高等结构力学丛书之一

Qu Xian Liang

曲 线 梁

姚 玲 森

人民交通出版社

最后，著者为了尝试利用曲线梁计算的基本原理来解决平面多梁式曲线梁桥的内力计算问题，在第五章内介绍了按刚性横梁法和按比拟正交异性曲板法计算荷载横向分布的实用方法。

（京）新登字091号

高等结构力学丛书之一
曲　线　梁
姚玲森
责任编辑：谢仁物
人民交通出版社出版发行
（100013北京和平里东街10号）
各　地　新　华　书　店　经　销
顺义飞龙印刷厂印刷

开本：850×1168 $\frac{1}{32}$　印张：11.875　插页：2　字数：298千

1989年 8 月　第 1 版
1994年 9 月　第 1 版　第 3 次印刷
印数：5151—6650册　定价：13.90元
ISBN7-114-00373-0
U·00301

内 容 提 要

本书共分六章。第一章叙述曲线梁的一般微分方程求解；第二章和第三章分别叙述单跨简支曲线梁和固端曲线梁用杆系结构力学方法的计算原理；第四章叙述连续曲线梁的计算；最后两章介绍按刚性横梁法和比拟正交异性曲板法计算平面多梁式曲线梁桥的荷载横向分布问题。内容叙述和插图简明清晰，书中并附有大量可供实用的分析和计算图表。

本书可供桥梁工程专业研究生和高年级学生以及有关大学师生、工程技术人员使用和参考。

出 版 说 明

我社组织编写的“高等结构力学丛书”，包括（暂定名）：结构力学基础、拱结构的稳定与振动、曲线梁、结构动力学、结构随机振动、杆系结构稳定、板结构、壳结构、薄壁杆件、弹性工程力学、结构塑性分析、非线性结构分析、高层建筑结构分析、复合材料结构力学和结构优化设计等共15卷，将于1987年开始陆续出版。

参加丛书编写的教授、专家，都有较深的理论造诣和较丰富的教学或工程实践经验。丛书内容丰富，论述系统，可作为某学科的专业基础课或其他学科的选修课教材，可供有关专业的科研和工程技术人员参考使用，也可作为培养大学本科高年级学生智能的自学读物。

“高等结构力学丛书”编审委员会

序

结构力学是固体力学的一个分支。任何工程结构物的设计和建造，都会遇到结构力学问题。进入20世纪后，随着生产的发展和科学技术的进步，结构物的形式更加多样，受力体系更加复杂，这就要求有相应的理论分析方法和实用而有效的计算手段，编写高等结构力学丛书的着眼点即在于此。丛书在介绍力学的基本理论方面，重点突出了弹性理论和塑性理论。20世纪中期以后，复合材料结构和高层结构以及非线性结构的分析研究，取得了可喜的成果。随着电子计算机的广泛应用，在结构分析中普遍采用矩阵法，并进一步建立了有限元法。有了有限元法的分析方法和电子计算机的计算工具，人们便可以对工程结构物的设计由先设定结构方案，后进行综合考虑多方面的因素，以求得最优结构方案的设计，即所谓的结构优化设计。如上所述的有限元法和结构优化设计使结构力学走向计算机化，通称计算结构力学，从而开拓了新的结构力学领域。

本丛书在“结构力学基础”一卷里对杆系结构的经典理论先作概括性的论述，而后重点讲述分析杆系结构的矩阵方法和在电子计算机上实现该法的程序设计问题；在“高层建筑结构分析”一卷里也是在论述经典理论之后，主要讲述程序设计问题。经典的杆系结构和拱结构各设专卷讲述其稳定与振动；板壳结构中也都包括稳定与振动的论述。关于振动加“随机振动”，另有专卷论述。当代工程中遇到的曲线梁和薄壁杆件问题，亦有专卷论述。当代的复合材料结构和非线性结构的分析，以及结构优化设计，也都各列专卷。至于“有限元法”则另编一书以资配合。

对结构力学专业和各类结构工程专业的研究生来说，上述广泛范围内的结构力学分支有些是必修的专业基础课程，如板、壳

结构（包括稳定与振动）、结构的塑性分析和张量分析在弹性力学中的应用等课程中的一至二门；有些是不同专业的专门课程．如曲线梁、复合、高层、优化、非线性和随机振动等课程中的一门（根据研究方向所需的非力学课程不在此列）；还有些是需要开列出来由学生选修的课程。当然，反映当代力学计算方法的有限元法，包括加权残数法及其计算机程序设计也应是必修的。若采用各个分支的专著作教材，学时是不够的，适当精简内容以适应研究生学习的需要是我们编写这套丛书的第一个目的。

