计算方法丛书

双曲型守恒律方程及其差分方法

应隆安　滕振寰　著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了解双曲型守恒律方程的理论及方法.介绍了古典解、弱解、分片光滑解,以及典型的差分格式,其中包括单调格式和 TVD 格式.对于上述内容,本书均作了严格而又详细的讨论,突出了它们的特点及重要性质.

本书读者对象为高校数学系和有关专业师生,以及计算数学工作者.

计算方法丛书

双曲型守恒律方程

及其差分方法

应隆安 滕振寰 著

责任编辑 林 鹏

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年11月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1991年11月第一次印刷　　印张：6 1/2

印数：0001—1 600　　字数：165 000

ISBN 7-03-002368-4/O・441

定价： 6.60 元

前　　言

从 1981 年开始，我们陆续为北京大学数学系的研究生和高年级学生开设了两门互相关联的课程：“双曲型偏微分方程”和“拟线性双曲型方程差分方法”，前者的着重点在方程的特点与解的性质，后者则在差分方法的理论．两门课合计用一学年的时间，每周三学时，已经讲了五遍．这两门课还曾为应用物理与计算数学研究所的研究生讲授过．本书就是在我们的讲稿的基础上整理而成的，其中第一章至第四章由应隆安执笔，第五章由滕振寰执笔．

双曲型方程反映了自然界的波动现象，它的应用十分广泛，而且理论成果也十分丰富．大体上说来，线性方程的理论已经有完整的系统，而在非线性方程中，发展最为迅速的是拟线性方程的间断解理论．解的间断性深刻地反映了非线性方程的本质特点，同时在自然界中各种物理量的间断面的传播是一普遍现象，因此这一研究受到了学术界的极大关注．此外，非线性方程的整体光滑解、破裂问题以及奇性传播等理论也引起了越来越大的兴趣．本书的重点在间断解，主要讨论守恒律方程．作为基础知识，我们也涉及了线性方程及古典解．

对于守恒律方程，现在已经有了很多行之有效的差分格式．深刻地理解这些差分格式有赖于深入地了解间断解的性质．现在有关差分方法的书籍已经很多，但是我们还没有见到把方程理论与差分方法理论结合起来的书籍．在本书中，我们作了这一尝试，希望它对读者学习与发展双曲型方程的差分方法能有所裨益．

在偏微分方程中，双曲型方程的研究方法有着与众不同的特点．一些对于椭圆型方程与抛物型方程非常强有力的工具，在双曲型方程面前显得无能为力．依我们粗浅的看法，虽然与双曲型方程有关的分析工具已建立了一些，但是还远远不够．到目前为止，

方程的理论及计算方法的理论虽有了很大发展，但都还不完整.关于它们的研究是数学及计算数学中的一个热点，理论研究进展非常迅速.本书的目的是帮助读者在此领域中打下一个扎实的基础，成为进一步学习与研究的起点，因此我们把侧重点放在基本理论与基本概念上，特别注意概念叙述上的确切性与数学逻辑的严密性. 本书中的理论结果大都可以在参考文献中找到，但是我们对这些材料作了比较仔细的加工. 所有的证明都用尽可能简洁的方式给出. 与原始文献相比较，有一些证明简化了，有一些证明方法是新的，也更系统了一些. 这些改进是我们在教学过程中与同学们反复切磋的结果. 借此机会，我们向每一位听过这两门课程的同志表示衷心的感谢.

阅读本书，读者需要具备偏微分方程、实分析与泛函分析以及差分方法的基本知识. 考虑到有些知识读者不一定具备，例如 *BV* 空间理论，我们在本书中对它们作了简要介绍. 我们的介绍仅限于与内容有关的部分，决不是这些理论本身的全面阐述.

以上是我们写作本书的宗旨，欢迎读者对本书提出批评指正.

