀螺

姜亚南 著

清华大学出版社

内 容 提 要

本书主要阐述环形激光陀螺的原理和实验研究。内容包括行波激光半经典理论、自治方程组、光与物质的相互作用、环激光中多种误差源、环形谐振腔、非互易光学效应、光学陀螺仪等方面。

本书为从事激光和环形激光陀螺研究的科技人员及高等院校与激光有关专业的师生的参考书。

Abstract

The theoretical and experimental studies of ring laser gyroscopes are systematical discussed in this book. Topics such as semiclassical theories of ring lasers, selfconsistent equations, interactions between light and materials, various error sources of ring lasers, ring cavities, nonreciprocal optical effects and optical gyros etc. are included.

This book is devoted mainly to scientists and engineers as well as graduate students in the related fields.

环 形 激 光 陀 螺

姜 亚 南 著

★

清华大学出版社出版

北京 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

★

开本: 787×1092 1/16 印张: 14 3/4 字数: 365 千字

1985 年 8 月第 1 版 1985 年 8 月第 1 次印刷

印数: 0001~1000

统一书号: 15235·144 定价: 2.80 元

序

自从激光问世以来，利用激光做成光学陀螺，很快就被提出来了。实际上光学陀螺的概念，早于激光的出现，只是因为有了激光，才使光学陀螺成为实际可行。尽管如此，当把这一原理付诸实践的时候，一方面看到这一技术的新颖和先进，在实际应用中具有光明的前途；另一方面，为了达到实际使用的要求，又会遇到许多新的问题需要创造性地予以解决。一般说来，一个看来漂亮的基本原理，能够应用到什么程度，往往决定于实践中衍生出来的问题的解决和工程技术上的约束，而不在于基本原理本身。正因为如此，把一项原理变成可用的实物，为了解决周围实际技术所要花费的智慧和劳动，常是十、百倍于做一个原理性的表演。从世界上激光陀螺发展的过程来看，正是如此。

我国近年来从事激光陀螺的发展和研制工作，颇有人在。清华大学精密仪器系姜亚南等同志及一些协作单位的同志们，专心致志于这一领域的工作，夜以继日，可说是呕心沥血。十余年来，通过实践，不断发现问题，又通过大量科学实验和理论分析解决了大量关键技术问题，才取得了成功的经验。在此基础上姜亚南同志又写出了这本理论与实践并茂的专门著作。原稿是作为研究生教材用的。现经过整理成书出版。我高兴地推荐这本专著，因为它是这一新领域的科学技术总结，特别是包含我国自力更生开创这一领域的丰富经验，也因为它是出于第一手实践者的手笔。这本著作是我国自己编写出版的第一本在这一领域的专业书籍，这也是应该称道的。

王大珩

1984年7月2日

目 录

前 言

第一章 激光陀螺概述	1
§1 Sagnac 效应	1
§2 激光陀螺	2
§3 驻留在惯性空间的驻波	3
§4 激光陀螺的特点	5
第二章 行波激光振荡的半经典理论——环激光自治场方程	7
§1 行波激光电磁场波动方程	7
§2 转动环激光中电磁场波动方程	9
§3 无源环形腔中波方程及其解	15
§4 环激光中波动方程及其解	28
第三章 行波激光自治方程组的讨论	40
§1 自治方程组	40
§2 小信号单程净增益系数	47
§3 频率牵引效应	54
§4 增益饱和效应	57
§5 光强的准稳态解	63
§6 辐射捕获效应	67
§7 频率的自、互饱和效应	70
§8 频率方程的辐射捕获修正	71
第四章 激光陀螺的部分误差理论	72
§1 双同位素 Ne——避开模竞争	72
§2 光强及光强调谐曲线	77
§3 稳态频差及相对比例因子修正项	83
§4 激活介质的朗缪尔流效应	94
§5 非激活介质流动效应	104
§6 零位漂移	106
第五章 环激光自治方程组的准稳态近似解及闭锁效应	108
§1 准稳态解	111
§2 闭锁状态	115

§3 行波状态.....	123
第六章 环形谐振腔与高斯模.....	129
§1 谐振腔与本征模.....	129
§2 环形腔的环绕矩阵和稳定性条件.....	132
§3 高斯光束的传输及 q 参数.....	137
§4 环形激光器中高斯光束的自再现.....	143
§5 空腔带宽和激光线宽极限.....	148
§6 模式测量.....	152
第七章 环形激光器中的非互易光学效应.....	154
§1 概述.....	154
§2 光的偏振和琼斯矢量.....	158
§3 法拉第效应和克尔效应的一般性讨论.....	161
§4 非互易磁光效应.....	165
§5 磁光参数.....	179
第八章 激光陀螺的偏频方案.....	182
§1 四频差动激光陀螺.....	182
§2 石英晶体的光学性质和旋光性的理论分析.....	191
§3 机械抖动偏频激光陀螺.....	198
§4 磁镜偏频激光陀螺.....	203
§5 激光陀螺的读出系统.....	214
第九章 光学陀螺仪及其精度极限.....	218
§1 几种类型光学陀螺仪的原理.....	218
§2 几种类型光学陀螺仪精度极限的比较.....	223
参考文献.....	228

