# 初等数学研究论文选

上海教育出版社

# 初等数学研究论文选

本 社 编



上 海 教 育 出 版 社

(沪)新登字107号

**初等数学研究论文选**
本 社 编
上海教育出版社出版发行
(上海永福路123号)
各地新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 19.5 插页 4 字数 434,000
1992年10月第1版 1992年10月第1次印刷
印数 1—1,200本

ISBN 7-5320-2733-3/G·2664 定价:(软精)10.00元

# 目　录

# 公理方法的科学意义

中国科学院计算技术研究所　张锦文

数学中的公理方法,是在数学的发展史上逐步形成的,并且也是由于数学的对象、性质所决定而不得不采用的一种科学方法. 它既是一门数学发展到一定阶段时整理已有成果的一种工具, 也是探求数学中未知结果(亦即寻求新定理)的一种重要手段, 对于前者, 数学界基本上是一致的; 而对于后者,一般论及较少. 因此, 本文重点探讨后者,希引起讨论和注意.

众所周知,在古希腊时期,欧几里得在几何学的研究中系统地使用了公理方法, 从少数公理出发逻辑地推演出整个几何学. 但是,引人深思的是第五公设(亦即平行公理),它是否能从其他公理中逻辑地推演出来呢?二千多年来,不少人曾宣布给出了由其他公理逻辑地推演出第五公设的数学证明, 但是,人们又逐渐发现了这些"证明"不是逻辑上有错误,就是使用了与平行公理相等价的数学命题. 直至上世纪三十年代,俄国的罗巴切夫斯基、德国的高斯和匈牙利的亚诺士·波约才独立地发现并证明了平行公理是独立于欧氏几何学的其他公理. 这就可以相信,除了平面上过一直线外的一点恰好可以引出一直线与已知直线相平行的欧氏空间外, 尚有一条平行线也没有,或有无穷多条平行线的其他空间. 随后,实践又检验了这一新的几何学. 这样, 使数学家困惑了二千年的迷雾

终于驱散了，人们看到了真理的光芒. 非欧几何的发现，说明了公理方法不仅可以使人们逻辑地推演出公理体系内的新定理，而且突破了原来的体系和几何直观，发现了新的体系和几何直观. 这是数学史上光辉的一例.

十九世纪下半叶开始了算术的公理化研究. 皮亚诺给出了一个清晰的算术公理系统，这个系统既直观又严谨①，人们以为，一切算术定理都可以从它出发逻辑地推导出来. 但是，1931 年哥德尔证明了：如果算术系统 $P$ 是协调的②，那么就一定有一个算术命题 $A$，使得 $P$ 不能推演出 $A$，也不能推演出命题 $\neg A$（$\neg A$ 表示 $A$ 的否定，读作"非 $A$"），亦即：

$$P \nvdash A \tag{1}$$

和

$$P \nvdash \neg A. \tag{2}$$

由于哥德尔的上述结论，人们才知道并不是每一个算术命题都是算术定理或否定理，还存在着许多算术命题在 $P$ 中是不可判定的（也就是说，有许多算术命题 $A$，使得(1)与(2)同时成立）. 哥德尔定理揭示了，任一较为丰富的公理系统（在其中能够表示算术加法与乘法的公理系统）都是不完全的，还揭示了公理系统的一个更为深刻的本质：它不仅刻划人们原来熟悉的、意指的数学结构，而且也刻划了人们原来（在给出公理系统时）所不曾料想到的新的模型或非预订模型，亦即非标准模型.

第一个非标准模型是斯科伦在 1934 年给出的非标准算

---

① S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, 1952.

② 所谓 $P$ 是协调的，是指不存在一个命题 $B$，使

$$P \vdash B \quad 且 \quad P \vdash \neg B$$

同时成立，其中记号"$\vdash$"表示可以推出，下面用到的记号"$\nvdash$"则表示推不出.

