

拱桥挠度理论

Gongqiao Naodu Lilun

贺栓海 著

人民交通出版社

制方程和约束方程;第三章结合已有文献介绍竖向变形对内力影响的计算方法;第四、五、六章分别给出等截面无铰拱、变截面系数 $n \neq 1$ 的变截面无铰拱和变截面系数 $n=1$ 的变截面无铰拱的挠度理论解答;第七章专门介绍变截面抛物线拱的挠度理论解析解答;第八章讨论了两铰拱和三铰拱的挠度理论;第九章给出挠度理论的几个特性并加以证明;第十章通过数值计算将挠度理论内力值与弹性理论内力值进行了分析比较,以观察弹性理论计算所带来的误差,并进行了实桥内力计算;最后一章分别给出三个文献的三个验证挠度理论的模型试验。

在本书的编写过程中,作者对能继续得到导师何福照、郭临义教授的指导,深表谢意,并对为挠度理论作出开拓性工作的李毅谦、李子青两位师兄表示感谢。由于作者水平有限,书中难免存在一些缺点甚至错误,恳请读者指正。

内 容 提 要

本书介绍拱的几何非线性分析方法——挠度理论。为此,书中讲述了拱结构的特点及其弹性理论分析方法;在各种坐标系下推导出拱的控制微分方程及求解的约束方程;介绍各种大变形内力计算方法,同时分析了竖向变形对拱内力的影响;对等截面及变截面无铰拱进行了挠度理论分析;简述了两铰拱及三铰拱的挠度理论分析方法;指出挠度理论的特性并给予证明;用数值计算分析了各参数对内力的影响程度,还介绍了模型试验及试验结果。

本书可供桥梁及结构工程专业高年级学生、研究生、研究人员及工程技术人员学习参考。

前 言

拱桥是我国公路上常用的桥梁型式。拱桥与梁桥不仅在外形上不同,而且在受力性能上两者有本质差别。在竖向荷载作用下,拱的两端支承处除有竖向反力外,还有水平推力,正是由于这个水平推力的作用,使拱内弯矩大大减小,也正是由于这个水平推力的存在,在竖向挠度发生时,其与反力相互作用产生附加弯矩,而考虑此附加弯矩的计算理论则称为挠度理论。

挠度理论——大变形理论的简称,人们在 30 年代已有认识,并进行了一些探索,但没有彻底解决。80 年代以前,我国在这方面的研究还寥寥无几,八十年代后,国内一些学者开始应用数值方法研究拱的大变形理论。1985 年,西安公路交通大学教授何福照、郭临义指导研究生李毅谦、李子青二同志开始对悬链线拱的挠度理论进行深入研究,并于 1987 年在中国土木工程学会桥梁与结构工程学会年会上宣读了题为《拱的挠度理论——按非线性理论设计大跨径拱桥》的学术论文,引起学术界的关注,并评为优秀论文,后被邀请参加国际桥梁年会,由于经费问题未能成行。1986 年,作者拜读在二位教授门下,继续对圆弧拱的挠度理论进行研究,先后发表了《拱桥的几何非线性分析——挠度理论》等多篇论文。后来作者又对不同轴线形式,不同的变截面形式推力结构的挠度理论进行了研究,部分成果收集在《现代桥梁结构分析》一书中。今天,大跨径拱桥愈来愈多,高强度材料在拱桥上应用愈来愈广,拱度理论亦显得尤为重要。为此,作者收集了有关资料,连同近年来不很成熟的研究成果汇集成这本小册子,以起抛砖引玉之作用。

本书第一章介绍拱式结构的特点及现行的弹性理论分析方法;第二章在不同的坐标系下推导出挠度理论求解的基本方程、控

目 录

第一章 概述	(1)
1.1 拱轴线与合理拱轴线	(1)
1.1.1 选择拱轴线的原则	(1)
1.1.2 拱轴线	(1)
1.1.3 合理拱轴线	(4)
1.2 拱圈截面形式及其纵向变化规律	(8)
1.3 基本结构及弹性中心.....	(11)
1.3.1 基本结构.....	(11)
1.3.2 弹性中心.....	(11)
1.4 弹性理论分析.....	(14)
1.4.1 恒载内力分析.....	(14)
1.4.2 活载内力分析.....	(22)
1.4.3 温度变化和混凝土收缩产生的内力.....	(29)
1.4.4 裸拱内力分析(悬链线拱).....	(31)
第二章 挠度理论的基本方程	(33)
2.1 基本假定.....	(33)
2.2 曲线坐标下的基本方程.....	(34)
2.2.1 几何方程.....	(34)
2.2.2 内力合成.....	(36)
2.2.3 平衡方程.....	(36)
2.3 极坐标系下的基本方程.....	(37)
2.3.1 几何方程.....	(37)
2.3.2 内力合成.....	(38)
2.3.3 平衡方程.....	(38)