前 言

环形激光器的基本特点在于可提取反向行波频率差和光强差的信息，从而对各种非互易效应如转动的感测具有很高的灵敏度。并可对光与物质相互作用的物理过程作较深入的定量研究。

本书主要阐述环形激光器、激光陀螺的基本原理，光与物质相互作用的线性及非线性、共振与非共振效应，多种误差源的物理机构及实验分析，非互易光学效应及在偏频方案中的应用，环形谐振腔的腔模理论等。

本书着重于介绍行波激光器的半经典理论与相应的实验研究。希望能成为高等院校中与激光有关专业的一本有益的教学参考书。

本书在理论分析中，着重于物理形象的描述，并在此基础上对所涉及的数学问题尽可能地交待其来龙去脉，力求易于为多数读者所接受。

Lamb 和 Aronowitz 等人的论文为环激光理论奠定了基础，因而是本书的主要参考内容。

本书是在多年来科研工作的基础上，对环形激光陀螺这一新领域所作的系统的总结。其基础离不开众多从事激光陀螺、环激光测角等方面研究的同事们。他们作了大量开创性的工作，这里应提到高伯龙教授的贡献。更离不开本科研组全体同志如冯铁砬、范瑞鹤、李克兰、张书练、田芊、李滋兰、黄美珍、包成玉、刘卫民等十余年来对实验性样机所进行的研究。

本书是在为研究生所作的专题讲课的基础上，特别是在航空工业部 618 研究所的同事们的促进下完成的。他们曾对讲课内容提出了许多建设性的意见。在此谨对来自各方面的支持表示感谢。

本书请中国科学院学部委员王大珩教授作序，在此表示衷心的感谢。

最后恳请读者对本书存在的不足与错误给予批评和指教。

姜 亚 南
Jiang Yanan
Tsinghua University

第一章 激光陀螺概述

自 60 年代发展起来的激光陀螺已进入实用领域。成为新一代捷联式惯性导航系统的理想部件。这是一种从原理上与机电陀螺完全不同的光学陀螺仪。在感测相对于惯性空间的转动方面表现出相当优良的性能。

§ 1 Sagnac 效应

激光陀螺与正在发展之中的光纤陀螺这一类光学陀螺仪的原理都是基于 Sagnac 效应。这种效应发生于环形光路中,此环形光路可以是三角形的、多边形的或圆形的。

在环形光路中,沿顺、逆时针方向的两束光独立地行进着。当这个环形光路相对于惯性空间不转动时,根据对称性可知:顺、逆时针的光程长度是相同的。但是当此环形光路相对于惯性空间有一转动 Ω_r 时,这种对称性将被破坏。顺、逆光程就可能产生差异。根据下面要讨论的 Sagnac 效应可以看到,顺、逆时针的光程将产生一正比于转动角速度 Ω_r 的差值。

$$\Delta L = \frac{4S}{C} \Omega_r \quad (1-1-1)$$

这里 S 是环形光路所包围的面积, C 是光速, ΔL 是对于顺、逆传播方向为非互易的光程差。于是只要感测出 ΔL , 就可以知道环形光路相对于惯性空间的转动角速度 Ω_r 。

由于实际所涉及的转动线速度 ($\Omega_r \cdot R$) 的范围是远小于光速的, 即 $(\Omega_r R) \ll C$ 。因而仅是 $\Omega_r R/C$ 的一阶效应才是有意义的。在一级近似下, 借助于圆形光路, 可以容易地证明这种效应。任意形状的环形光路, 在任意转动轴的情况下, 该效应的证明, 将放在第二章中讨论。

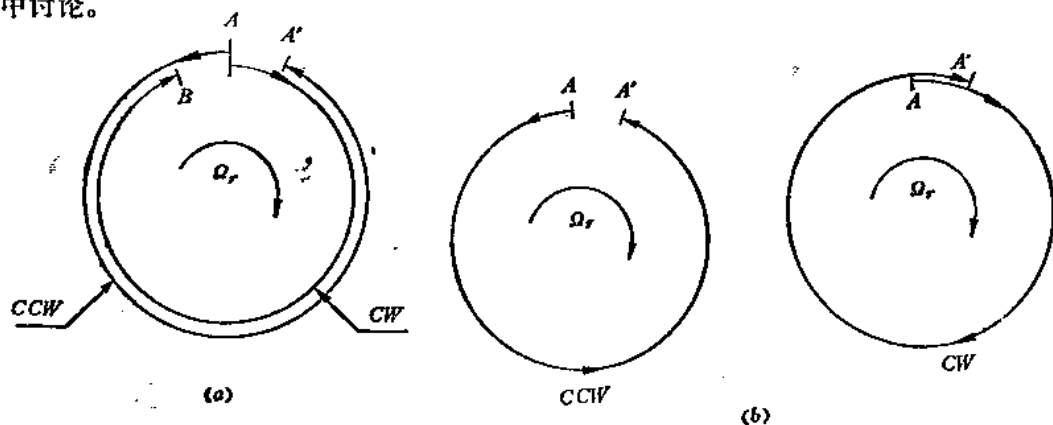


图 1-1-1 Sagnac 效应

在闭合的圆形光路中,二束光同时从 A 点出发,分别沿顺 (CW)、逆 (CCW) 时针方向绕环形光路以相同的速度 C 行进。当此环形光路有一转动 Ω_r 时,设此转动 Ω_r 为顺

