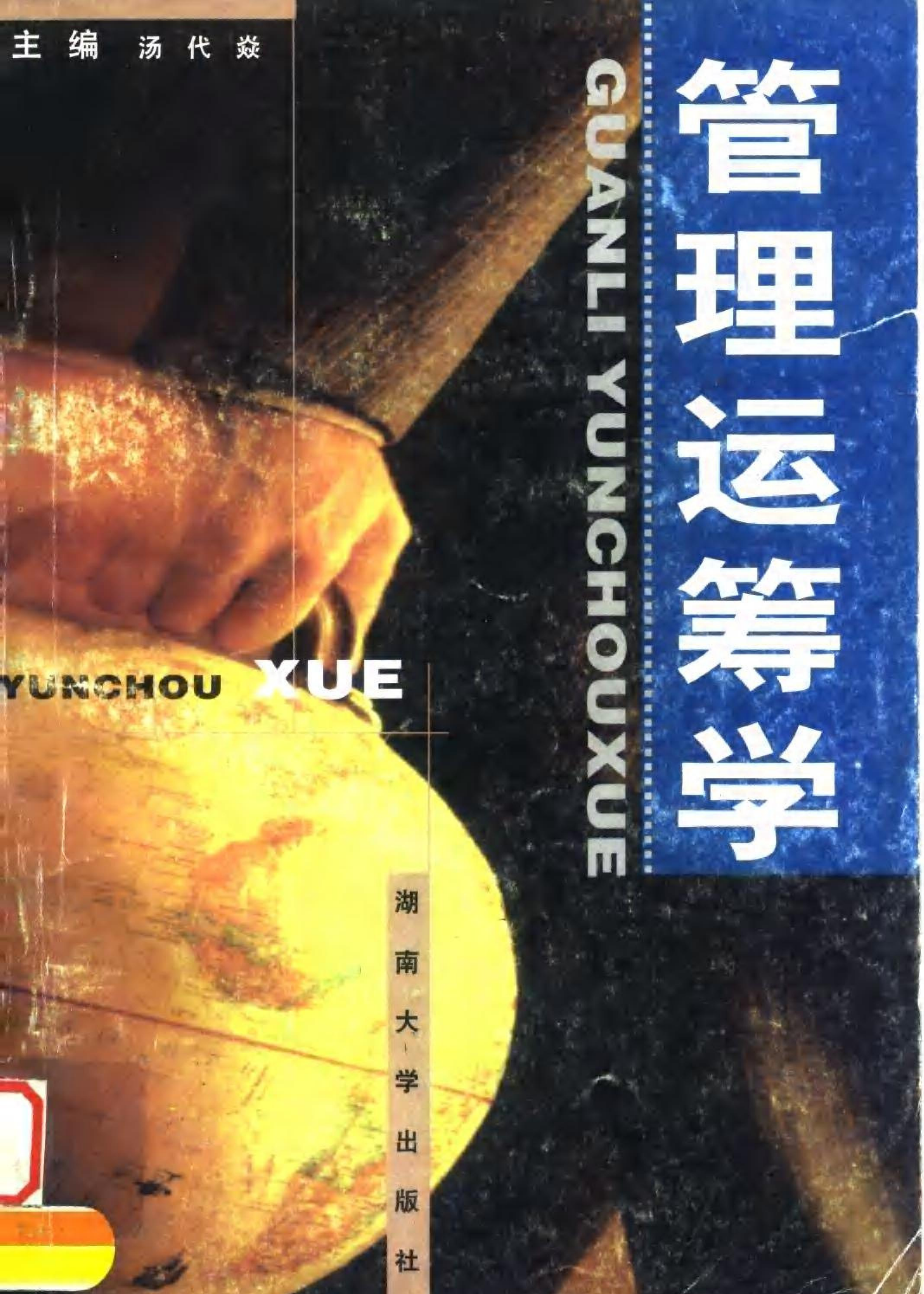
主编 汤代焱

管理运筹学

GUANLI YUNCHOUXUE



湖南大学出版社

管理运筹学

汤代焱 主编

湖南大学出版社
1997 年 · 长沙

内 容 简 介

本书分为六篇16章。主要内容包括：线性规划，动态规划，网络规划，存贮论，决策论和排队论。着重介绍运筹学的基本概念，基本原理和基本方法。书中除有大量例题外，每一章后面附有适量的习题，以供教学之用。书中标有"*"号的内容难度较大，讲授和学习时可根据不同专业和学历层次按需采用。