2.4	直角坐标系下的基本方程	(38)
2.4.1	几何方程	(38)
2.4.2	内力合成	(41)
2.4.3	平衡方程	(41)
2.5	考虑剪力及温度影响时的平衡方程(直角坐标系)	(41)
2.6	固端拱的位移条件	(43)
2.7	控制方程的建立	(44)
2.7.1	基本结构	(44)
2.7.2	恒载作用控制方程	(45)
2.7.3	外载作用控制方程	(45)
2.8	约束方程	(46)
第三章	竖向变形对拱内力的影响	(50)
3.1	基本概念	(50)
3.2	几种应用大变形理论的设计方法简介	(51)
3.2.1	一般形式的拱桥	(51)
3.2.2	抛物线两铰拱	(52)
3.2.3	三铰拱	(52)
3.3	抛物线拱在均布荷载作用下的大变形内力近似解	(55)
3.4	大变形内力的差分解法	(59)
3.4.1	不计温度影响并忽略剪力影响项	(59)
3.4.2	进一步忽略轴向力对位移的影响	(61)
3.5	弯矩增大系数法	(64)
第四章	等截面无铰拱的摄动法解答	(70)
4.1	基本方程	(70)
4.1.1	恒载阶段	(70)
4.1.2	外载阶段	(70)
4.2	摄动方程的建立	(71)
4.3	摄动方程的求解	(77)

4.4	弹性理论的摄动法与力法	(84)
4.4.1	弹性理论的摄动法	(84)
4.4.2	力法	(88)
4.5	弹性理论、线性挠度理论与非线性挠度理论	(89)
第五章	变截面无铰拱—— $I_x = \frac{I_d \sec \varphi}{1 - (1-n) \frac{ x }{l}}$ 时的解	
	析解答	(91)
5.1	恒载阶段	(91)
5.1.1	挠曲线方程 w_g	(91)
5.1.2	未知赘余力	(96)
5.2	外载阶段	(97)
5.2.1	$x \geq 0$ 时的解答	(98)
5.2.2	$x \leq 0$ 时的解答	(100)
5.2.3	确立常数 A, B, C, D	(102)
5.2.4	求未知赘余力	(105)
第六章	变截面无铰拱—— $I_x = I_d \sec \varphi$ 时的解析解答	(109)
6.1	恒载阶段	(109)
6.1.1	挠曲线方程 w_g	(109)
6.1.2	未知赘余力	(111)
6.2	外载阶段	(112)
6.2.1	挠曲线方程	(112)
6.2.2	未知赘余力	(115)
第七章	变截面抛物线拱—— $I_x = I_d \sec \varphi, A_x = A_d \sec \varphi$	
	时的解析解答	(118)
7.1	基本方程	(118)
7.2	解析解	(119)
7.3	参数计算	(121)
7.3.1	$\alpha_4(x)$ 的表达式	(121)
7.3.2	$\beta_4(x)$ 的表达式	(123)
7.3.3	$\beta_4(l)$ 的表达式	(124)

7.3.4	$\int_{-l}^l \alpha_4(x)dx$ 的表达式	(125)
第八章	两铰拱和三铰拱的挠度理论	(126)
8.1	两铰拱	(126)
8.1.1	恒载阶段	(126)
8.1.2	外载阶段	(127)
8.2	三铰拱	(128)
第九章	挠度理论的几个特性证明	(129)
9.1	挠度理论的特例——弹性理论	(129)
9.2	线性挠度理论	(133)
9.3	轴向力对拱内力的影响	(135)
9.4	变位互等性	(136)
9.4.1	$I_x = \frac{I_d \sec \varphi}{1 - (1-n) \frac{ x }{l}}$	(136)
9.4.2	$I_x = I_d \sec \varphi$	(138)
9.5	挠度理论的弹性中心	(139)
第十章	数值分析	(141)
10.1	恒载在与拱同跨简支曲梁上产生的弯矩	(141)
10.1.1	实腹式拱	(141)
10.1.2	空腹式拱	(142)
10.2	任意变截面的处理	(143)
10.2.1	矩形截面	(143)
10.2.2	变高度的 I 字形、箱形截面	(143)
10.2.3	任意变截面	(144)
10.3	数值计算格式	(145)
10.3.1	恒载阶段	(145)
10.3.2	外载阶段	(145)
10.4	参数对内力的影响	(146)
10.4.1	等截面悬链线拱	(146)
10.4.2	变截面悬链线拱	(146)