作者

1989 年于北京大学

《计算方法丛书》编委会

目　　录

第一章 绪　论

§1 一阶双曲型方程

我们将考察如下的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{k}A_i(u,x_1,\cdots,x_k,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$
$$=g(u,x_1,\cdots,x_k,t),\tag{1.1.1}$$

其中 u 为未知向量函数，$u=(u_1,\cdots,u_n)^T$，T表示转置，g 为已知向量函数，$g=(g_1,\cdots,g_n)^T$，A_i 为已知矩阵函数（$i=1,\cdots,k$）:

$$A_i=\begin{pmatrix}a_{11}^{(i)} & \cdots & a_{1n}^{(i)}\\ & \cdots & \\ a_{n1}^{(i)} & \cdots & a_{nn}^{(i)}\end{pmatrix}.$$

在物理意义下，x_i 与 t 分别称为空间与时间变量. 当 $n=1$ 时，(1.1.1) 称为方程式，当 $n>1$ 时，它称为方程组.

定义 1.1 若在变量 $(u,x_1,\cdots,x_k,t)$ 的变化范围内，对于任意的单位向量 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_k)$，矩阵 $\sum_{i=1}^{k}A_i\omega_i$ 都有 n 个实特征值，则 (1.1.1) 就称为双曲型方程.

因为我们仅限于考察实函数，所以当 $n=1$ 时，(1.1.1) 永远是双曲型的. 当空间变量只有一个，即 $k=1$ 时，(1.1.1) 可以记作

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(u,x,t)\frac{\partial u}{\partial x}=g(u,x,t).$$

这时定义 1.1 要求 A 的特征值都是实的. 我们以后将主要考察一

个空间变量的情形.

定义 1.2 对于双曲型方程(1.1.1),若对任意的单位向量 ω, 矩阵 $\sum_{i=1}^{k} A_i\omega_i$ 都有 n 个不同的实特征值,则它就称为严格双曲型方程.

我们以后将主要考察严格双曲型方程, 它的理论问题有很多独特之处,在下一节我们还将举一些实例,它们部分地反映了这一类方程的广泛的应用.

§2 例

例 2.1 交通问题

我们考察公路上的车辆流动,为简单起见, 限于讨论单行线. 我们的基本假设是: 车辆之间的距离与公路的长度相比很小, 这样就可以将车流看成连续体.

以 $u(x, t)$ 表示密度, 单位是: 辆/长度;以 $f(x, t)$ 表示在 x 点的流量,单位是: 辆/时间.

在公路上任取 a, b 两点(图 1), 则有

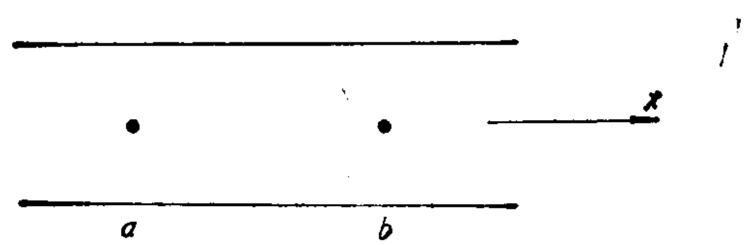

图 1

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = f(a, t) - f(b, t),$$

即

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = -\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\, dx.$$

但是 a, b 是任取的,因此有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0. \tag{1.2.1}$$

事实上，f 依赖于 u，它可以写作 $f(u(x,t))$。图 2 表示了此函数关系。当密度 u 很小时，f 近似正比于 u，但是当密度 u 很大时，密度越大，流量反而越小，当密度 $u=u_j$ 时，交通完全阻塞。

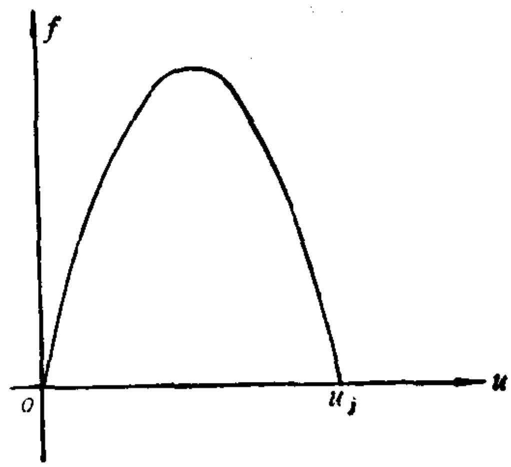

图 2

将图 2 中所示的曲线近似地用解析表达式

$$f=vu\left(1-\frac{u}{u_j}\right)$$

给出，其中 v 是当车辆稀少时的平均速度。若引进变换

$$u_1=u-\frac{1}{2}u_j,\qquad \xi=-\frac{u_j}{2v}x,$$

则得

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial(u_1^2/2)}{\partial\xi}=0,$$