时针方向,如图 1-1-1 (a) 所示。则这一对反向光束将不能同时回到原点。这是由于原点 A 在光束行进一周的时间 $t = 2\pi R/C$ 内,已经移到 A' 。于是逆时针运转的光束 CCW ,从 A 点出发回到原点 A' 的时间内,顺时针光以相等的光速行进仅到达 B 点。这距离回到原点 A' 还相差

$$\Delta L = 2R\Omega t = \Omega, 4S/C \quad (1-1-2)$$

的距离。

换一个方式说,参照图 1-1-1 (b)。当环形光路有一转动 Ω , 时,逆着转动方向运转的光 (CCW 光),从原点 A 回到原点 A' 所走的闭合路程将是:

$$L_{CCW} = L_0 - \Delta L/2$$

而顺着转动方向运转的光 (CW 光) 的闭合路径将是:

$$L_{CW} = L_0 + \Delta L/2$$

即顺着转动方向的闭合路程,将大于逆着转动方向的闭合路程。 $L_{CW} > L_{CCW}$ 。光程差 ΔL 如 (1-1-2) 式所示。这就是 Sagnac 效应。是于 1913 年研究转动的环形干涉仪中提出来的。

因此,只要测出非互易的光程差,就可以知道此环形光路相对于惯性空间的转动角速度。但此光程差 ΔL 是如此微小,难于测准。例如,1925 年 Michelson-Gale 用它来感测地球自转 Ω_E , $\Omega_E = 15^\circ/h \approx 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 。尽管用了很大的环形光路,在 $600 \times 300 \text{ m}^2$ 的矩形环路中,也只能产生 $0.18 \mu\text{m}$ 的光程差,约相当 $1/3$ 条干涉条纹的位移。环形干涉仪如图 1-1-2 所示。

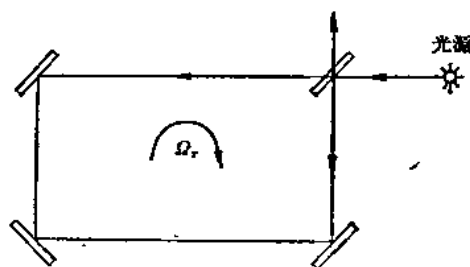


图 1-1-2 环形干涉仪

直到激光出现以后,把激光增益介质引入到环形谐振腔中,构成环形激光器,才极大地提高了对转动测量的灵敏度。使这项原理进入激光陀螺的实用领域。如图 1-1-3 所示。

§ 2 激光陀螺

在单模对运转的环形激光器中,顺、逆时针振荡的激光行波的频率分别取决于环腔的顺、逆闭合腔长,

$$\nu_{CW} = \frac{C}{L_{CW}}, \quad \nu_{CCW} = \frac{C}{L_{CCW}} \quad (1-1-3)$$

于是在转动的环形激光腔中,非互易的顺、逆腔长差 $\Delta L = L_{CW} - L_{CCW}$, 将转化为非互易的顺、逆激光振荡的频差。如图 1-1-3 所示。

令 $\Delta \nu = \nu_{CCW} - \nu_{CW}$, 则有 $\Delta \nu / \nu = \Delta L / L$, 或

$$\Delta \nu = \left(-\frac{\nu}{L} \right) \Delta L = \frac{4S}{\lambda L} \Omega, \quad (1-1-4)$$

这就是激光陀螺的原理公式。于是只要测量出顺、逆激光行波的频差,就可以用 (1-1-4) 式得到相应的转动角速度 Ω 了。并注意到顺着转动方向的光频将变小,而逆着转动方向的光频将变大。

在上面的例子中, 地球自转所对应的 $\Delta L = 0.18 \mu\text{m}$, 而 $\nu/L = 2.6 \times 10^5 \text{Hz}/\mu\text{m}$ 。由 (1-1-4) 式可见, $\Delta\nu = 0.47 \times 10^5 \text{Hz}$ 。

用振荡激光的频差来感测转动角速度的灵敏度比光程差的干涉测量, 一下子提高 5 个数量级。这是相当可观的。当然实际上我们不可能建造如此大的环形激光器。以实际应用的典型环激光器为例, 三面反射镜构成的正三角形谐振腔, 腔长 $L = 20\text{cm}$ He—Ne 激光增益管维持着 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 的激光振荡。则有

$$\begin{aligned} 4S/(\lambda L) &= 1.06 \times 10^3 \text{Hz}/^\circ/\text{s} \\ &= 0.29 \text{Hz}/^\circ/\text{h} \end{aligned}$$

这表明地球自转 $\Omega_E = 15^\circ/\text{h}$, 将产生 $\Delta\nu = 4.4 \text{Hz}$ 的频率差。这是完全可以测量的。

将 (1-1-4) 式两边对时间 t 积分,

$$\begin{aligned} \int_0^t \Delta\nu dt &= \frac{4S}{\lambda L} \int_0^t \Omega_r dt \\ N &= \frac{4S}{\lambda L} \theta \end{aligned} \quad (1-1-5)$$