10.4.3 变截面圆弧拱.....	(147)
10.5 线性挠度理论影响线.....	(147)
10.6 实桥内力分析.....	(155)
第十一章 模型试验	(170)
11.1 等截面悬链线拱模型.....	(170)
11.1.1 模型及材料参数.....	(170)
11.1.2 试验结果.....	(171)
11.2 变截面悬链线拱模型.....	(173)
11.2.1 模型及材料参数.....	(173)
11.2.2 试验结果.....	(174)
11.3 变截面圆弧拱模型.....	(176)
11.3.1 模型及材料参数.....	(176)
11.3.2 试验结果.....	(177)
附录 I 分部积分法	(180)
附录 II Bessel 微分方程及其解答	(180)
附录 III 二阶线性微分方程的参数变异法求解	(181)
附录 IV $I_x = \frac{I_a \sec \varphi}{\left[1 - (1-n) \frac{ x }{l} \right]}$ 时挠度理论分析程序	(182)
附录 V $I_x = I_a \sec \varphi$ 时的线性挠度理论分析程序	(200)
参考文献	(213)

第一章 概 述

1.1 拱轴线与合理拱轴线

拱轴线是拱圈截面形心的连线,根据各种荷载情况而定,有圆弧线形、椭圆形、抛物线形和悬链线形等。

1.1.1 选择拱轴线的原则

1. 线形合理:最理想的拱轴线是和荷载压力线相重合,这样可使拱圈内只产生轴向力而无弯矩,以充分利用圬工材料的抗压性能。可是拱桥受力,除恒载之外还有活载、温度变化、拱轴弹性压缩、收缩、徐变等影响存在,总会在截面上产生弯矩。相对而言,恒载比重较大,跨径大时越是如此,故一般认为轴线与恒载产生的压力线(不考虑弹性压缩)相重合,即为较合理的拱轴线。

2. 施工简单:拱桥是一外形称之为曲线的桥型。复杂的拱轴线会增加制做上的困难,对于石拱桥、混凝土预制块砌筑拱桥,困难会更大。因此,即使是合理的但是复杂的拱轴线也应设法使之简化,以减少施工代价。

3. 线形美观:注意线形的形象,不使产生突变和可能引起视觉上的不舒服感,以维护拱桥本身所特有的曲线美。

1.1.2 拱轴线

1. 折线

折线拱是石拱桥最简单的形式,其中三搭挤石拱桥是最常见的古桥型式,如图 1-1 所示。

图 1-1a)是一稳定结构,图 1-1b)为一可变结构,但在对称载作用下,只要拱石稍有厚度便是稳定的。此种折线形拱在近代已废

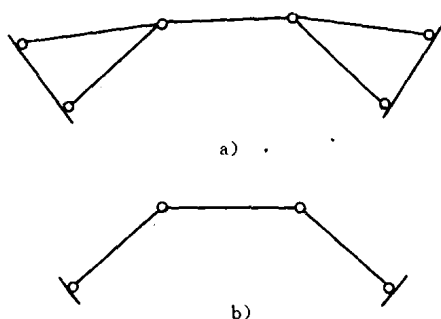


图 1-1 三跨拱石桥

之不用,取而代之的是结点为刚结点的 RC 或 PC 斜腿刚构桥。

2. 圆曲线

圆曲线拱桥是中小跨径板拱所普遍采用的一种轴线型式,根据曲线的中心夹角不同,分为马蹄形(大于半圆)、半圆形和圆弧形(小于半圆)三类,实际应用中,还是圆弧形较多,这是由于只有它在分析计算中起拱作用。