术 $^*\mathbf{N}$，它是自然数集合 $\mathbf{N}$ 的一个真的扩充，$\mathbf{N}\subsetneq{}^*\mathbf{N}$，在 $^*\mathbf{N}$ 中不仅包含所有的自然数 0，1，2，…，而且还包含了无穷多个无限大自然数，并且这些无限大的自然数中没有一个最小元(亦即没有最小的无限大自然数)．这些对象如同人们熟知的算术一样，满足皮亚诺的算术公理和逻辑公理．在斯科伦这一工作之后，人们又进行了许多有趣的研究，并且已经证明了对于任意的无穷基数 $\omega_\alpha$，都至少存在 $2^{\omega_0}$ 个不同构的具有基数 $\omega_\alpha$ 的非标准算术模型①．非标准算术的研究使人们对公理系统的研究开阔了眼界．

1960 年美国数学家 A·鲁滨逊在实数公理系统和标准微积分(即柯西微积分理论)的基础上，使用数理逻辑的严谨的方法，处理了莱布尼茨的实无限小和无限大数，创立了非标准分析②．这是当代数学的一个新领域，人们不仅可以使用极限方法来论证分析数学中的问题，而且可以使用更为直观明显的无限小推理方法去论证相应的问题，还可以开辟新的研究领域．

一个更为广泛和有趣的问题是集合论．上世纪七十年代，康托尔为了解决微积分的应用中的问题和它的基础问题，创立了以研究无穷对象为中心的集合论（包括超穷序数和超穷基数理论)，并迅速地应用于数学的各个分支．但是，正在这时，集合论中出现了悖论．影响最深广的罗素悖论在 1903 年发表了，它引起了数学家的震惊，人们在问："集合论还可靠吗？""数学还可靠吗？"为了回答这一极为严肃的数学问题；同

---

① R. Rogers, Mathematical Logic an Formalized theories——A Survey of basic concepts and results, 1974, 第 119 页.

② H. J. Keisler, Elementary Calculus, 1976.

A. Robinson, Nonstandard Analysis, 1966.

时，集合论当时已有三十多年的发展史，有大量的科学成果，也出现了问题，有必要进行更为系统的整理．这样，公理方法就成为必要的了．在1908年，出现了两个著名的集合论公理系统，一个是罗素的类型论，它把集合分了层次或类型，从而避免了悖论；再一个是策墨罗的集合论系统，它是把康托尔集合论中的概括原则给以具体化，把概括原则作了精细的解剖，提出了代替它的无序对集合公理、并集合公理、幂集合公理、无穷集合存在公理和分离公理，后来又经过斯科伦、弗兰克尔等人的卓越工作，形成了今天大家所熟悉的ZF公理系统①．此外，还有冯·诺伊曼、贝尔耐斯、哥德尔、蒯茵、阿克曼等著名学者在这方面进行了卓越的工作，形成了若干不同风格的公理系统，这些系统人们虽然并未证明它们的协调性，但是已有的悖论全排除了．这样，也就保卫和发展了集合论的已有成果，并且它们也形成了集合论研究的新的强有力的工具．比如，当代数学中的著名难题——连续统假设②已经取得重大的进展，而这些进展都是在集合论的公理系统基础上取得的．我们知道，这一重要的数学命题在直观集合论中是无从着手的，但是，在公理集合论的研究中，在一定意义下这一命题已经获得了否定解决．但是，从集合论公理系统的更加合理化上看，从这一重大数学命题的科学性上来看，它仍然是一个未解决的数学问题③．

---

① H. B. Enderton, Elements of set theory, 1977.

② 所谓连续统假设，是指实数有多少的问题．也就是说，自然数集合的基数为 $\omega_0$，而比 $\omega_0$ 大的最小的基数是 $\omega_1$，已经证明实数集合的基数为 $2^{\omega_0}$，连续统假设是断定：

$$2^{\omega_0}=\omega_1.$$

③ 张锦文：《集合论与连续统假设浅说》，上海教育出版社，1980年6月版。

为了弄清连续统假设的进展，我们把连续统假设记作CH，而集合论的公理系统采用ZF系统.