本书主要是为高等院校经济、管理类专业和其它相关专业编写的教材或教学参考书，也可作为有关专业硕士研究生入学考试教材或参考书，同时也可以作为各行各业行政管理人员、工程技术人员自学用书。

管理运筹学

Guanli Yunchouxue

主　编　汤代焱

□责任编辑　刘其斌

□出版发行　湖南大学出版社

社址　长沙市岳麓山　邮码　410082

电话　0731—8821691　0731—8821315

□经　　销　湖南省新华书店

□印　　装　湖南大学印刷厂

□开本　787×1092　16开　□印张　22.75　□字数　526千

□版次　1997年7月第1版　□1997年7月第1次印刷

□印数　1—5 000册

□书号　ISBN 7—81053—094—1/C・4

□定价　25.00元

(湖南大学版图书凡属印装差错，请向承印厂调换)

管理运筹学一反

序

运筹学是一门新兴的交叉学科，它与自然科学、技术科学、社会科学有着密切的联系，其理论与方法在工程技术、社会经济、科学管理和军事决策等方面得到了广泛应用，并产生了巨大的社会与经济效益，现已成为实现管理现代化的有效工具。

运筹学在国内外都受到了特别的重视。美、英、法、日等国家除在大专院校设置有关专业和开设运筹学课程外，还建立了专门的研究机构，培养了大批运筹学理论与应用人才，解决了许多庞大系统的复杂问题。我国在50年代才开始研究和推广这门学科，40多年来，在广大运筹学工作者的努力下，我国的运筹学研究与推广取得了令人瞩目的成就，得到了管理人员、经济工作者、工程技术人员和公务员的普遍重视。目前，运筹学也被列入管理工程、经济和有关工程类专业的主干学科和主要课程。但现在流行的运筹学教科书，大都偏重于数学方法的论证，对解题方法和实际应用重视不够，这对于非数学专业的学生来说是有一定困难的，更不便于企、事业单位、政府部门的在职人员自学。汤代焱、陈治亚、符卓等同志编写的《管理运筹学》用经济、几何观点对运筹学的原理进行解释与说明，将“方法——原理——应用”的原则贯穿于全书之中，增强了教材的通俗性、可读性和应用性。书中选用理论比较成熟，以应用最为广泛的规划论和排队论（随机服务系统理论）为主要内容是适宜的。可以预言，此书一定会受到广大读者的欢迎。

侯振挺

1997年7月20日

前　言

运筹学是在本世纪中叶发展起来的新兴学科和先进的最优化技术。它广泛应用于生产经营、工程技术、财政经济、科学研究和社会科学等领域，解决各行各业的生产、计划、设计、分配、管理和决策中的最优化问题。半个多世纪以来，运筹学的理论日趋完善，应用成果累累，为人类社会创造了大量的财富。目前，运筹学已成为实现管理现代化的有效工具。因此，所有工作人员，包括公务员，生产经营者，工程技术人员，科研工作者和军事指挥官等，学习和掌握一些运筹学的基本知识和基本方法是十分必要的。

近年来，随着教育改革的不断深入，很多大专院校的工、文科专业开设了运筹学课程。为了满足不同读者的需要，本书在阐述基本概念和基本原理时，在不失数学上的逻辑性、严密性的同时，着重注意到教材的通俗性、可读性和应用性。因此，能够用经济、几何概念解释和说明的问题，不作过多的数学推导和证明、全书贯穿“方法——原理——应用”的原则，使读者更易接受和理解。