若取桥跨径 L , 圆弧半径 R , 拱矢高 f , 中心夹角 2ϕ , 拱轴线长 S , 则它们之间的关系式为

$$R = L/2\sin\phi \quad (1-1)$$

$$R = f/(1 - \cos\phi) \quad (1-2)$$

$$f/L = (1 - \cos\phi)/2\sin\phi \quad (1-3)$$

$$\phi = 2\sin^{-1}(2f/L) \quad (1-4)$$

$$S = 2R\phi \quad (1-5)$$

式(1-4)表明,中心夹角 2ϕ 与矢跨比成一定的比率,不管拱跨大小如何,只要矢跨比不变,其中心夹角亦不变。

若取拱轴线顶为坐标原点, x 轴向左, y 轴向下,如图 1-2 所示,则圆弧拱轴线上任意点的方程为

$$y = R(1 - \cos\theta) = R - \sqrt{R^2 - x^2} \quad (1-6)$$

$$x = R\sin\theta \quad (1-7)$$

3. 抛物线

抛物线又可分为二次抛物线和高次抛物线,其线型又可形成

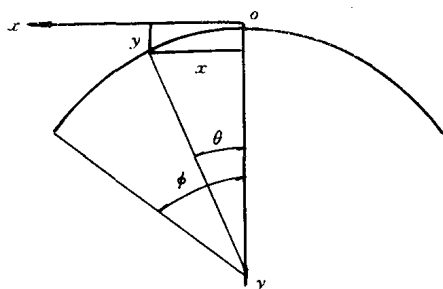


图 1-2 圆弧拱轴线方程

抛物线族。

对于坐标原点在拱顶的二次抛物线,其曲线方程为

$$y = \frac{4f}{L^2}x^2 \quad (1-8)$$

此方程分析计算时公式简单,计算方便。

高次抛物线通式可以表达为

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots \quad (1-9)$$

实际应用时,可根据需要来取舍多项式的项数以达到合理使用的目的。

4. 悬链线

抛开悬链线的初始定义,用在拱桥上的悬链线实际上是倒悬链线。若取坐标原点在拱顶, x 轴向左, y 轴向下,则其曲线方程为

$$y = \frac{f}{m-1}(\operatorname{ch} k\xi - 1) \quad (1-10)$$

式中各符号含义见下小节推导。此曲线实际上也是一曲线族,取不同的 m 值,可以得出不同位置的拱轴线。当 $m=1$ 时,即为曲线轴中最低的一条曲线——抛物线。

5. 椭圆形线

椭圆拱可在较小的矢高情况下取得比圆弧拱大的通航净空,历史上曾有使用。

仍以拱顶为坐标原点,对称半拱的椭圆拱轴线方程为

$$y = f(1 - \sqrt{1 - \xi^2}) \quad (1-11)$$

式中: f 为矢高, $\xi = \frac{x}{l}$, $l = L/2$ 。

1.1.3 合理拱轴线

所谓合理拱轴线, 即与恒载压力线相重合的拱轴线。实际上, 由于拱上受力复杂, 严格地讲, 不存在合理拱轴线。但基于某些假定, 出于实用, 抓住拱桥中恒载占很大比例这个主要点, 就求得“合理拱轴线”。

1. 圆弧线

现在来推导以圆弧线作为合理拱轴线的拱上荷载分布曲线。

假定荷载分布曲线为 n 阶幂级数方程, 有 $n+1$ 个常数系数, 根据拱轴线和压力线相重合的 $n+1$ 个截面的平衡条件, 可以求得这些系数, 于是, 便可求得荷载分布曲线。

现在以三阶幂级数为例进行推导。设拱上荷载分布曲线为

$$q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (1-12)$$

$$\because x = R\sin\theta \quad \therefore dx = R\cos\theta d\theta \quad (1-13)$$

得

$$q(x) = a + bR\sin\theta + cR^2\sin^2\theta + dR^3\sin^3\theta \quad (1-14)$$

半拱荷载(重力)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a + bR\sin\theta + cR^2\sin^2\theta + dR^3\sin^3\theta) R\cos\theta d\theta \\ &= aR\sin\phi + \frac{bR^2}{2}\sin^2\phi + \frac{cR^3}{3}\sin^3\phi + \frac{dR^4}{4}\sin^4\phi \end{aligned} \quad (1-15)$$