1938年，哥德尔证明CH相对于ZF（包括选择公理）的协调性结果. 也就是说，如果ZF是协调的，那么ZF+CH仍然是协调的. 换句话说，如果ZF是协调的，那么

$$\mathrm{ZF} \not\vdash \neg \mathrm{CH}. \tag{3}$$

这表明通常集合论公理系统推不出$2^{\omega_0} \neq \omega_1$. 1963年美国数学家P.J.柯恩证明，如果ZF是协调的，那么

$$\mathrm{ZF} \not\vdash \mathrm{CH}, \tag{4}$$

亦即ZF推不出连续统假设CH. 综合(3)与(4)说明，CH对ZF而言是不可判定的. 通俗地讲，CH是那样的复杂、"厉害"，以至于公理系统ZF都管不住了. 这是公理集合论研究中一大进展，并且哥德尔、柯恩又创造了比他们的结果更为重要的新方法——可构成方法和力迫方法，人们使用这些方法和它们的新发展，建立了一系列重大结果. 不仅这样，而且由于对这一系列方法和问题的研究，又提出了新的更加强有力的新公理和新的公理系统.

值得指出的是关于集合概念的刻划. 我们知道，"集合"这一重要的概念，是不能够数学地定义的，只能给出一个描述性的说明. 在我国出版的第一本集合论著作——肖文灿的《集合论初步》① 中，转述了康托尔对集合的刻划："吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素. 通常用大写字母表示集合，如$A$, $B$, $C$等，用小写字母表示元素，如$a$, $b$, $c$等. 若集合$A$系由$a$, $b$, $c$, $\cdots$诸元素所组成，则表如$A=\{a,$

① 肖文灿：《集合论初步》（算学小丛书），商务印书馆，1939年5月初版，1950年12月再版。

$b, c, \cdots\}$，而 $a$ 为 $A$ 之元素，亦常有用 $a \in A$ 之记号表之者. $a$ 非 $A$ 之元素则记如 $a \notin A$.”肖文灿先生对康托尔的概念作了一个有价值的注解，他说：“上之定义中，其所用之‘相异’与‘确定’之二语，殊有说明之必要，所谓相异者取二物于此，其为同一，其为相异，可得而决定. 而集合所含之元素乃有彼此不同之意味. 所谓确定者，此物是否属于此集合，一望而知，至少其概念上可以断定其是否为该集合之元素. 盖合于某某条件之集合，须其界限分明，不容有模糊不清之弊. 如 1, 2, 3 三元素可组成一集合，单位长直线上之一切点可组成一集合，反之，如甚大之数或与 $P$ 接近之点，则不能为一集合，因其界限不清.”这段话是我国学者对康托尔集合论的一个精辟的注解. 一元素是否属于一集合决不能有“模棱两可之余地”. 这就是康托尔集合论的基本思想，但是世界在发展，人们的认识也在深化，1965 年出现的弗晰集合(Fuzzy Sets, 也有人译作模糊集合）就是美国数学家查德为解决现代科学技术中的新问题而提出的，它正是要研究“甚大数的集合”或“与 $P$ 接近之点的集合”等等，因此，人们也称之为非康托尔集合论①. 具体地说，康托尔集合论研究这样的集合 $S$，使得对于任意的对象或元素 $a$，都有：

$$a \in S \text{ 或者 } a \notin S \tag{5}$$

成立，二者必具其一. 使用 $f_s$ 表示 $S$ 的特征函数②，就是，

---

① A. Kaufmann, Introduction to the Theory of Fuzzy subsets, 1975. L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control, vol. 8, pp 338～353, 1965.