这里 N 是在 t 时间内, 由于频差所累积的周期数; θ 为 t 时间内的总转角。(1-1-5) 式就成为环形激光器作为角度传感器的原理公式。

Ω_r , θ 是输入的环激光的待测转动, 而输出信号为 $\Delta\nu$ 或 N , 它们之间的比例系数 $(4S/\lambda L)$ 是标志环激光灵敏度的比例因子, 它可以有各种单位。仍以上面的例子来看, 环激光作为转动传感器的比例因子常用的单位有

$$\begin{aligned} (4S/\lambda L) &= 1.06 \times 10^3 \text{Hz}/^\circ/\text{s} = 1.06 \times 10^3 \text{脉冲}/^\circ \\ &= 0.29 \text{Hz}/^\circ/\text{h} \\ &= 3.8 \times 10^5 \text{脉冲}/\text{整周} \end{aligned}$$

这表明每转过约 $3''$, 将会有有一个脉冲信号输出。而转过一整周 360° , 将会有 3.8×10^5 个脉冲输出。

这里仅说明了激光陀螺高灵敏度的特点。但还不足以使激光陀螺获得高精度。由于增益补偿了损耗, 使振荡激光的线宽变得极窄。趋近于量子噪声的极限水平, 即小到 10^{-2}Hz 以下。图 1-1-3 中, 为了定性的表示, 而把激光的线宽显著地夸大了。正是由于上述原因, 使得激光陀螺对转动的感测有可能达到极高的精度。

§ 3 驻留在惯性空间的驻波

这里, 将从另一个物理形象去理解激光陀螺。

当忽略环腔内振荡光场的横向分布, 以均匀平面波来取代环腔中实际振荡的高斯光束时, 用下标 1, 2 分别表示逆、顺激光行波。并令坐标 z 轴沿环形光路, 如图 1-1-4 (a) 所示。则 1, 2 行波可分别表示为

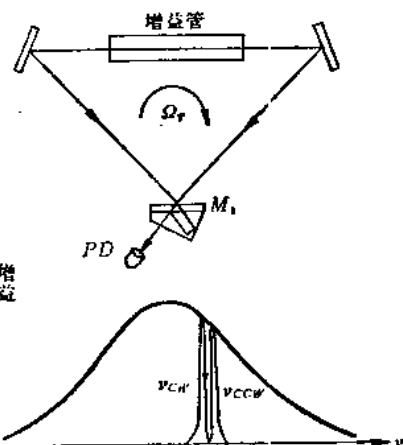


图 1-1-3 激光陀螺

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cos(2\pi\nu_1 t - kz) \\ E_2 &= E_0 \cos(2\pi\nu_2 t + kz) \end{aligned} \quad (1-1-6)$$

这里认为 1, 2 行波在强度及偏振方向上是相同的。行波 1 沿 z 轴的正方向, 即为逆时针行波; 而行波 2 则沿 z 轴的反方向, 为顺时针行波。

当环腔不转动时, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, 则环腔中合成的总电矢量为

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos kz \cos 2\pi\nu t \quad (1-1-7)$$

这是一个驻波

波腹在 $z = m\lambda/2$ 处

波节在 $z = (m+1/2)\lambda/2$ 处 ($m = 0, 1, 2, \dots$)

当环腔相对于惯性空间转动时, 仍设 Ω_r 为顺时针转动, 则 $\nu_1 > \nu_2$, 这时合成的总电场

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= 2E_0 \cos[kz - \pi(\nu_1 - \nu_2)t] \cos 2\pi\nu t \end{aligned} \quad (1-1-8)$$

这里 $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$, 并有 $\Delta\nu \ll \nu$

(1-1-8) 式表示一准驻波。其波节、波腹相对于环腔坐标 z 是在作整体的运动。如考察第 m 个波腹的时空特性, 则有

$$kz - \pi(\nu_1 - \nu_2)t = m\pi$$

对上式微分, 便可得到此波腹的运动速度。

$$v = \frac{dz}{dt} = (\nu_1 - \nu_2) \frac{\lambda}{2} = 2s\Omega_r/L \quad (1-1-9)$$

速度与 m 无关, 表明此准驻波将作整体的运动。仍以圆形腔为例, 这将使图象更加清晰。则有

$$v = R\Omega_r \quad (1-1-10)$$

这表明, 当环腔转动时, 准驻波不再驻留在腔内, 而是以 $v = R\Omega_r$ 的线速沿 z 轴的正方向, 即逆着转动方向运动着。这个速度正好与环腔转动的线速度 ($-R\Omega_r$) 大小相等, 方向相反。

综上所述, 当环腔相对于惯性空间有转动时, 则环腔内振荡的准驻波的运动恰恰抵消了环腔的转动。于是这个驻波不再驻留于环腔上, 而是驻留在惯性空间。环激光所以能够成为相对于惯性空间的转动传感器, 其依据就在于此。即腔内的驻波振荡是驻留在惯性空间的。它是相对于惯性空间不转动的“基准”驻波。它不会被环腔的转动所带动。参见图(1-1-4)