半拱对拱脚的弯矩

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x) x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (aR^2\sin\theta\cos\theta + bR^3\sin^2\theta\cos\theta + cR^4\sin^3\theta\cos\theta \\ &\quad + dR^5\sin^4\theta\cos\theta) d\theta \\ &= \frac{aR^2}{2}\sin^2\phi + \frac{bR^3}{3}\sin^3\phi + \frac{cR^4}{4}\sin^4\phi + \frac{dR^5}{5}\sin^5\phi \end{aligned} \quad (1-16)$$

半拱对拱顶取矩平衡有

$$Hf - V \frac{L}{2} + M = 0 \quad (1-17)$$

即

$$H = \left(\frac{VL}{2} - M \right) / f \quad (1-18)$$

$$\because L/2 = R \sin \phi; f = R(1 - \cos \phi)$$

得

$$H = \frac{1}{\cos \phi} \left[V \sin \phi - \frac{aR}{2} \sin^2 \phi - \frac{bR^2}{3} \sin^3 \phi - \frac{cR^3}{4} \sin^4 \phi - \frac{dR^4}{5} \sin^5 \phi \right] \quad (1-19)$$

对拱轴任一截面取平衡则有

$$\int_0^\theta q dx = H \tan \theta \quad (1-20)$$

将已知的 H 等代入后整理有

$$\begin{aligned} & \left[\frac{R(1 - \cos \phi) \cos \theta}{\sin \phi} + \frac{R}{2} \sin \phi \right] a \\ & + \left[\frac{R^2(1 - \cos \phi)}{2 \sin \phi} \sin \theta \cos \theta + \frac{R^2}{3} \sin^2 \phi \right] b \\ & + \left[\frac{R^3(1 - \cos \phi)}{3 \sin \phi} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{R^3}{4} \sin^3 \phi \right] c \\ & + \left[\frac{R^4(1 - \cos \phi)}{4 \sin \phi} \sin^3 \theta \cos \theta + \frac{R^4}{5} \sin^4 \phi \right] d = V \end{aligned} \quad (1-21)$$

取拱轴线四个不同点的平衡方程可得出四个方程的方程组，用矩阵方式表达为

$$[K]\{A\} = EV \quad (1-22)$$

式中： $\{A\} = [a \ b \ c \ d]^T$

E = 单位矩阵

$$[K] \text{ 亦可写为 } [K] = [k][R] \quad (1-23)$$

式中： $[R]$ 为半径的对角矩阵，其对角元素为 R, R^2, R^3, R^4 。

解方程(1-22)得

$$\{A\} = [K]^{-1}EV = [R]^{-1}[k]^{-1}EV \quad (1-24)$$

$[R]^{-1}$ 亦为对角矩阵，其对角元素为 $1/R, 1/R^2, 1/R^3, 1/R^4$ 。得

公式(1-12)中的各系数

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{R} \sum_1^4 k_{1n}^{-1}; & b &= \frac{1}{R^2} \sum_1^4 k_{2n}^{-1}; \\ c &= \frac{1}{R^3} \sum_1^4 k_{3n}^{-1}; & d &= \frac{1}{R^4} \sum_1^4 k_{4n}^{-1}. \end{aligned} \quad (1-25)$$

若令 $V=1$, 则有

$$Rq(x) = \sum_1^4 k_{1n}^{-1} + \sum_1^4 k_{2n}^{-1} \sin \theta + \sum_1^4 k_{3n}^{-1} \sin^2 \theta + \sum_1^4 k_{4n}^{-1} \sin^3 \theta \quad (1-26)$$

2. 抛物线

不计拱轴弹性压缩影响时, 外荷载为均布荷载 $q(x) = q$ 时, 其恒载压力线为抛物线。反过来说, 抛物线是荷载为均布载的合理拱轴线, 现推证如下:

如图 1-3 所示, 根据合理拱轴线的定义, 对拱轴任意截面取矩, 可得

$$y = \frac{M_x}{H_g} \quad (1-27)$$

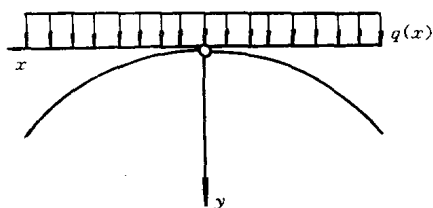


图 1-3 抛物线

则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{H_g} \frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{q(x)}{H_g} \quad (1-28)$$

