数学物理讲座

李国平
郭友中 主编

I(A)

数学物理中的若干问题

武汉大学出版社

数学物理讲座 1(A)

数学物理中的若干问题

李国平　郭友中主编

武汉大学出版社

1985.武汉

内容提要

本书是一九八三年冬，作者们在中国科学院武汉数学物理研究所举办的数学物理讨论会上报告的论文基础上整理出版的文集。内容侧重于数学物理中的非线性问题与方法的研究与讨论，并兼及有关领域中的一些最新成就的评介。每讲独立成篇，从基本方法到学科前沿以及作者们自己的工作进行系统的论述。全书除第一篇外共十二讲，可供高等院校有关专业高年级学生、研究生及这方面的数理工作者、科技工作者参考。

数学物理讲座1(A)
数学物理中的若干问题
李国平　郭友中主编
·
武汉大学出版社出版发行
江西瑞昌县印刷厂印刷
850×1168毫米 1/32 10.875印张 276千字
1985年7月第1版　1985年7月第1次印刷
印数1—2000
统一书号13279·21　　定价2.25元

出 版 说 明

《数学物理讲座》分A(Advanced)与B(Basic)两类，每讲一个专题。A类以论述数学的这一分支学科的高等部分为主，向读者介绍其中的现代概念、方法与内容，从基础到前沿进行综合评介。力求深入浅出，希望有利于青年读者得到本专题较为完整的认识，开展研究工作。B类以介绍学科的基础部分为主，并兼及学科的疆界、过去和未来以及其中代表人物的成长简史及其思想方法，藉以启迪读者的兴趣与才智。

为了满足人才培养、学科建设的需要，我们将以付印先后为序，分册连续出版，以飨读者。谬误不当之处，恳请指正。

目　录

数学理讲座(A)(1985)1—10

数学物理

李国平　郭友中

(中国科学院武汉数学物理研究所)

数学物理(*Mathematical Physics*)是数学的一个分支学科。它是数学与物理学相结合的一门边缘学科，任务是研究物理对象的数学描述，在数学与物理学中占有重要的地位。

用数学方法研究物理学(包括力学与工程技术)中的具体问题的第一步是依据专门知识领域中由观察和实验所确立的基本规律，摈弃次要属性，借助数学工具建立有关物理量之间相互制约的运动关系。这种数学关系或具体算法称为**数学模型**(*Mathematical Model*)，这是数学联系实际的关键的一步。建立数学模型的目的是运用数学方法对问题进行求解。因此，数学物理要研究数学模型的求解方法，给出未知物理量的解析表示或数值结果；要研究解的一般性质，诠释物理过程的联系与演化。最后，在对基本规律的拟合中，数学模型经受事实的检验。

由于具体问题的复杂性，决定了所需数学工具的多样性。

例如，天体运行的早期研究，先是刻卜勒(*Kepler*)对第谷(*Tycho*)的长期大量观察资料作了细致的分析研究，发现行星运行三大定律：椭圆轨道定律——行星运行的轨道是以太阳为一焦点的椭圆；等面积率定律——行星与太阳联线在相同时间内扫过的面积相等；调和定律——行运公转周期的平方等于它与太阳距

离的立方。但是，刻卜勒没有回答驱使行星绕日运行的机制是什么？牛顿（*Newton*）在刻卜勒工作的基础上提出了万有引力定律——宇宙万物之间的引力与两者的质量乘积成正比与两者的距离平方成反比。基于万有引力定律建立了行星运行的数学模型。这个模型诠释了行星运行三大定律和大海的潮汐，预报了海王星的存在和哈雷（*Hālle*）彗星的轨道周期，给出了人造卫星和宇宙飞船的复杂轨道，在低速运动的范围内精确地回答了运动的机制，反复经受了实践的检验，奠定了整个经典物理学的基础。

数学物理方程（*Equation of Mathematical Physics*）系指物理学中经常出现的数学模型，包括一定形式的一组方程和体现环境的定解条件。

物理学规律的数学形式主要是微分方程。因此，数学物理与微分方程理论关系特别密切。关于无穷小变换群下变分不变量的内忒（*Noether*）定理及其推广是一系列物理上的守恒律的数学抽象。古典质点力学研究具有有限自由度的物理系统，其中数学模型是常微分方程；古典场论研究具有无限自由度的物理系统，其中数学模型是偏微分方程；地球物理中，走时反演问题的数学模型是积分方程；中子迁移过程的数学模型是微分积分方程；而在量子力学和量子场论中，数学模型是算子方程。对于确定性系统的必然关系，数学模型是确定性的，使用的工具是经典数学；对于随机性系统的或然关系，数学模型是随机性的，使用的工具是概率统计和过程论；对于模糊系统的不分明关系，数学模型是模糊性的，使用的工具是模糊子集论和模糊逻辑等。