(b)。于是只要我们在腔体上开一个取样读出“窗口”, 并在“窗口”旁的腔体上安装上光电检测器。那么当环腔转动时, 就可以测出扫过多少个驻波的波腹或波节。腔体每转过 $(\lambda/2R)$ 弧度, 就会扫过一个波腹和波节。在读出装置中就会输出一个脉冲信号。如检测到有 N 个脉冲输出, 就表明腔体转过 θ 弧度。

$$\theta = N \frac{\lambda}{2R} = \frac{\lambda L}{4S} N$$

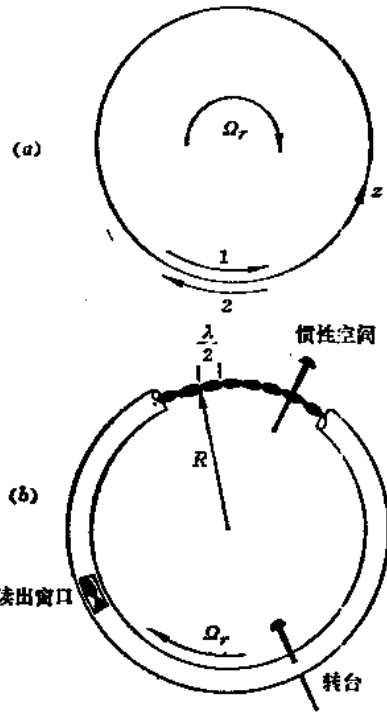


图 1-1-4 固定在转台上的环形激光器和驻留于惯性空间的驻波

这就是上面已导出的 (1-1-5) 式。

当圆形腔的直径 $2R$ 约为 12cm 时, 一个脉冲所对应的角度 $\lambda/2R$ 约为 $1''$ 。整个圆周被半波长等分成约 1.2×10^6 份。此圆形的激光腔转 360° 一整周, 将会有 1.2×10^6 个脉冲输出。

上面我们初步讨论了环形激光器, 作为惯性空间一维转动的角速度和角度传感器的原理。敏感轴垂直于环腔平面。

§ 4 激光陀螺的特点

激光陀螺的原理示意图如图 1-1-3 所示。介质膜高反射镜构成低损耗的激光谐振腔。He-Ne 激光增益管对光的增益作用, 使腔内维持着稳定的顺、逆行波的振荡。

为了检测出反向行波的频差 $\Delta\nu$, 需利用一片腔镜 M_1 的部分透射, 将反向行波引出腔外, 再经合光棱镜合光干涉, 最后被光电元件 PD 接收。这些就构成激光陀螺的读出系统。

从上面的初步讨论可以看到, 激光陀螺的工作原理与常规机电陀螺完全不同, 它的主要特点是:

- 1. 可靠性高, 寿命长。由于没有旋转部件, 结构简单、全固态化。因而坚固可靠、耐冲击震动、抗加速度性能好。据报导激光陀螺寿命已长达 5 万小时。
- 2. 动态范围宽。从原理上看, 角速度测量范围几乎没有上限, 已达到 $2 \times 10^3(^{\circ})/\text{s}$ 。
- 3. 启动时间短。
- 4. 单轴灵敏度高。激光陀螺的敏感转轴垂直于环腔平面, 对其它正交轴向的转动角速度、角加速度及线加速度不敏感。因此没有常规陀螺受交叉轴耦合而产生的误差。
- 5. 数字式输出: 由于是脉冲信号输出, 便于与计算机系统接口。
- 6. 成本低, 适于批量生产。
- 7. 低功耗、体积小、重量轻。

从而激光陀螺已成为捷联式惯性导航系统的理想元件。如图 1-1-5 所示。

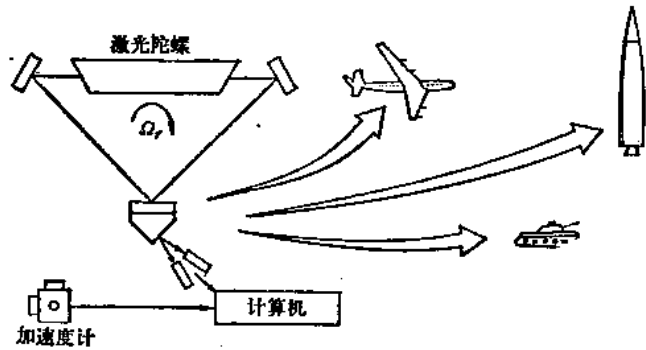


图 1-1-5 捷联式激光陀螺惯性导航系统

目前激光陀螺的随机漂移率指标已达到 $10^{-3} (^{\circ})/\text{h}$, 据美国 Honeywell 公司报导, 1980 年 6 月, 在波音 747 飞机上试飞的圆概率误差 (C.P.E) 优于 0.621 海里/小时。在波音 757/767 飞机上装备, 激光陀螺的成功, 标志激光陀螺已进入实用阶段。