结构力学按专业来划分可分为：房屋结构力学、桥梁结构力学、隧道结构力学、飞机结构力学、车辆结构力学、船舶结构力学和水工结构力学等等。而这些不同专业的结构力学都有共同的基本理论。为各个专业的结构力学奠定共同的理论基础是我们编写这套丛书的第二个目的。

随着时代的推移，新的结构形式将不断涌现。工程师们为创造新的结构形式，往往需要广泛的结构力学知识，熟悉新结构的受力图式和掌握分析方法。为工程技术人员提供参考资料是我们编写这套丛书的第三个目的。

当今大学本科的结构力学教材所涉及的范围仅仅局限于杆系结构，有些内容需要提炼和概括以便增加课外阅读学时数；同时也有些内容（如稳定与振动）则需要抽出来单独设课。这是当前结构力学内容改革的趋向。丛书对杆系结构中的基本内容作了提炼和概括的尝试，以供学生参考；对于专题的内容则抽出来单独编辑成册，虽内容较深，但可供教师因材施教，培养拔尖学生之用。

既要传授知识，也要培养智能，这是当今高等学校的教学工作中应该大力提倡的。培养学生自学能力是培养智能的一个重要方面。我们安排学生自学，除必须给学生有足够的课外学时数外，最根本的一条就是要调动学生自学的主动性和积极性。为了做到这一点，除教师的引导和启发外．还必须恰当地提供自学的内容。根据本人三十年代学习结构力学时的经验，我认为最好是

超越本科教材的范围，提供广泛的结构力学分支学科，让学生去涉猎，使学生学后而知不足，这样学生就会在教师的诱导和鼓舞下，更加自觉地去挤时间钻研较高深理论的积极性，并写出有一定水平的论文来，因此，我们编写的这套丛书亦可供培养学生自学能力之用。

如上提出的三个目的和两个作用，是我们的主观愿望，目的是否能达到，作用是否有成效，有待于今后的长期教学实践来检验。

本丛书中各个结构力学分支将单独成册，初步安排陆续出版15卷，将来再根据结构力学的新进展进行扩编。

由于工作需要，脱稿时间仓促，更重要的是限于水平，缺点和错误在所难免，望海内外同行专家不吝赐教，批评指正。

王朝伟

1986年1月

前　言

在现代结构工程中，已遇到大量不同形式的曲线形结构，除了在建筑中常见的圆形阳台、剧院楼厅、悬楼、凸窗以及其他圆形建筑物上所用的曲线梁以外，近20年来陆路交通事业的发展，曲线梁也已广泛应用于城市和公路桥梁结构领域。在工业发达国家的城市内，多层立交交通和高架道路上曲线桥梁的应用已日益增多。近几年来，为了节省能源和减少污染，不少国家已对规划和建设快速的公共交通系统给予重视。可以预计到，在今后十年内世界上将建成上万公里的各种定向线路结构来协同解决城市的运输问题。这就需要建造大量的曲线梁结构。

与直线梁相比较，由于曲线梁曲率的影响，导致曲线梁产生弯扭耦合作用，使得这种结构的内力和变形计算趋于复杂。著者在本书中通过较详细的分析和推演，较系统地给出了不同体系曲线梁在各种典型荷载作用下的内力和变形的计算公式。为了清楚了解曲线梁的力学特性以及便于实际应用，书中还展示相当数量的分析曲线并附有计算辅助用表。

对于连续曲线梁的计算，虽然著者在本书中只阐明了所有支点均为抗扭固定的支承情况，然而对于求解具有无抗扭约束的中间点铰支座的情况，原则上也不会有困难。其方法是：或者将作用在支点处的扭矩作为补加的扭矩荷载来处理（释放抗扭约束），或者将中间点铰支承作为在简支曲线梁上按该点挠度为零的条件所得的集中荷载来处理。