② 康托尔集合论中，一集合的特征函数的定义可以是：

$$f_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in S \text{ 时；} \\ 0, & \text{其余情况.} \end{cases}$$

这一函数的值域显然是 $\{0, 1\}$. 而弗晰集合、布尔值集合都是推广了特征函数的概念，把值域推广到一格 $G$ 上，特别地推广到一布尔代数 $B$ 上.

$$f_s(a) \in \{0,\ 1\}. \tag{6}$$

而弗晰集合 $\Omega$，用其类属函数表示就是：

$$f_s(a) \in [0,\ 1], \tag{7}$$

其中[0, 1]为实数单位闭区间．或者，令 $G$ 为任一格（特别地，$G$ 可以是某一布尔代数 $B$），那么

$$f_s(a) \in G. \tag{8}$$

这就是一种实值的、格值的或布尔值的集合论，这是一门正在朝气蓬勃发展的集合论．与此同时，1965 年在力迫方法基础上发展出一门布尔值模型方法，或称布尔值集合论．它由著名数学家索拉维和斯考特等创立，是证明集合论独立性问题的一个有力工具．这是在公理集合论研究中发展出来的，因此，斯考特称之为集合论的非标准模型①．我们对这两个领域进行统一处理②，证明了弗晰集合结构与正规弗晰集合结构是集合论公理系统的某种非标准模型，这就说明，集合论公理系统的丰富结果就为弗晰集合的发展提供了有力的工具．

关于公理方法的科学意义，这里只是考察了若干事例，指出在这些领域中公理化方法的极为重要的作用：运用公理化方法发现了一系列所谓元定理或元数学定理，这些定理是不存在机械化证明的；运用公理化方法还揭示了许多重要的新的数学模型，这些模型对数学的发展可能产生更为深远的影

① D. Scott, Boolean-valued models for Set theory. Mimeographed nones for the 1967.

American math. Soc. Symposium on axiomatic Set theory.

② Zhang Jin-wen, An Unified Treatment of Fuzzy Set Theory and Boolean-valued Set Theory: Fuzzy Set Structures and Normal Fuzzy Set Structures, To apper Journal of Mathematical Analysis and Applications.

张锦文，正规弗晰集合结构与布尔值模型，华中工学院学报，1979 年第二期．

张锦文，正规弗晰集合结构的一些基本性质，华中工学院学报，1979 年第三期．

响. 甚至,一个公理系统确定了,它本身的一些形式定理有相当一部分可以给出形式证明的,或者可以说存在着借助于计算机解决这类问题的算法,这也是有着重要意义的. 计算一类问题总是要有一定的规则,这一组规则就是一组公理. 这类问题由于人们的看法比较一致,本文也未加细述. 仅就上面所谈及的几个问题,也完全可以看出公理方法的重要意义,试问:没有几何学公理系统以及对平行公理的长期研究,如何创立新的几何学?如何建立新的空间观念和学说?如果没有算术的皮亚诺公理系统,如何证明哥德尔的不完全性定理?如何创立算术的非标准模型?如果没有实数的公理系统,没有柯西微积分的严格理论,没有谓词逻辑的紧致性定理,又如何建立非标准分析?如何建立无限小方法的严谨理论?特别地,如果没有集合论的较为完整的公理系统,如何排除直观集合论的逻辑悖论?如何建立连续统假设的相对协调性证明?如何建立连续统假设的独立性证明?甚至,连这些问题都提不出一个清晰的观念. 如果没有公理集合论中发展的一系列技巧,如何建立布尔值模型?更谈不上使用布尔值模型的技巧去发展和丰富应用极为广泛的弗晰集合论了. 这一系列问题,清楚地揭示出公理方法是不容忽视的一个重要的数学方法. 当然,我们讲公理方法的重要性时,并不意味着排斥其他数学方法的重要性. 相反地,我们认为在数学中存在着许多其他重要的方法,值得人们进行深入地研究,比如与公理方法相伴随的形式化方法,模型论方法,此外,代数方法、拓扑方法、统计方法等等都是重要的数学方法,特别是,由于计算机的出现和发展,对数学可能产生极大的影响,这些都是不容忽视的数学方法,但是,这已不是本文所要论述的问题了.