图 1-1-6 (a), (b) 是美国 Honeywell 公司早期的石英块激光陀螺器件。

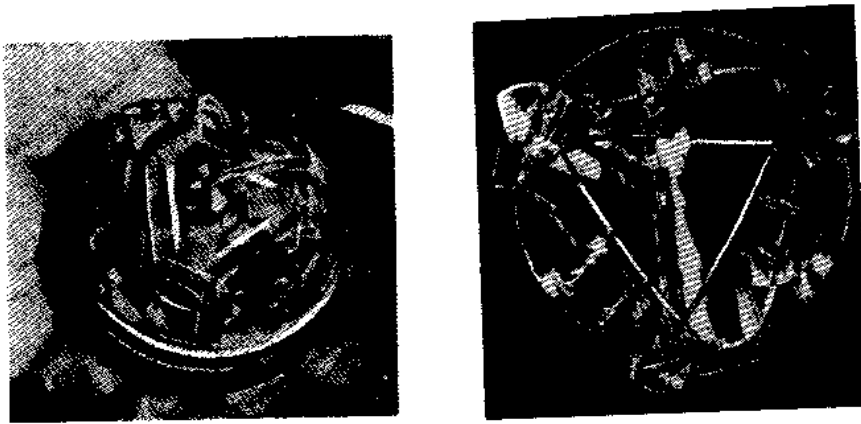


图 1-1-6 Honeywell 公司早期制作的石英块激光陀螺器件
(a) 单轴 (b) 三轴

第二章 行波激光振荡的半经典理论

—环激光自洽场方程

§ 1 行波激光电磁场波动方程

在一个环形谐振腔中，振荡着两列准独立的“反向行波模对”，这是行波激光器区别于驻波激光器（直腔）的根本特点。正由于这点，使得环激光对各种非互易效应十分敏感。例如相对于惯性空间的转动，腔内存在的气体的单向流动；各类非互易的光学效应（如法拉弟效应、克尔效应）等。又由于反向行波模对是振荡在同一个腔中，因此外界对腔体的影响在一级近似中是相互抵消的。这就使“反向行波模对”的频差信号有可能接近量子噪声极限（即激光线宽极限）的水平。从而对各种非互易效应的感测精度达到相应高的量级。由于反向行波模对是被同一个增益源所激励，因而它们之间必然通过增益源发生多种形式的相互作用。如烧孔重叠时的模竞争，频率锁频效应等。而这对于揭示光与物质相互作用的物理过程是很有帮助的。

对行波激光器的讨论，仍然用半经典的激光理论。实验表明在处理小功率激光器中它是十分有效的。在半经典的激光理论中，描述工作物质的粒子是用量子力学的方法，而描述与这种粒子相互作用的电磁场，则用经典的电磁场理论。

光的经典电磁理论的基本出发点是把光在本质上看作是一种光频电磁波场，并用概括宏观电磁现象的麦克斯韦电磁方程组作数学上的描述。为此首先写出普遍情况下的麦克斯韦方程组（高斯单位制）

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{C} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{C} \vec{j} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2-1-1) \\ (2-1-2) \\ (2-1-3) \\ (2-1-4) \end{array}$$

式中 $\vec{E}$ 为电场强度矢量， $\vec{H}$ 为磁场强度矢量， $\vec{B}$ 为磁感应强度矢量， $\vec{D}$ 为电感应强度矢量， $\vec{j}$ 为电流密度矢量， ρ 为自由电荷密度， C 为真空光速。上面描述光频电磁场的诸物理量之间还通过下列的物质方程相联系。

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_0 \\ \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \\ \vec{j} = \sigma\vec{E} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2-1-5) \\ (2-1-6) \\ (2-1-7) \end{array}$$

式中 σ 为介质的电导率， $\vec{M}$ 为介质的磁化矢量，对于下面要讨论的非磁性介质 $\vec{M} = 0$ ，

故应有 $\vec{H} = \vec{B}$, 对于各向同性均匀介质, 可以认为自由电荷密度 $\rho = 0$, 则有 $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, $\vec{P}_0$ 为介质的极化强度矢量, 它定义为介质单位体积内感应电偶极矩之和。

微分 (2-1-1) 式后, 将 (2-1-5) 和 (2-1-6) 式代入得:

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{C} (\ddot{\vec{E}} + 4\pi \ddot{\vec{P}}_0) = -\frac{4\pi}{C} \vec{j}$$

代入 (2-1-2) 式得:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{C^2} \ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{C^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{j} + \dot{\vec{P}}_0) = 0$$

利用矢量关系式: $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \approx -\nabla^2 \vec{E}$, 在这里作了 $\nabla(\nabla \cdot \vec{P}_0) = 0$ 的近似。在后面的分析中可以看到, 这项比起其它项为高次小量。代入上式后有:

$$\ddot{\vec{E}} + 4\pi\sigma\dot{\vec{E}} - C^2\nabla^2\vec{E} = -4\pi\ddot{\vec{P}}_0 \quad (2-1-8)$$

其中 $\vec{E}$ 与 $\vec{P}_0$ 是时、空坐标 $\vec{r}, t$ 的函数, 可写为如下形式:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\pi\sigma \frac{\partial}{\partial t} - C^2\nabla^2 \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = -4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}_0(\vec{r}, t) \quad (2-1-9)$$