或

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial\xi}=0.$$

它是拟线性双曲型方程的典型例子，常称为 Hopf 方程，又称为“无粘性的” Burgers 方程。

显然，(1.2.1) 是严格双曲型方程。

例 2.2 弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=g(x,t), \tag{1.2.2}$$

其中 $a^2>0$. (1.2.2) 是二阶双曲型方程，但是可以通过变量替换化为 (1.1.1)。令 $p=\frac{\partial u}{\partial x}$，$q=\frac{\partial u}{\partial t}$，则有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial x}=0, \\
&\frac{\partial q}{\partial t}-a^2\frac{\partial p}{\partial x}=g(x,t).
\end{aligned}
\tag{1.2.3}
$$

用(1.1.1)中的记号

$$
A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix},
$$

它的特征值为 $\lambda_1=-a$, $\lambda_2=+a$. 因此,(1.2.3)是严格双曲型方程组.

例 2.3 一维不定常流

在光滑、均匀细管中充以气体,考虑一维流动,则方程组可推导如下:

1. 连续性方程

在图 1 中,设细管截面积为 S,截面 $a(t)$, $b(t)$ 随流体质点一齐运动,则由质量守恒定律

$$
\frac{d}{dt}S\int_{a(t)}^{b(t)}\rho dx=0,
$$

即

$$
\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial \rho}{\partial t}dx+\rho(b(t),t)b'(t)-\rho(a(t),t)a'(t)=0,
$$

其中 ρ 为密度. u 表示速度,则有

$$
b'(t)=u(b(t),t), \qquad a'(t)=u(a(t),t).
$$

因此

$$
\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx+\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\,dx=0.
$$

在时刻 t, $b(t)$, $a(t)$ 都是任意的,于是得到

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0. \tag{1.2.4}
$$

2. 运动方程

设 p 为压力，则由动量守恒定律

$$(p(a(t),t)-p(b(t),t))S=\frac{d}{dt}\left(S\int_{a(t)}^{b(t)}\rho u dx\right),$$

象推导 (1.2.4) 一样，可得

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}=0. \tag{1.2.5}$$

3. 能量方程

设 E 为单位质量气体所含的能量，则由能量守恒定律

$$(p(a(t),t)a'(t)-p(b(t),t)b'(t))S$$
$$=\frac{d}{dt}\left(S\int_{a(t)}^{b(t)}\rho E dx\right),$$

同理可得

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uE+pu)}{\partial x}=0. \tag{1.2.6}$$

在方程 (1.2.4)—(1.2.6) 中共含有四个未知量：ρ，u，p，E，但是只有三个方程，还需要补充一个方程．记

$$E=\frac{1}{2}u^2+e,$$

其中方程右边第一项为功能，第二项为内能．对于不同气体，可以有不同的状态方程 $e=e(\rho,p)$．对于理想气体

$$e(\rho,p)=\frac{p}{\rho(\gamma-1)}=\frac{T}{\gamma-1},$$

其中 T 为绝对温度，γ 为绝热指数．对于空气，$\gamma=1.4$．

p，ρ，e，T 都是热力学参数，其中有两个是独立的．还可以引进另一个热力学参数：熵，记作 s，定义为

$$Tds=de-\frac{p}{\rho^2}d\rho.$$

对于理想气体,可以计算得

$$\exp(s)=p\rho^{-\gamma}.$$

经简单的运算,方程组(1.2.4)—(1.2.6)可以写成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial s}{\partial t}+u\dfrac{\partial s}{\partial x}=0.\end{cases}\tag{1.2.7}$$

不难验证它是严格双曲型的.