(选自《初等数学论丛》第1辑)

# 几何变换

复旦大学数学研究所　胡和生

现实生活中，我们会碰到几何图形的多种多样的变换．举例来说：在纸上画一个圆，然后把这张纸从一个地方拿到另一个地方去，这个图形就从一个位置变到了另一个位置；又如，我们将一张照片放大若干倍（或缩小到原来的若干分之一），这就把一个图形变到了另一个大小不同的图形；再如，在窗玻璃上粘一张剪好的纸花，当阳光斜照进来时，就在地面上得到一个窗花的影子，影子的图形与窗花的图形还有些不同呢

在这三个例子中，一个图形都变成了另一个图形，但变化的程度各有不同．第一个例子的变化最少，它仍然把圆变为圆，而且大小也不改变，只不过是图形的位置变化了．第二个例子中，图形的大小有了变化，但所有图形是按比例地放大或缩小，一个圆形的物体，仍然保持为圆的，只是放大或缩小了若干倍．第三个例子是把圆变为椭圆了，但还是能够把直线变为直线．

这种按照一定的方法，把一个几何图形变为另一个几何图形，就是本文所要讲的几何变换．由前面的三个例子可以看到，对于几何变换，有两点是值得注意的：

1．图形的某些性质改变了．如第一个例子中，图形的位置；第二个例子中，图形的位置和大小；第三个例子中，图形的位置和形状．

2．图形的某些性质保留下来了．第一个例子中，图形的

形状和大小都不变；第二个例子中，图形的形状不变；第三个例子中，直线会变成直线；而圆、椭圆、抛物线和双曲线等二次曲线仍变为二次曲线．

上述三例子中，第一种变换称为运动，第二种变换称为相似，第三种变换称为中心射影（它是射影变换的一个特例）．下面将分别予以讨论．

## （一）运　　动

运动是常见的一种几何变换，它是欧几里得几何学的基础．在欧几里得几何学中，大家知道，证明两个三角形全等时就用到了运动．

运动的概念来源于刚体的运动．一个刚性的物体，经过运动，物体上任意两点的距离不会变；它上面如有两条直线，则它们的交角也不会变．所以，距离和交角都是运动下的不变量．

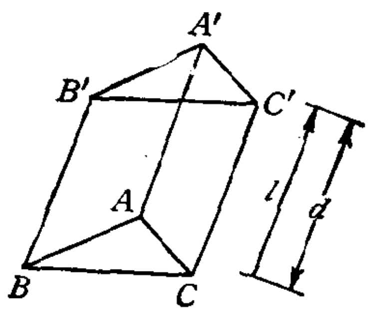

图　1

先考虑一类特殊的运动．把一个图形依照一定的方向移动同样一段距离，我们把这样的运动称为平移．平移可以用一个向量来表示，以平面上的平移来说，例如对 $A$、$B$、$C$ 三点平移一个向量 $\boldsymbol{l}$ 之后，分别得到 $A'$，$B'$，$C'$ 三点(图1)．其中 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\boldsymbol{l}$，直线段 $AB$，$BC$，$AC$ 按向量 $\boldsymbol{l}$ 平移后得到直线段 $A'B'$，$B'C'$，$A'C'$．

平面上的图形接连两次平移之后，仍然是一个平移．例如第一个平移按向量 $\boldsymbol{a}$ 进行($\boldsymbol{a}$ 称为移动向量)，把这平移记为 $L_a$，第二个平移的移动向量是 $\boldsymbol{b}$，把这平移记为 $L_b$，先进行

$L_a$ 再进行 $L_b$ 的后果记为 $L_b \circ L_a$，称为两个平移的乘积. 容易知道

$$L_b \circ L_a = L_{b+a},$$

因此也有

$$L_a \circ L_b = L_{a+b}.$$

由于 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，因此

$$L_a \circ L_b = L_b \circ L_a.$$

这表示先按向量 $\boldsymbol{a}$ 再按向量 $\boldsymbol{b}$ 平移，与先按向量 $\boldsymbol{b}$ 再按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移，所得到的结果是一致的.