得到的方程在形式上与经典的强迫阻尼振荡方程相似。其中左边第二项含有电导率 σ , 可类比于阻尼作用。需要说明的是, 对于一般的绝缘电介质, 其电导率 σ 本应为零。在半经典的激光理论中, 保留了这个含有 σ 的阻尼项, 唯象地用它来表征激光波场在腔内由于各种损耗所造成的衰减。在激光腔中实际存在着诸如透射、衍射、散射、吸收等因素所造成的损耗。细致地考虑这些损耗在数学上是很复杂的。Lamb 引用欧姆电流 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ 的损耗来唯象地代表多种形式的耗损对激光波场的衰减作用, 从而回避了这个困难。右端是与电极化强度矢量 $\vec{P}_0$ 有关的项, 它在波方程中相当于强迫振荡的“源”。 $\vec{P}_0$ 这个物理量在讨论光与物质的相互作用中扮演了主要的角色。可理解为腔内介质在激光电磁场作用下, 单位体积内所产生的感应电偶极矩之和。这里所谓介质指的是激光腔内, 为了产生和维持激光振荡所放入的特殊的工作物质。如 He-Ne 激光器中充入的 He, Ne 气体。它们与腔内的激光振荡之间的相互作用有非共振型的与共振型的两类。例如在 He-Ne 激光器中辅助性气体 He, 与激光之间的作用就属于非共振型的相互作用。普遍地说, 在经典电磁理论的范畴, 就是用这类相互作用来解释介质的折射率、色散、吸收以及反、折射等宏观光学现象的。而另一类发生在激活态的 Ne^* 原子与光之间的共振型的相互作用, 则是产生和维持激光振荡的关键。所以在波动方程中与 $\vec{P}_0$ 有关的这项, 又相当于激光振荡的“源”项。总之电极化矢量 $\vec{P}_0$ 项, 在环激光理论中是要着重讨论的。但是, 在深入讨论之前应了解到与 $\sigma, \vec{P}_0$ 有关的“阻尼”项和“源”项在波方程中都是微扰项。在小功率的 He-Ne 激光器中尤其如此。一般说, $\lambda = 0.63\mu\text{m}$ 的激光振荡在腔内往返一个单程后的总损耗及增益只有百分之几的数量级。这种对波动方程中诸项的物理分析, 为下面的简化和近似处理提供了依据。

当略去了这两微扰项后, 波动方程 (2-1-9) 简化为:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C^2\nabla^2 \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2-1-10)$$

这是真空中的自由波方程, 其特解为

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\Omega_0 t \mp \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad (2-1-11)$$

其中波矢的模 $|\vec{k}| = \frac{\Omega_0}{C}$

§ 2 转动环激光中电磁场波动方程

环形激光器作为陀螺，用来感测飞行体转动时所输入的转动角速度。因此我们所面临的问题是在相对于惯性空间作匀速转动的腔体中，电磁波场的运动方程。而这与前面给出的惯性系中的麦克斯韦方程组有明显的不同。这就要求我们把上面的波动方程从惯性参考系推广到以匀角速度 $\vec{\Omega}$ 转动的非惯性参考系中去。严格的方法需要用到广义相对论理论，Landau 等人已完成了这一方面的工作。

一、坐标变换与转动参考系中的波动方程

在处理转动环形激光的理论时，可以利用不太严格的方法，推出相当精确的方程组。因为在实际应用中，所涉及的转动线速度范围是远小于光速的。即 $|\vec{v}| = |\vec{\Omega} \times \vec{r}| \ll C$ 。因而只有 Ω_r 的一次项有意义。在略去高次项后，可以很方便地导出在转动参考系中，只保留一阶项 $\left(\frac{v}{C}\right)$ 的麦克斯韦方程组。为了简便，我们只把直接需要的波动方程 (2-1-9) 式作上述推广。

既然我们仅对 Ω_r 的一阶项感兴趣，这意味着时空坐标转换可以不涉及相对论效应。因而仍可用 Galilean 变换来完成从惯性系 (x, y, z, t) 到转动系 (x', y', z', t') 的变换。这样，坐标转换表达式可以写作：

$$\begin{cases} x' = x \cos \Omega_r t + z \sin \Omega_r t \\ y' = y \\ z' = -x \sin \Omega_r t + z \cos \Omega_r t \\ t' = t \end{cases} \quad (2-2-1)$$

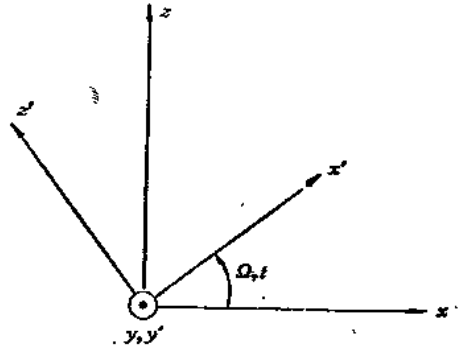


图 2-2-1 转动坐标架

利用上面的坐标变换，可以有算符矢量的变换式。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_t = \sum_j \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right)_t \frac{\partial}{\partial x'_j}$$

其中 i, j 分别取 1, 2, 3, 而 x_1, x_2, x_3 分别对应 x, y, z , 因而有：

$$\nabla^2 = \nabla'^2 \quad (2-2-2)$$

证明如下：

因

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2 \frac{\partial z'}{\partial x} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} + \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \cos \Omega_r t \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = -\sin \Omega_r t$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2 \frac{\partial x'}{\partial z} \cdot \frac{\partial z'}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} + \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial z} = \sin \Omega_r t \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = \cos \Omega_r t$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) &= \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \left[\left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \\ &\quad + 2 \left[\frac{\partial z'}{\partial x} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial z} \cdot \frac{\partial z'}{\partial z} \right] \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \end{aligned}$$

这正是 (2-2-2) 式。

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \\ &= \frac{\partial}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \nabla' \\ &= \frac{\partial}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\vec{\Omega}_r \times \vec{r}') \\ &= \frac{\partial}{\partial t'} - \nabla' \cdot (\vec{\Omega}_r \times \vec{r}') \\ &= \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla') \end{aligned} \quad (2-2-3)$$