在下面两个特殊情形中,可以只考虑方程(1.2.4),(1.2.5):

1. 等温情形

这时 $p=RT\rho$,RT 是常数。

2. 等熵情形

这时 $p\rho^{-\gamma}$ 为常数.

这两种情形都可以记为

$$p=C\rho^{\alpha},\qquad \alpha\geqslant 1,\tag{1.2.8}$$

其中 C,α 都是常数.不难验证(1.2.4),(1.2.5),(1.2.8)是严格双曲型方程组.

空间坐标 x 称为 Euler 坐标系,它不随流体运动而保持固定。

例 2.4 在 Lagrange 坐标系下的一维不定常流

设 $\rho>0$,引进跟随流体质点运动的坐标变量.令

$$\tau=t,\ \xi=\int_{(0,0)}^{(x,t)}\rho dx-\rho u dt.$$

由方程(1.2.4)知,以上曲线积分与积分路径无关.令 $v=1/\rho$,它称为比容,则可得方程组

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}-\frac{\partial u}{\partial\xi}=0,\tag{1.2.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{\partial p}{\partial\xi}=0,\tag{1.2.10}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = 0. \tag{1.2.11}$$

对于例 2.3 中两个特殊情形,只需考虑由方程(1.2.9),(1.2.10)构成的方程组,其中 $p = p(v)$, 上述方程组常称为 p 方程组.

例 2.5 浅水方程

在水平河道中,设河水深度和河床宽度与河流长度相比很小,在与水流方向垂直的截面上,流速可以认为是均匀的,则可以用一维浅水方程描述.

以 p 表示压力,它近似地等于静水压力, 设水深为 h, 则沿铅直方向压力的分布为

$$p = \rho g(h - z),$$

其中 ρ 为密度, g 为重力加速度, z 为铅直方向的坐标. 设河床宽度为 S, 则作用于截面上的压力合力为

$$\int_0^h \rho g S(h - z)dz = \frac{1}{2}\rho g S h^2.$$

与例 2.3 类似,可以导出连续性方程与动量方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial (hu)}{\partial t} + \frac{\partial \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} = 0.$$

它就是方程组 (1.2.4), (1.2.5), (1.2.8), 这时 $C = \frac{1}{2}g$, $\alpha = 2$. 也可以引进 Lagrange 坐标系.

例 2.6 非线性振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = 0,$$

其中 σ 为非线性函数,令 $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial t}$, 得

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}-\frac{\partial \sigma(p)}{\partial x}=0.$$

此即 p 方程组。

例 2.7 燃烧方程

设有两种气体：未燃气体与已燃气体。在气体流动的过程中还发生燃烧反应。以 z 记未燃气体的质量百分比，则 $0 \leqslant z \leqslant 1$. 由于多了一个未知变量，方程组 (1.2.4)—(1.2.6) 中还需补充一个方程式。考虑未燃气体质量的守恒律，得

$$\frac{\partial(\rho z)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u z)}{\partial x}=-K\phi(T)\rho z, \tag{1.2.12}$$

其中右端表示燃烧速率，它与 ρz 成正比，是温度 T 的增函数，K 为常数。

内能的表达式也有一些变化：

$$e=ze_0+(1-z)e_1,$$

其中 e_0 为未燃气体的内能，e_1 为已燃气体的内能，对于理想气体

$$e_0=\frac{T-T_0}{\gamma-1}+q_0, \quad e_1=\frac{T-T_0}{\gamma-1},$$

其中 T_0 为燃点，q_0 为燃烧时释放的化学能，称为束缚能。

§3 弱解的定义

若向量函数 u 及其一阶微商在某一区域内连续，且满足方程 (1.1.1)，则称 u 为方程 (1.1.1) 的古典解。但是，无论从实用的观点还是从理论的观点，方程 (1.1.1) 的间断解更为重要。下面将逐步给出间断解的定义。

定义 3.1 若方程组 (1.1.1) 可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f_i(u, x_1, \cdots, x_k, t)}{\partial x_i}=g(u, x_1, \cdots, x_k, t), \tag{1.3.1}$$

则称它为满足守恒律。若 $g=0$，则此守恒律是齐次的。

方程组 (1.3.1) 总可以写成 (1.1.1) 的形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}=g-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

其中 $\frac{\partial f_i}{\partial u}$ 为 Jacobi 矩阵,反之不然.