三类典型的数学物理方程是指：十八世纪，泰勒（*Taylor*）研究弦的横向振动提出的反映波的传播现象的波动方程；拉普拉斯（*Laplace*）潜心天体演化研究用来描述平衡状态的拉普拉斯方程；十九世纪傅立叶（*Fourier*）刻划热传导规律，反映扩散

过程的热传导方程。

它们都是物理定律的数学表示。热传导方程表示任何物体中不同位置和不同时刻的温度变化服从热力学中的傅立叶定律。特定物体表面的温度状态和开始时物体的温度分布的数学描述分别称为边界条件与初始条件，它们是确定特定物体温度变化必须知道的环境条件，简称定解条件。

根据问题的具体要求，给出足够精确的解的表示式，正是为了最后对现象作出定性和定量的各种分析，对观察和实验结果进行细致的拟合和铨释，并对过程发展作出有根据的预测和预报，进一步揭示未知的属性，得到物理量之间更深更多的内在联系以及各种相互作用的机制，这是数学联系实际完成认识运动一个循环的又一关键。

数学物理研究中首尾两步都是数学与物理学共同完成的边缘性的工作。人们对复杂的事物的认识不会是一次完成的，总是要通过多次反复，逐次逼近，才能在更高的水平上去把握它。初次建立的数学模型不一定就能给出反应实际物理问题的全部主要特征。甚至从物理上看来不成问题的物理量，作为在定解条件下数学物理方程的解就不一定存在；因此，需要研究解的存在性问题。在解存在的情况下，解的个数也可以不止一个，甚至有无穷多个；因而就有解的唯一性问题。当定解条件由于实验观测等误差引起微小变化时，问题的解产生的变化亦应在一定意义下是微小的，才能使数学物理问题的解是实际问题的良好近似，而不至于差之毫厘，失之千里；这就是稳定性问题。存在性、唯一性和稳定性简称适定性。所以，数学物理要研究适定性问题（*Well-Posed Problem*），适定性是数学模型合理性的基础。

在数学物理的研究中，问题所属的物理学、力学和工程技术本身的特殊规律。常常会在问题的适定性得到严格证明之前，提示求解问题的新的思想和方法，促使具体问题的解决。一些现代意

义下的综合课题的新的关键的数学模型的建立，有关数学物理问题的解决，同时又常成为基础数学发展的动力，并且使得这些科学技术部门迅速改变面貌，使学科提高到一个新的水平。

数学物理是和数学分析差不多同时发展起来的古老而又不断发展的数学分支。它的历史可以追溯到十七世纪牛顿奠定经典力学，创立微积分学的时候。

十九世纪数学物理的发展是和拉格朗日（*Lagrange*）、哈密顿（*Hamilton*）、欧拉（*Euler*）、傅立叶、高斯（*Gauss*）、黎曼（*Riemann*）以及其它许多数学和物理学家的名字分不开的。

二十世纪一开始，希尔伯特（*Hilbert*）提出著名的二十三个数学问题，对本世纪的数学发展产生了巨大的影响。其中第六个问题是关于物理学公理的数学处理的。庞加莱（*Poincare*）在数学和物理的许多领域中做了开拓性的工作，特别是在相对论方面，他早在1904年就提出了有关相对性的公理和思想。冯·诺伊曼（*Von Neumann*）对数学物理的贡献也是无与伦比的，他奠定了量子力学的数学基础并在计算机理论和实践上起了决定性的作用。二十世纪，数学物理蓬勃发展，在广泛的领域中取得成功，描述物理现象的数学物理方程的类型随之迅速扩大，所用的数学模型由确定性的到随机性的，由连续型的到离散型的，由线性的到非线性的，由解析表示的到图形和算法表示的，几乎穷尽了所有现代数学分支中用得上的有效的工具；使得数学物理很快成为应用数学中发展得最为成熟的分支。

中国学者在分析力学、连续介质力学、规范场论、量子场论、统计物理、等离子体物理以及大型工业民用建筑、水利水电工程、航天工业、核工业等方面也做出了较好的工作。

数学物理的范围至今尚未固定，通常指的是较多应用数学来研究的，不同程度公理化了的某些物理学分支。主要包括质点力

学、刚体力学、连续介质力学、振动与波、热力学、电磁场理论、相对论、统计力学、等离子体物理、中子迁移理论、随机过程理论以及非平衡态统计等。

数学物理中应用较多的数学工具称为**数学物理方法**（*Method of Mathematical Physics*），涉及大部分发展得比较成熟的基础数学的各个分支。通常包括矢量和张量分析、矩阵和线性代数、微分方程、积分方程、变分学与变分不等式、复变函数与特殊函数、集合论、群论、泛函分析、微分流形、纤维丛理论、数理逻辑以及摄动法、有限元法、边界元法等各种近似计算方法。