书中还绘制了一些不同曲线中心角的各种内力分布图或内力影响线，借此可以判断曲线中心角，即曲率大小对内力的影响程度（与展直的直线梁相比较）。

目　　录

第一章　曲线梁的一般微分方程求解

第一节　曲线梁的平衡方程

与直线梁所采用的方法一样，可从曲线梁上截割一个微段来研究曲线梁的一般特性。

对于截面具有双对称轴的构件，采用由梁轴切线方向的 z 轴，曲线向心方向的 x 轴和垂直于曲线平面并向下方向的 y 轴所组成的三维直角流动坐标系，如图1-1a)所示。对于一般的截面形式，以截面扭转中心轴线的切线方向作为纵向坐标轴 z 比较方便。

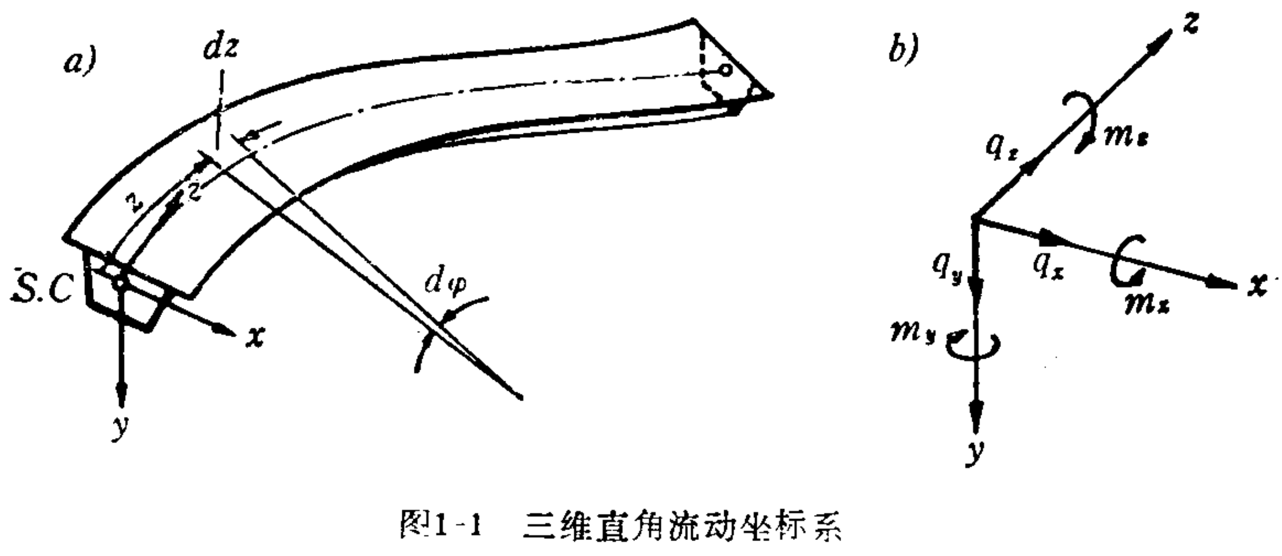

图1-1　三维直角流动坐标系

梁的微段上可能有 6 种类型荷载的作用，即三个沿坐标轴方向作用的分布荷载 q_x、q_y 和 q_z 以及三个绕坐标轴作用的分布扭矩 m_x、m_y 和 m_z，如图1-1b)所示。在上述荷载作用下，在微段起始端的截面内力为轴力 N、扭矩 T、剪力 Q_x 和 Q_y 以及弯矩 M_x 和 M_y，经过微分长度 d_z，在微段末端截面上产生相应的微分增