全书共分为六篇 16 章，其中第一篇的第 1，2，3，4，7 章和第四篇的第 11 章由汤代焱执笔；第一篇的第 5 章，第二篇的第 8 章和第五篇的第 13 章由符卓执笔；第一篇的第 6 章和第五篇的第 12 章由夏伟怀执笔；第三篇的第 9，10 章由张飞涟执笔；第六篇的第 14，15，16 章由陈治亚执笔；全书由汤代焱统稿并负责主编。在编写过程中作者引入了自己近年来的有关研究成果，并从许多国内外学者的著作中汲取了营养。我们将他们的著作和论文列于书末参考文献。著名数学家侯振挺教授为本书作序，使本书增色不少，在此一并致以深切的谢意。

由于时间仓促和水平有限，错漏之处在所难免，望多指正。

编　者

1997 年 3 月于长沙

目　　次

第一篇　线性规划

第二篇　动态规划

第三篇　网络规划

第四篇　存贮论

第五篇　决策论

第六篇　排队论

第一篇　线性规则

线性规划是运筹学的重要分支，也是运筹学中最基本的内容。早在1939年，前苏联著名数学家康特洛维奇研究了运输和下料等问题，编著了《生产组织和计划中的数学方法》一书，为线性规划的研究奠定了基础。1947年Dantzig提出了一般线性规划的算法——单纯形法。尔后Kuhn提出了线性规划的对偶理论，使线性规划的理论和方法日趋完善成熟。随着电子计算机的产生与发展，线性规划在工业、农业、商业、交通运输业、建筑业、军事等行业的计划和管理及决策分析中得到了广泛与深入的应用，取得了良好的效果。目前，线性规划正以它具有理论成熟，计算简单精确，适应性强，应用面广的特点引起了工程技术人员、管理人员和经济学者的重视。它已成为重要的优化技术和手段。

本篇重点介绍线性规划的基本概念，数学模型，基本原理和求解方法及实际应用。全篇分七章。1～4章介绍一般线性规划问题，5～6章介绍特殊线性规划问题，第7章引用实例介绍线性规划数学模型的建立。

1　线性规划问题及其数学模型

1.1　线性规划问题及其一般模型

在生产与经营活动中，为了提高经济效益，人们往往从两方面考虑：一是如何运用现有人、财、物力等资源安排工作任务，使经济效益最高；二是在一定的工作任务下，使资源耗费最少。

例1.1　某工厂生产A，B两种产品，都需使用铜和铝两种金属材料，有关资料如表1.1所示。问如何确定A，B产品的产量，使工厂获取的总利润最大？

表1.1

原材料	A产品单耗	B产品单耗	可供材料数
铜	2(t)	1(t)	40(t)
铝	1(t)	3(t)	30(t)
单位产品利润	3(万元)	4(万元)	

解　将上述问题用数学语言描述：设x_1和x_2分别表示A和B的产量。因为一个A产品消耗2吨铜，一个B产品消耗1吨铜，生产x_1和x_2个A，B产品共消耗$(2x_1 + x_2)$吨铜，所消耗的铜不能超过可供数量，即可用不等式表示为

$$2x_1 + x_2 \leqslant 40$$

对铝材的消耗得出如下不等式

$$x_1 + 3x_2 \leqslant 30$$

若用 Z 表示工厂总利润，可知

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$

综合上述，将题意归纳为满足条件

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 40 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 30 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

使得 $Z = 3x_1 + 4x_2$ 达到最大。

我们称上述数学模型中式(1.1)为约束条件，而称 $Z = 3x_1 + 4x_2$ 为目标函数。

例 1.2 有一工厂的第一和第二车间共同加工 A,B,C,D 四种产品。每一产品的加工工时，两个车间可能提供的机时数以及每种产品在不同车间的加工成本如表 1.2 所示。问如何安排车间的加工任务，使工厂加工总成本最低。

表 1.2

车　间	单位 A 产品消耗工时	单位 B 产品消耗工时	单位 C 产品消耗工时	单位 D 产品消耗工时	可供工时
第一车间	1	2	2	3	20
第二车间	2	1	3	2	20
单位产品成本	1	2	3	4	