在数学物理的近代研究中经常是近代物理思想与数学抽象概念的有机结合，充分发挥数学演绎的作用。

由于自身的特点，《苏联百科全书》认为，数学物理是研究建立物理现象的数学模型的理论科学；《不列颠百科全书》认为，物理理论从它们的基础概念直到最后公式和结论，从本质上来说都是数学的，理论物理的语言就是数学。但是，理论物理学毕竟不是数学，数学只是物理学的一种表述工具和论证手段。一般认为：同样是以数学为手段的工作，当研究对象的基本规律尚待进一步揭示时，属于理论物理的范畴；而基本规律确立后的数学演绎性研究才是数学物理。

万有引力理论、电磁场理论、相对论、量子论、量子力学、量子场论、规范场论以及统一场论等都是人类智慧的结晶，科学发展的里程碑。这些伟大的发现或定律，从本质上看都是建立在不同数学模型上的精巧结论，反映人类认识物理世界各个领域的不同水平。

例如，高速运行物体的行为就不完全符合牛顿力学的结论。

1887年，迈克耳逊—莫雷（*Michelson—Morey*）实验证明了光速不变性，1922年，冯·厄缶（*Von Eotvos*）实验说明引力质

量与惯性质量成正比，1905年至1916年与上述两个实验的结论相印证，爱因斯坦（*Einstein*）以黎曼几何为工具，奇迹般地建立了高速物理普遍适用的数学模型——相对论，阐明了引力即是时空的曲率效应，预测了水星近日点的进动和光线偏折等现象，取得了划时代的成功。相对论是近代物理与数学有机结合的典范，也是数学物理认识又一个循环的光辉成就。

数学物理的成就有赖于数学理论的储备和物理本质的深入研究。爱因斯坦率先探索统一场论，就因物理观测和实验资料过少，未能如愿。统一场论遇到的巨大困难和近代物理的进展表明，相对论也不应是最终的理论，预示数学物理酝酿着认识的又一轮提高。

经典的微分几何是研究空间的局部性质的；拓扑学则着重研究空间的整体性。这两门基础数学的结合是通过整体几何实现的。它力求由空间的局部信息给出空间的全局性质。纤维丛理论是这一研究中的有力拓扑工具，六十年代发现纤维丛积分是量子场论实现由特殊相对性向一般相对性转化的原则和机制，规范场恰恰是以某种复杂的对称群为纤维的纤维丛上的连络。数学与物理又在各自独立发展的新的水平上结合起来了。沿着杨振宁和米耳斯（*Mills*）在1954年开始的规范理论的思路，物理学家格拉肖（*Glashow*）、温伯格（*Weinberg*）和萨拉姆（*Salam*）在弱电统一理论上取得了巨大的成功，荣获了1979年诺贝尔物理奖。此后各种强弱电大统一理论和包括引力在内的超统一理论相继诞生。纤维丛理论则为它们提供了非常合适的数学框架，各种统一场论成功的数学模型，为数学物理又开辟了新的领域。

在力学中也有和相对论类似的进程。1972年有人把连续介质看作是微分流形上赋予一定结构的对象，而以其切空间上的配位构形来刻划介质的变形过程；将体元定义为切空间、配位构形和变形过程集的三元体；在一定的公理系统下，对切空间引入拓扑

结构、群结构、用对偶切空间到切空间的映射来描述应力；建立连续介质力学的数学模型，充分发挥数学演绎的作用。

数学物理的另一个有力的工具是计算机。电子计算机的使用为数学物理方程的求解、数值模拟、数字仿真、模型的计算机辅助设计提供了理想的工具，加强了数学物理在工农业、国防和科学技术中的作用和地位。数学模型的建立是求解的反演，因此是数学物理中的反问题。计算机更是解决数学物理反问题，或者在一定条件下进行模型识别的有力助手。这种系统识别的方法在卫星遥测、资源勘察、图象重构及军事侦察上有重要的应用。豪司菲耳特－柯马克（*Hounsfield－Cormack*）因发明X－射线分层立体成象技术而获1979年诺贝尔医学奖，数学上关键的一步是用计算机实现反演运算。