量，如图1-2a)和b)所示。

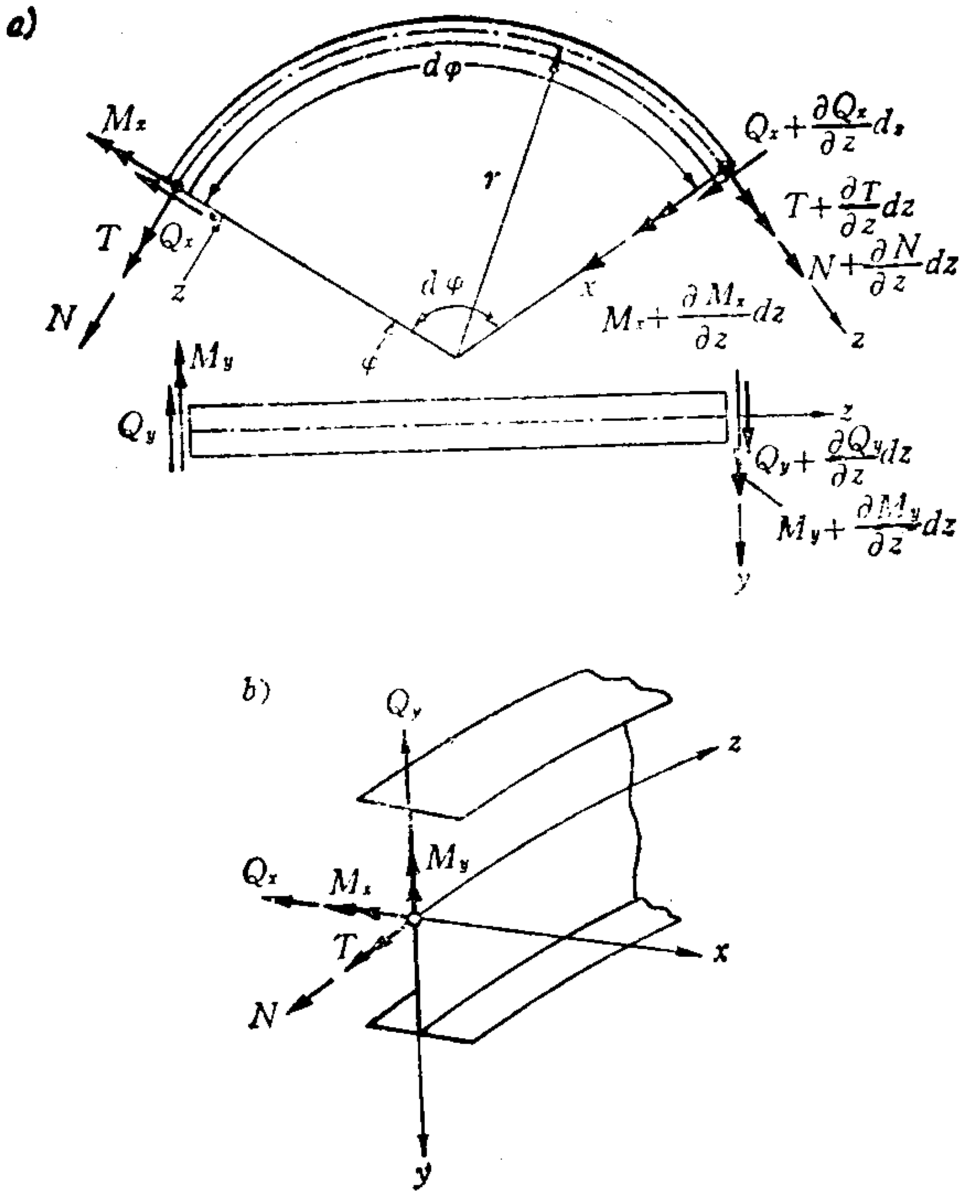

图1-2　曲线梁微段的截面内力

利用使空间力系维持平衡的 6 个平衡条件，就能得到含有这 6 个未知内力的 6 个方程。

图1-3示出分布荷载 q_x、q_y 和 q_z 作用下曲线梁微段的平衡图式。

由$\Sigma F_x=0$：

$$-Q_x\cos\frac{d\varphi}{2}-N\sin\frac{d\varphi}{2}+\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial z}dz\right)\cos\frac{d\varphi}{2}+\left(N+\frac{\partial N}{\partial z}dz\right)\sin\frac{d\varphi}{2}+q_x dz=0$$