再考虑另一类特殊的运动. 把平面上的一个图形绕这平面上一定点 $O$ 转动 $\alpha$ 角，我们把这样的运动称为*旋转*，记为 $R_O(\alpha)$. 其中，$O$ 称为*旋转中心*，$\alpha$ 称为*旋转角*. 容易知道

$$R_O(\alpha) \circ R_O(\beta) = R_O(\alpha+\beta) = R_O(\beta) \circ R_O(\alpha).$$

因而，绕同一点 $O$ 连续进行两个旋转所得的结果，是与旋转次序的先后无关，并且其结果也是绕 $O$ 的一个旋转.

如果采用以 $O$ 点为原点的直角坐标，则平移的表达式为

$$\begin{aligned} x' &= x + a_1, \\ y' &= y + a_2, \end{aligned} \tag{1}$$

这里 $(a_1, a_2)$ 是移动向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，$(x, y)$ 和 $(x', y')$ 分别表示变换前与变换后点的坐标.

转动 $R_O(\alpha)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

一般的运动，是平移和转动的结合：

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + a_1, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + a_2. \end{aligned} \tag{3}$$

并且，如果平面上一个运动不是平移，即 (3) 中的 $\alpha \neq 0$，那么

它一定是绕这平面上某一定点 $O'$ 的转动. 这个事实可以证明如下:

实际上, 我们只要求出一点$(x_0, y_0)$, 使在(3)下是不变的,即

$$\begin{aligned} x_0\cos\alpha-y_0\sin\alpha+a_1=x_0,\\ x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha_0+a_2=y_0. \end{aligned} \tag{4}$$

由于行列式

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha-1 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha-1 \end{vmatrix}=(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha>0,$$

(这里 $\alpha\neq0$)

所以方程组(4)必有解$(x_0, y_0)$, 此即转动中心的坐标. 利用(4)式,改写 $a_1$、$a_2$, (3)式就改记成

$$\begin{aligned} (x'-x_0)=(x-x_0)\cos\alpha-(y-y_0)\sin\alpha,\\ (y'-y_0)=(x-x_0)\sin\alpha+(y-y_0)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

这就表明, 运动(3)可以表示为以 $O'(x_0, y_0)$ 为中心的转动, 转角仍为 $\alpha$. 读者也可试用几何方法去证明上述事实.

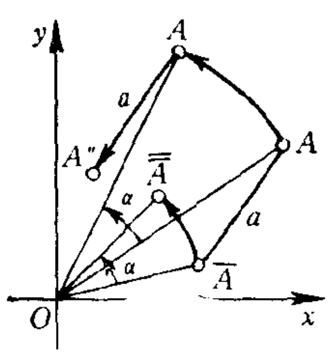

图 2

平面上平移和转动的乘积(或两个绕不同中心转动的乘积) 一般是不可交换的. 如在图 2 中, 点 $A$ 经运动 $L_a\circ R_O(\alpha)$ 得 $A''$,而 $A$ 经运动 $R_O(\alpha)\circ L_a$ 得 $\overline{\overline{A}}$, 即有

$$L_a\circ R_O(\alpha)\neq R_O(\alpha)\circ L_a. \quad (其中\ \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\ \alpha\neq0)$$

所以,在作几何变换合成时,要注意它们的次序.

至于空间图形的运动,可以和平面的情形一样地讨论,但空间图形的转动要复杂得多.