从 § 2 可以看出，从物理上的守恒律导出的方程都符合定义 3.1. 但是在作了一些数学上的推演以后，就不一定了，例如方程组(1.2.7).

以后,我们总假定函数 A_i, f_i, g 等都充分光滑. 从实用的观点,这一要求总是可以满足的.

定义 3.2 若有界可测函数 $u(x,t)$ 使得方程 (1.3.1) 在广义函数意义下成立,则称 $u(x,t)$ 为 (1.3.1) 的一个弱解.

在 § 2 中推导各方程时，我们总假定未知函数是连续可微的. 因此,有必要按定义 3.2 检验当未知函数是间断函数时，它们是否还满足相应的方程.

回答是肯定的,我们试看例 2.1.

任取两个时刻 $t_1<t_2$. 从车辆个数守恒可给出如下的积分关系式:

$$\int_a^b u(x,t_2)dx-\int_a^b u(x,t_1)dx$$
$$=\int_{t_1}^{t_2} f(a,t)dt-\int_{t_1}^{t_2} f(b,t)dt. \tag{1.3.2}$$

对于 (x,t) 平面上的区域 Ω, 以 $C_0^\infty(\Omega)$ 记 Ω 上无穷次可微且有紧支集的函数的集合. 任取 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, 则由 (1.3.2),对于充分小的 $\Delta x>0$, $\Delta t>0$, 有

$$0=\frac{1}{\Delta x\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_x^{x+\Delta x}(u(\xi,t)-u(\xi,t+\Delta t))d\xi\right.$$
$$\left.+\int_t^{t+\Delta t}(f(x,\tau)-f(x+\Delta x,\tau))d\tau\right\}\varphi(x,t)dxdt$$
$$=\frac{1}{\Delta x\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_x^{x+\Delta x}u(\xi,t)(\varphi(x,t)-\varphi(x,t-\Delta t))d\xi\right.$$

$$+\int_t^{t+\Delta t} f(x,\tau)(\varphi(x,t)-\varphi(x-\Delta x,t))d\tau\Big\}dxdt.$$

交换积分次序得

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi,t)d\xi\,\frac{1}{\Delta x}$$

$$\cdot\int_{\xi-\Delta x}^{\xi}\frac{\varphi(x,t)-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta t}dx$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\tau)d\tau\,\frac{1}{\Delta t}$$

$$\cdot\int_{t-\Delta t}^{\tau}\frac{\varphi(x,t)-\varphi(x-\Delta x,t)}{\Delta x}dt.$$

令 $\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi,t)\frac{\partial\varphi(\xi,t)}{\partial t}d\xi\,dt$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\tau)\frac{\partial\varphi(x,\tau)}{\partial x}dxd\tau=0,$$

即

$$\iint_\Omega\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdt=0,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).\quad(1.3.3)$$

但是 (1.3.3) 在广义函数意义下等价于方程 (1.2.1)。于是，对于例 2.1，当 u 是有界可测函数时，它也满足方程 (1.2.1)。

上述推导过程具有一般性。事实上，可以将 u 理解为任一物理量，f 为它的流量。

附注 3.1 对于古典解，方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(u^2/2)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(u^2/2)}{\partial t}+\frac{\partial(u^3/3)}{\partial x}=0$$

是等价的。但按定义 3.2，它们并不等价。有界可测函数 u 满足其中一个方程时并不一定满足另一个。这一点在后面的熵函数定义中更为明显。

涉及双曲型方程的专著及综合性评述有 [5,6,22,38,45,58,69,70,76] 等。