十九世纪数学的应用大致是：在固体力学中是绝对的；在气体力学中是近似的，在流体力学中已经比较困难了；在物理学中多半是尝试性的和相对的；在化学中是最简单的一次方程式；在生物学中等于零。（恩格斯：《自然辩证法》）而且，直到本世纪的四十年代，高等数学的应用还仅限于物理学。因此，数学物理的名称反映了它所产生和发展的时代背景。物理科学经过几十年对数学的疏远，六十年代以后，情况有了很大的变化，一度对基础数学的过分强调已经过去，应用数学受到普遍的重视。

由于生产发展的结果，生产斗争的知识分成了三个层次：以认识世界为目的的叫**科学**，以改造世界为己任的是**技术**，介乎两者之间的称**技术科学**。**科学技术**是这三个层次的统称。从量变到质变是事物发展的基本规律之一，认识世界和改造世界都得通过量变来进行。因而数学应用或渗透到了科学技术的每个层次和角落，开拓了数学物理的疆界，产生了一系列新的边缘学科。这种数学化的过程无疑是有利的，按照马克思的说法：一种科学只有在成功地应用数学时，才算达到了真正完善的地步。（拉法格

《忆马克思》）可以说，没有数学就不会有近代意义下的科学技术。不仅力学、物理学和天文学中现代数学的应用在不断扩大，而且化学、生物学、地学、信息论、控制论以及土建、航空、电子、核能和化工，甚至社会科学的某些领域都用到了很深的数学。这种以整个科学技术为背景，以数学为手段，相互渗透、相互结合所产生的边缘学科称为**数理科学**（*Mathematical Sciences*）或广义数学物理。数理科学既是数学又不仅是数学，既是物理科学（对人文科学而言）又不仅是物理科学，是基础数学联系科学技术以及生产的桥梁和纽带。它根据各门具体学科的内在规律，运用现代数学的严格方法，以计算机为工具，诠释自然现象和解决复杂的生产问题，使得理论的真理性连同数学一起得到实践的检验。反过来，它又为基础数学不断提供新的内容、概念和方法。

例如，复变函数的主要基础——柯西（*Cauchy*）定理来自对水波的研究，特殊函数多半是从数学物理方程的求解中得来，而复变函数的发展又对椭圆型方程有重要的应用。狄拉克（*Dirac*）由于量子力学的需要引入的著名点源函数，从古典数学分析来看是不合理的，而又是物理学得心应手的工具；为了使之合理化，许瓦茨（*Schwartz*）建立了广义函数论。类似地在复域中有佐藤幹夫（*Mikio Sato*）的超函数论，它以同调代数为工具，它们对数学物理有深刻的影响。著名的比克霍夫（*Birkhoff*）－庞加莱不动点定律是庞加莱在研究限制三体问题中的猜想而由比克霍夫证明的。全连续算子的不动点定理及先验估计方法来源之一是莱雷（*Leray*）对非线性流体力学的研究。

因此，数理科学工作者是应用数学（包括算盘、计算尺和计算机）研究其它学科的数学工作者。数理科学工作者不但要掌握现代数学，而且还要熟悉一门科学或技术，善于在实践中发现、提出、分析和解决问题，进行纸上（或计算机上）试验，从事边缘性研究，力图用严格的数学方法得到对物理现象的深刻认识。

数理科学的疆域和成员在不断的扩大和增多。二次大战以后，出现了一系列新的工具和分支：对策论、控制论、规划论、弹性镇定理论、理性力学、计算物理学、数理地学、数理生物学、数理经济学、数理语言学、突变理论、耗散理论和协合学等等，而且非线性问题得到很大的发展。很多相隔很远的领域中的不同问题，又常常用一种数学模型。如对策论和数理经济学的一些问题可以化成广义空间中静力学的相同模型。

计算机的普及大大加速了各门学科的数学化，它不仅将科技工作者从繁杂的计算中解放出来，而且使得工程和实验的自动化、最优化成为可能，对天体与地球演化、核爆炸与战争等的模拟与仿真得以实现，缩小了数学物理与实验科学间的距离。由于对物理现象的研究不断深入，使得它的数学模型更为复杂，而且几乎都是非线性的。解的分歧现象是非线性问题的本质现象。分歧、怪引子和浑沌性是物理中湍流和相变等有序变为无序的非线性现象的数学反应，由于缺乏分析工具更加依赖于计算机试验。机器证明的成就，部分实现了人类思维的机械化，数学模型建立的机械化已经成为数学物理或数理科学的重大课题。数学物理与计算机的结合将使更多的自然与社会运动的规律得到从数量到本质的进一步认识。

随着生产和科学技术的不断发展，人们对高精度的、定量化的物理、化学、生物和社会信息的要求也越来越多，而数理科学的生命恰恰在于这种社会发展的迫切需要。