解 设 A,B,C,D 产品的产量分别为 x_1, x_2, x_3 和 x_4。类似例 1.1 得出数学模型为满足约束条件

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 20 \\ x_1, x_2, \cdots, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

使目标函数 $S = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$ 达到最小。

上述两例描述的问题就是线性规划问题，线性规划问题的数学模型就是线性规划模型。

从数学上看，所有线性规划问题都具有以下共同特征：

(1) 每一问题都可以用一组变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示某一方案。一般情形下，变量的取值是非负的。

(2) 约束条件用线性等式或线性不等式表示。

(3) 都有一个目标函数，且这个目标函数可表示为一组变量的线性函数。

(4) 每一问题要求目标函数实现最大化(max)或者最小化(min)。

由于问题的性质不同，线性规划模型也有不同的形式。一般地，总可以描述为：

使目标函数 $Z_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 满足约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

为方便，称 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为目标系数或价值系数，$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$ 为消耗系数，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 为资源限制向量。

1.2 线性规划模型的标准型

线性规划模型中约束条件出现了三种形式（$\leqslant, =, \geqslant$），目标函数存在两种形式（max，min）。这种多样性对讨论问题带来不便。因此规定了线性规划模型的标准型：

求目标函数 $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 最大化

满足
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

有时需要将线性规划模型的标准型表述为以下形式：

(1) 缩写形式

$$Z_{\max} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$(M_1)\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i = 1, 2, 3, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, 2, 3, \cdots, n) \end{cases}$$

M_1 中的 $b_i \geqslant 0$，若有 $b_i < 0$ 时，等式左右两端乘 -1，使 b_i 满足 $b_i \geqslant 0$。

(2) 向量形式

$$Z_{\max} = \boldsymbol{CX}$$

$$(M_1)\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, 3, \cdots, n) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{P}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

(3) 矩阵形式

$$Z_{\max} = CX$$

$$(M_1)\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

称 A 为资源约束方程组的系数矩阵($m \times n$ 阶)。在一般情况下 $m < n$。即约束等式的个数少于变量数。

线性规划的求解需要借助标准型来实现,而具体问题的线性规划模型一般都不是标准型。因此需要将非标准型转化为标准型。

下面介绍将非标准型模型转化为标准型模型的方法。

(1) 若目标函数 $Z_{\min} = CX$,可令 $Z = -Z'$,使 $Z'_{\max} = -CX$。亦即在原目标函数式 CX 中的各项上乘 -1。

(2) 约束不等式的转化

① 约束条件不等式为"$\leqslant$"时。在不等式左边加上一个松弛变量,将不等式变为等式方程。松弛变量的经济意义是没有被利用的资源。

② 约束条件不等式为"$\geqslant$"时。在不等式左边减去一个剩余变量,把不等式约束条件变为等式约束方程。

有时将松弛变量和剩余变量统称为附加变量或虚变量。附加变量对目标函数不产生影响,故在目标函数中,附加变量的目标系数为零。

③ 在非标准模型中存在无非负要求的变量,如 x_k 无论取正值或负值都可以。这时令 $x_k = x'_k - x''_k$,其中 $x'_k \geqslant 0, x''_k \geqslant 0$,由 x'_k 和 x''_k 的大小决定 x_k 的正负。

可见任何形式的线性规划模型都可以转化为标准型。现用例 1.3 作综合说明。

例 1.3 将下列线性规划模型化为标准型。

$$Z_{\min} = 6x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leqslant 60 \\ 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 \geqslant 80 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 70 \\ x_1, x_2 \geqslant 0(x_3 \text{为自由变量}) \end{cases}$$

解 先将自由变量 x_3 变为 $x_3 = x'_3 - x''_3, x'_3 \geqslant 0, x''_3 \geqslant 0$。再引入松弛变量 x_4 和剩余变量 x_5,得

$$Z_{\min} = -6x_1 + 4x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3' - 7x_3'' + x_4 = 60 \\ 4x_1 + 3x_2 + 9x_3' - 9x_3'' - x_5 = 80 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3' - 5x_3'' = 70 \\ x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.3 线性规划问题解的概念