这里 $\vec{\Omega}_r$ 是坐标架 ($x' y' z'$) (即转动的环形激光器) 相对于惯性空间 ($x y z$) 的转动角速度。于是

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2 \vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla') \frac{\partial}{\partial t'} + [\vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla')]^2 \quad (2-2-4)$$

在保留一阶 $\frac{v}{c}$ 项的近似条件下, 很容易把物理量从惯性系转换到非惯性系中去, 即

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &\Rightarrow \vec{E}'(\vec{r}', t') \\ \vec{P}_0(\vec{r}, t) &\Rightarrow \vec{P}_0'(\vec{r}', t') \end{aligned}$$

综上所述, 惯性参考系中的波动方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\pi\sigma \frac{\partial}{\partial t} - C^2 \nabla^2 \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = -4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}_0(\vec{r}, t)$$

从惯性参考系 ($x y z t$) 到转动参考系 ($x' y' z' t'$) 的变换为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 = \nabla'^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla') \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla') \frac{\partial}{\partial t'} + [\vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla')]^2 \quad (2-2-4)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{E}'(\vec{r}', t') \quad (2-2-5)$$

$$\vec{P}_0(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{P}_0'(\vec{r}', t') \quad (2-2-6)$$

$$\sigma \Rightarrow \sigma' \quad (2-2-7)$$

把以上诸项: $\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$, $\frac{\partial}{\partial t'}$, ∇'^2 , E , P_0 , σ 代入惯性参考系中的波动方程 (2-1-9) 中, 并导出匀速转动的非惯性参考系中的波动方程。

为简便起见, 可根据对激光器所作的物理上的分析, 略去高次小量, 对各项作进一步的简化。其基本依据是: P_0 , σ , v/C 都是小量。而 $E(\vec{r}, t)$ 的近似特征为 $E_0 \cos(\omega t \pm k \cdot \vec{r} + \varphi)$, 或者说是在此形式的基础上作微小的修正。这些修正恰是上述几项微扰项所带来的。但在估计数量级时, 仍可用其近似解作为依据。

1. 波动方程 (2-1-9) 中的第一项 $\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{E}$, 在用 (2-2-4) 和 (2-2-5) 代入后, 变成三项。其中 $[\vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla')]^2 \vec{E}'$ 项与 $(\frac{\partial}{\partial t'} \vec{E}')$ 项相比是高次小量, 故予以忽略。其理由如下:

对 $[\vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla')]^2 \vec{E}' / \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{E}'$ 项作数量级的估算时可写为:

$$(\Omega_r r')^2 \nabla'^2 \vec{E}' / \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{E}' \approx (\Omega_r r')^2 \left(\frac{\omega}{C} \right)^2 / \omega^2 = \left(\frac{\Omega_r r'}{C} \right)^2 \approx \left(\frac{v}{C} \right)^2$$

以最大的输入转速 $\Omega_r = 10^3 \text{ rad/s}$ 估计, 一般环形激光器的最大尺寸 $r \sim 30 \text{ cm}$, 则器件光路上最大的线速度 v 不会大于 300 cm/s 。以此估算 $\left(\frac{v}{C} \right) \sim 10^{-8}$ 。它作为一级小量, 则二级小量 $\left(\frac{v}{C} \right)^2$ 完全可以忽略。因此略去 $\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{E}$ 式中的 $[\vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla')]^2 \vec{E}'$ 项。

2. 波动方程中第二项 $4\pi\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$, 以 (2-2-3) 式代入后变成两项, 其中第二项 $4\pi\sigma' \vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla') \vec{E}'$ 与上面已讨论过的 $\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{E}'$ 项相比也是高次小量, 可以略去。这是因为:

$4\pi\sigma' \vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla') \vec{E}' / \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{E}'$ 在数量级上等于

$$(4\pi\sigma') \times \Omega_r r' \nabla' \vec{E}' / \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{E}' \approx 4\pi\sigma \Omega_r r' \frac{\omega}{C} / \omega^2 \approx \frac{4\pi\sigma}{\omega} \cdot \frac{\Omega_r r'}{C} = \frac{1}{Q_C} \left(\frac{v}{C} \right)$$

如前所述, 式中 σ 项是小量。其更明确的含义可由表征激光腔品质因数的 Q_C 值来反映。经实际估算, Q_C 值在激光器中是个很大的数 $Q_C \sim 10^8$ 。这将在第六章 §5 中讨论。因此 $\frac{1}{Q_C} \left(\frac{v}{C} \right)$ 就是高次小量, 上述项可略。

3. 对波方程中 $\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{P}_0$ 项作非惯性系的变换, 即以 (2-2-4) 和 (2-2-6) 式代入得到:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla') \frac{\partial}{\partial t'} \right] \vec{P}_0'$$

虽然 $\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{E}$ 中的第三项已略去, 但在这里的第二项 $2\vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla') \frac{\partial}{\partial t'} \vec{P}_0'$ 比起 $\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{E}'$ 仍然是高次小量。因为 $2\vec{\Omega}_r \cdot (\vec{r}' \times \nabla') \frac{\partial}{\partial t'} \vec{P}_0' / \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{E}'$ 在数量级上等于