将 $y = \frac{4f}{L^2} x^2$ 代入式(1-28)有

$$\frac{8f}{L^2} = \frac{q(x)}{H_g} \quad (1-29)$$

解得

$$q(x) = \frac{8f}{L^2} H_g \quad (1-30)$$

3. 悬链线

将 $y = \frac{f}{m-1} (\text{ch} k\xi - 1)$ 代入式(1-28)中有

$$\begin{aligned} \frac{q(x)}{H_g} &= \frac{d^2 \left[\frac{f}{m-1} (\text{sh} k\xi - 1) \right]}{dx^2} \\ &= \frac{f}{m-1} \frac{k^2}{l^2 q_d} \text{ch} k\xi \end{aligned} \quad (1-31)$$

$$\text{而} \quad k^2 = \frac{l_1^2 q_d}{H_g f} (m-1) \quad (1-32)$$

$$\text{则} \quad q(x) = q_d \text{ch} k\xi \quad (1-33)$$

$$\text{亦即} \quad q(x) = q_d \left[1 + (m-1) \frac{y}{f} \right] \quad (1-34)$$

根据 m 的定义, $m = \frac{q_i}{g_d}$ 代入上式, 并令

$$\gamma = \frac{q_i - q_d}{f} \quad (1-35)$$

$$\text{得} \quad q(x) = q_d + \gamma y \quad (1-36)$$

式(1-36)的荷载形状即为图 1-4

所示。

以上各式中: q_d ——拱顶的恒载集度;

q_i ——拱脚的恒载集度;

γ ——拱上材料的容重;

H_g ——拱轴推力;

$$\xi = \frac{x}{l}$$

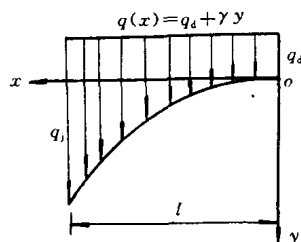


图 1-4 悬链线

4. 其它曲线

适用于拱轴线的线型较多, 选定线型作为合理拱轴线来求外荷载的分布往往比较容易, 但没有多少实用价值, 在实际工作中, 大多还是根据外载情况来求合理拱轴线型。拱轴线又与恒载的布

置有关,故在计算时,可先假定一拱轴线型式决定恒载,再算出恒载压力线坐标,如果算出的坐标与原先假定的线型出入较大,则又需以算得的坐标为准,定出恒载,再算一次,这样反复几次,遂次渐近。

有时也可用数值算法求出恒载压力线。这时,不是连续函数表达式,再用与此压力线相逼近的连续曲线作为拱轴线,例如可采用四次抛物线:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \quad (1-37)$$

系数 a, b, c, d, e 可根据边界条件和连续条件来确定。先用数解法求恒载压力线纵坐标 y ,然后在压力线上选与待定系数相等的点,一般可选拱顶、 $\frac{l}{8}$ 、 $\frac{l}{4}$ 、 $\frac{3l}{8}$ 、拱脚五点,将其坐标 $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots$ 等分别代入式(1-37),解联立方程,即可求得各系数值。

1.2 拱圈截面形式及其纵向变化规律

根据不同的拱桥,拱圈可有不同的截面形式,如板拱是截面为矩形截面的拱圈;肋拱是拱圈由矩形或 T 形或其它形式的拱肋与横系梁组成的;双曲拱的拱圈则由拱肋、拱波和拱板与横向连系组成,箱形拱的截面则由单箱或多箱组成。

拱圈有等截面和变截面两种形式,变截面拱圈可有两种做法,一是拱圈沿拱轴方向不变宽度而只变厚度,一种是厚度不变而改变拱圈的宽度,如图 1-5 所示。

拱圈截面的变化,与其受力有很大关系。由力学原理知,拱圈截面上作用着轴向力 N 和弯矩 M (暂不计剪力),而轴向力可近似表示为 $N = \frac{H}{\cos\varphi}$,此处 H 为水平推力, φ 为任意截面处拱轴线切线与水平线的夹角,由于 $\cos\varphi$ 值是由拱顶向拱脚逐渐减小的,因此轴向力 N 由拱顶向拱脚就逐渐增大,特别是在陡拱中,它的差值悬殊更大,为了使各截面的应力值趋于相等,拱圈的截面也应自拱顶向拱脚逐渐增大。但拱轴中弯矩 M 变化非常复杂,它不仅与截