将非标准的线性规划问题化为标准的线性规划问题后，我们讨论线性规划问题解的概念。

给出线性规划问题的标准型为

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \tag{1.2}$$

$$X \geqslant 0 \tag{1.3}$$

$$Z_{\max} = \boldsymbol{CX} \tag{1.4}$$

则线性规划问题的解有以下基本概念：

1.3.1 可行解

满足上述模型中式(1.2)和(1.3)的解称为线性规划问题的可行解。

1.3.2 最优解

满足式(1.4)的可行解称为最优解。

1.3.3 基

设 $\boldsymbol{A}$ 是约束方程组 $m \times n$ 系数矩阵，其秩为 m，若 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 $m \times m$ 阶非奇异子矩阵(即可逆矩阵，$|\boldsymbol{B}| \neq 0$)，则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基。$\boldsymbol{B}$ 是由 A 中 m 个线性无关的系数列向量组成的。一般地，可设

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$$

称 $\boldsymbol{B}$ 中的一列 $\boldsymbol{P}_j(j = 1,2,\cdots,m)$ 为基向量，与 $\boldsymbol{P}_j$ 对应的变量 $x_j(j = 1,2,\cdots,m)$ 为基变量。$\boldsymbol{B}$ 中共有 m 个基变量。而称在 $\boldsymbol{A}$ 之内 $\boldsymbol{B}$ 之外的列向量为非基向量，与非基向量对应的变量称作非基变量。$\boldsymbol{A}$ 中有 $n - m$ 个非基变量(设 $m < n$)。

1.3.4 基本解

设非基变量 $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$，用高斯消元法可以得到一组解

$$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 0, \cdots, 0)^T$$

这个解的非零分量的个数不大于 m，则称 $\boldsymbol{X}$ 为基本解。

1.3.5 基本可行解

满足式(1.3)的基本解称作基本可行解。其个数也不大于 m。

1.3.6 退化基本解

非零分量的个数小于 m 的基本解即是退化基本解。在一般情况下假设不出现退化。了解线性规划解的基本概念是十分必要的，它将有助于掌握线性规划的求解过程。

1.4 线性规划的图解法

图解法只适用于求解两个变量的线性规划问题，它不是线性规划问题的通用算法。我们介绍图解法的目的在于能更直观地了解线性规划的算法思想和求解步骤，有助于加深将要在第 2 章介绍的线性规划的通用算法——单纯形法的理解。下面用实例说明图解法的步骤。

例 1.4 给定两个变量的线性规划模型如下：

$$Z_{\max} = 10x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 120 \\ x_1 \leqslant 30 \\ x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 先满足非负条件 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$。将 x_1, x_2 画入直角坐标系中第一象限，横坐标表示 x_1 的取值，纵坐标表示 x_2 的取值。再将其它约束不等式化为等式（不加附加变量）。对于 $3x_1 + 2x_2 = 120$，取 $x_1 = 0$ 时，$x_2 = 60$；取 $x_2 = 0$ 时，$x_1 = 40$，用直线连接 (0,60) 点和(40,0) 点。类似地，在平面中铺画 $x_1 = 30$ 和 $x_2 = 45$ 的直线，得图 1.1。

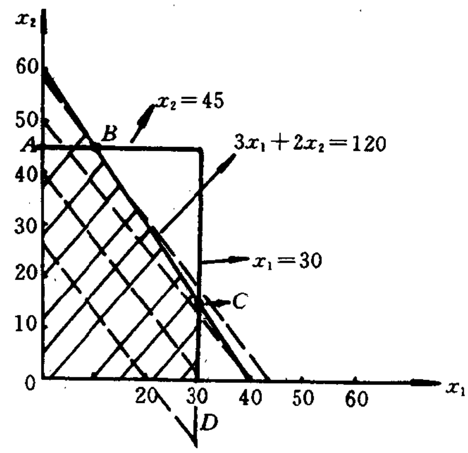


图 1.1

可见，三条约束直线左下方（包括直线本身）和两条坐标轴围成的多边形是线性规划解的集合，称它为可行域。可行域中的每一点（包括边界点）是线性规划的可行解。易知，可行解有无限个。