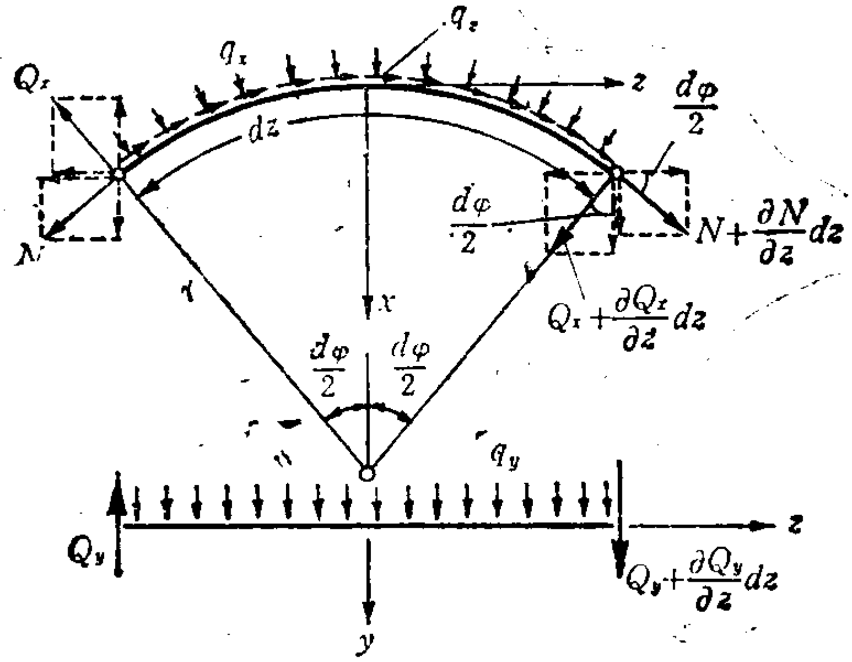

图1-3　力的平衡

式中取 $\cos\frac{d\varphi}{2}\approx 1$，$\sin\frac{d\varphi}{2}\approx\frac{d\varphi}{2}$，并注意到$dz = r d\varphi$和略去高阶微量，则得：

$$\frac{\partial Q_x}{\partial z} + \frac{N}{r} + q_x = 0 \tag{1-1}$$

由$\Sigma F_y = 0$：

$$-Q_y + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial z} dz \right) + q_y dz = 0$$

则得：

$$\frac{\partial Q_y}{\partial z} + q_y = 0 \tag{1-2}$$

由$\Sigma F_z = 0$：

$$-Q_x \sin\frac{d\varphi}{2} - N\cos\frac{d\varphi}{2} - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial z} dz \right) \sin\frac{d\varphi}{2}$$

$$+\left(N + \frac{\partial N}{\partial z} dz \right) \cos\frac{d\varphi}{2} + q_z dz = 0$$

同理可得：

$$\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{Q_x}{r}+q_z=0 \tag{1-3}$$

图1-4示出在分布扭矩 m_x、m_y、m_z 等作用下绕各坐标轴的力矩平衡图式。

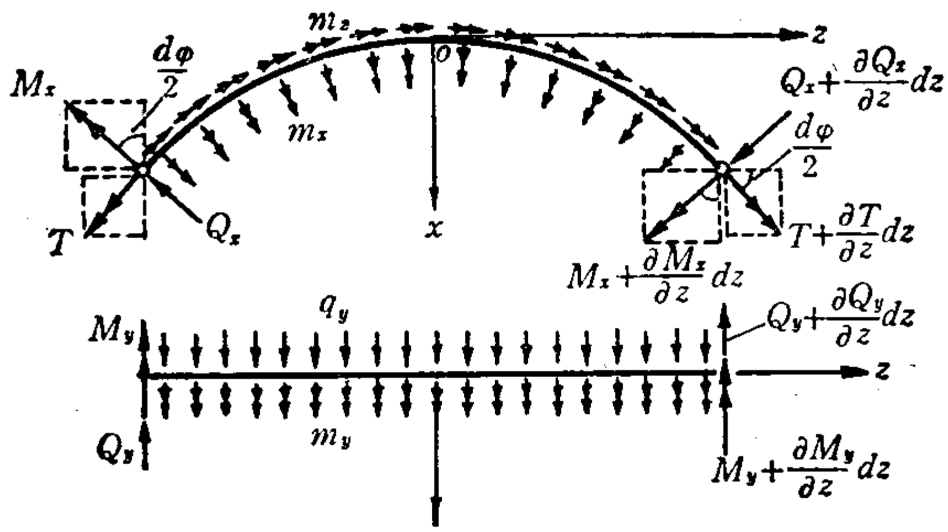

图1-4 力矩的平衡

由$\Sigma M_x=0$：

$$-M_x\cos\frac{d\varphi}{2}+T\sin\frac{d\varphi}{2}+\left(M_x+\frac{\partial M_x}{\partial z}dz\right)\cos\frac{d\varphi}{2}$$

$$+\left(T+\frac{\partial T}{\partial z}dz\right)\sin\frac{d\varphi}{2}-Q_y dz+m_x dz=0$$