再分析目标函数 $Z = 10x_1 + 8x_2$。在坐标平面上，它可表示以 Z 为参数，$-\frac{5}{4}$ 为斜率的一簇平行线

$$x_2 = \frac{Z}{8} - \frac{5}{4}x_1$$

位于同一直线上的点具有相同的目标函数值。当 x_1 和 x_2 的取值增大时，直线 $x_2 = \frac{Z}{8} - \frac{5}{4}x_1$ 沿法线方向向右上方移动，当移至 B 点时，不能再向右上方移动了，否则超过可行域的范围。这时在顶点 B 上实现了目标最大化，即得到了问题的最优解：$x_1 = 10, x_2 = 45$，$Z_{\max} = 440$。

上例中问题的最优解只有一个，是唯一最优解。但在某些情形下还可能出现以下求解结果：

(1) 无穷多组最优解（多重解）。将例 1.4 的目标函数变为 $Z_{\max} = 3x_1 + 2x_2$，则以 Z 为参数，$-\frac{3}{2}$ 为斜率的目标函数的平行线与约束条件 $3x_1 + 2x_2 = 120$ 直线平行。当 Z 值逐

渐增大而向右上方移动时必与 BC 线段重合，BC 线段上的任一点都使 Z 取得相同的最大值，见图 1.2。显然问题有无穷多组最优解。

（2）无界解。

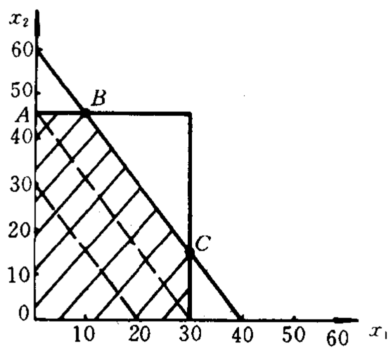


图 1.2

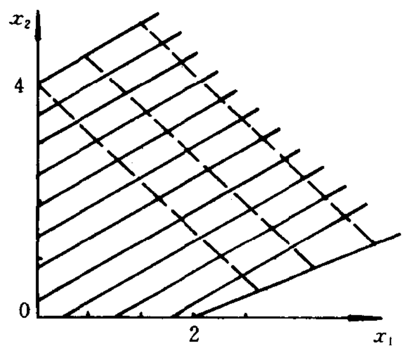


图 1.3

例 1.5 对下述线性规划问题

$$Z_{\max} = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用图解法其结果如图 1.3 所示。从图中可见此问题的可行域无界，目标函数可以增加到无穷大。这种情况的解为无界解。出现无界解时则线性规划无最优解。

图解法虽然直观简便，当变量在三个以上时在图上无法实现求解过程。因此对于一般线性规划来说，图解法没有实用价值。但图解法的解算过程给我们以重要启示：即(1) 线性规划的最优解一定在可行域的顶点上达到；(2) 可行域中顶点的转移实现了数学的迭代，顶点的转移使目标函数值上升或下降。这正是求解一般线性规划的通用方法——单纯形法的基本原理和算法思想。

习　　题

1.1　将下列线性规划问题化为标准型：

$$S_{\min} = -5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 14 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \geqslant 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.2　将下列非标准线性规划模型化为标准型：

$$Z_{\max} = x_1 - x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 为自由变量} \end{cases}$$

1.3　用图解法求解下列线性规划问题：

$$Z_{\min} = 40x_1 + 36x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geqslant 45 \\ x_1 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 10 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.4　用图解法解出下述线性规划问题后，说明最优解的特点：

$$Z_{\max} = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.5　将第 4 题中约束条件 $x_1 + 2x_1 \leqslant 10$ 去掉后用图解法求解。说明解的结果。

1.6　有两个变量的线性规划问题：

$$Z_{\max} = x_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant a \\ -x_1 + x_2 \leqslant -1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

要求：

a. 证明本题当且仅当 $a \geqslant 1$ 时为可行。

b. 用图解法对 $a \geqslant 1$ 的一切值，求以 a 表示的最优值。