同样取 $\cos\frac{d\varphi}{2}\approx 1$，$\sin\frac{d\varphi}{2}\approx\frac{d\varphi}{2}$，并注意到$dz=rd\varphi$和略去高阶项，则得：

$$\frac{\partial M_x}{\partial z}+\frac{T}{r}-Q_y+m_x=0 \tag{1-4}$$

由 $\Sigma M_y=0$：

$$
\begin{aligned}
& -M_y+\left(M_y+\frac{\partial M_y}{\partial z}dz\right)+m_y dz+Q_x\cos\frac{d\varphi}{2} \\
& \cdot r\sin\frac{d\varphi}{2}+Q_x\sin\frac{d\varphi}{2}\left(r-r\cos\frac{d\varphi}{2}\right) \\
& +\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial z}dz\right)\cos\frac{d\varphi}{2}\cdot r\sin\frac{d\varphi}{2} \\
& +\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial z}dz\right)\sin\frac{d\varphi}{2}\left(r-r\cos\frac{d\varphi}{2}\right) \\
& =0
\end{aligned}
$$

同理可得：

$$
\frac{\partial M_y}{\partial z}+Q_x+m_y=0 \tag{1-5}
$$

由 $\Sigma M_z=0$：

$$
\begin{aligned}
& -M_x\sin\frac{d\varphi}{2}-T\cos\frac{d\varphi}{2}+m_z\cdot 2r\sin\frac{d\varphi}{2} \\
& -\left(M_x+\frac{\partial M_x}{\partial z}dz\right)\sin\frac{d\varphi}{2} \\
& +\left(T+\frac{\partial T}{\partial z}dz\right)\cos\frac{d\varphi}{2}-Q_y\left(r-r\cos\frac{d\varphi}{2}\right) \\
& +\left(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial z}dz\right)\left(r-r\cos\frac{d\varphi}{2}\right) \\
& +q_y r d\varphi\left(r-\frac{2r\sin\frac{d\varphi}{2}}{d\varphi}\right)=0
\end{aligned}
$$

式中$\left(r-\dfrac{2r\sin\frac{d\varphi}{2}}{d\varphi}\right)$为 q_y 的合力离 z 轴的距离，经化简后即得：

$$\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{M_x}{r}+m_z=0 \tag{1-6}$$

以上6个方程中，如果使曲率半径r趋于无穷大，并设$m_x=m_y=0$，就得：

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{\partial Q_x}{\partial z}=-q_x & \dfrac{\partial Q_y}{\partial z}=-q_y & \dfrac{\partial N}{\partial z}=-q_z \\ \dfrac{\partial M_x}{\partial z}=Q_y & \dfrac{\partial M_y}{\partial z}=-Q_x & \dfrac{\partial T}{\partial z}=-m_z\end{array}\right\}$$

这就是初等材料力学中熟知的直梁的基本平衡方程。

如果将式(1-1)和式(1-5)对z分别求一次和二次偏导数后使两式相减，则可得：

$$\frac{\partial^3 M_y}{\partial z^3}+\frac{\partial^2 m_y}{\partial z^2}-\frac{\partial N}{\partial z}\cdot\frac{1}{r}-\frac{\partial q_x}{\partial z}=0 \tag{a}$$

再从式(1-3)与式(1-5)中消去Q_x，则得：

$$\frac{\partial N}{\partial z}=-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial M_y}{\partial z}+m_y\right)-q_z \tag{b}$$

进而将式(b)代入式(a)，则得消除了剪力项Q_x和轴力项N的方程：

$$\frac{\partial^3 M_y}{\partial z^3}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial M_y}{\partial z}=\frac{\partial q_x}{\partial z}-\frac{q_z}{r}-\frac{\partial^2 m_y}{\partial z^2}-\frac{m_y}{r^2} \tag{1-7}$$

如将式(1-4)对z求导后与式(1-2)合并，则得：

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial z}=-q_y-\frac{\partial m_x}{\partial z} \tag{1-8}$$

这样，式(1-1)～式(1-6)就简化成不包含Q_x、Q_y和N的三个基本方程式(1-6)、(1-7)和(1-8)。