

目 次

概 念

怎样区别整除和除尽?	2
怎样判别能被 2、3、5 整除的数?	5
整除的一些性质	9
什么是约数、倍数?	11
怎样找质数?	13
怎样较快地分解质因数?	15
怎样理解求最小公倍数?	18
怎样理解分数的意义?	21
整数是特殊的分数吗?	25
分数化成小数的几种情况	28
怎样理解比的含义?	33
比的后项为什么不能是“0”?	37

怎样区别“求比值”和“化简比”?	40
连比就是连除吗?	44
比例尺和尺子有什么不同?	47
怎样理解比例的含义?	51
怎样区别成正、反比例的量?	54
考考你自己(一)	57

计 算

怎样理解异分母分数加减法法则?	63
带分数减法的速算方法	66
分数加减中的简便运算	69
分数四则运算中的简便运算	72
怎样理解分数乘除法法则?	77
怎样进行小数、分数乘除混合运算?	81
考考你自己(二)	86

应 用 题

解分数应用题的基础是什么?	91
怎样分析分数应用题的基本的数量关系?	96
怎样分析分数应用题中较复杂的数量关系?	99
怎样弄清楚数量关系之间的联系和变化?	104
根据“甲数的 $\frac{3}{4}$ 等于乙数的 $\frac{4}{5}$ ”, 怎样求甲数是	

乙数的几分之几?	106
怎样解分数基本应用题?	109
怎样解稍有变化的分数应用题?	116
怎样用连比解分数应用题?	121
怎样解工程问题应用题?	124
怎样解浓度问题应用题?	128
怎样解较复杂的分数应用题 (一)?	132
怎样解较复杂的分数应用题 (二)?	136
怎样解较复杂的分数应用题 (三)?	139
怎样解较复杂的分数应用题 (四)?	143
怎样解较复杂的分数应用题 (五)?	145
怎样解较复杂的分数应用题 (六)?	148
怎样利用比和分数的联系解应用题?	150
怎样利用比和比例解应用题?	154
考考你自己(三)	158
怎样区分各种线?	165
怎样区分周长和面积?	166
关于几何形体的几个问题	169
怎样区别地积与面积、体积与容积?	175
怎样解有关几何初步知识的应用题?	176
考考你自己(四)	179

概 念

小学数学中的概念是学习认数、读数、进行数的计算和解答应用题的基础。我们在解题中经常出现的一些错误都是由于某些概念模糊不清所造成的。所以，我们一定要认真学好数学的基本概念。

我们在学习概念中，常见的毛病有这么一些：一是不理解概念的含义，只是死记硬背词句，因而对概念的实质抓不住，造成似是而非的错误；二是不能抓住概念与概念之间的联系和区别，因而对一些相似、相近的概念混淆不清；三是对概念的叙述不够准确完整，因而造成模糊的观念。

我们要学好数学概念，必须真正弄懂概念的含义，并能自己举例说明；还要能区别概念与概念的相同点和不同点；善于运用概念解决计算和解答应用题中的问题，灵活运用，在实际运用中加深对概念的理解。这样，我们才能真正学懂、学活概念。

怎样区别整除和除尽？

老师：小卫、小胡，今天我们来研究三个算式：
 $0.16 \div 0.04$, $16 \div 5$, $18 \div 6$ 。你们看，这三个算式中，
一个数能被另一个数整除吗？





小胡：我看 $0.16 \div 0.04 = 4$, $16 \div 5 = 3.2$, $18 \div 6 = 3$ ，因为它们都没有余数，所以可以说： 0.16 能被 0.04 整除， 16 能被 5 整除， 18 能被 6 整除。

老师：我问你们什么叫做整除？

小卫：甲数和乙数都是自然数，甲数除以乙数的商也是自然数，而且没有余数。我们就说甲数能被乙数整除。

小胡：我也会背下来。

老师：学习数学概念只是会背是不行的。我们要真正地理解才行。现在我们用整除的定义来分析一下这三个算式： $0.16 \div 0.04$ 这两个数不是自然数，所以谈不上整除； $16 \div 5$ 这两个数虽然都是自然数，但是商不是自然数，所以也不能说 16 能被 5 整除；只有 $18 \div 6$ 这个算式能说 18 能被 6 整除。

小胡：这三个算式都能除尽，怎么不是整除呢？

小卫：我们对整除和除尽两个概念还有点分不清。

老师：“整除”有三个条件：一是两个数都是自然数，二是商也是自然数，三是没有余数。而“除尽”是指两个数相除时没有余数，相除的两个数不一定是自然数，商也不一定是自然数。所以说“除尽”不一定是“整除”。

小卫：我知道了，除尽包括整除，而整除只是除尽的一种特殊情况。

小胡：过去我以为没有余数就是整除。

老师：我们学习数学概念要注意每一个概念所指的范围和条件，认真区别它们的不同点和相同点，才不至于把它们弄混淆。



怎样判别能被 2、3、5 整除的数？

老师：今天，我们来复习一下什么数能被 2 整除？
什么数能被 5 整除？

小胡：一个数的个位是 0、2、4、6、8 的数，这个
数就能被 2 整除。

小卫：一个数的个位上的数是
0 或 5 的数，这个数就能被 5
整除。

老师：能举几个
例子吗？

小卫：10、45、100
这些数都能被 5 整
除。

小胡：18、56、70
等能被 2 整除。

老师：很好。那
么，什么样的数能被
3 整除？



小胡：能被3整除的数，个位上可能是0、1、2、3、4、5、6、7、8、9。你看21、42、33、24、15、36、27、18、19、30等都能被3整除。

小卫：小胡说得不对，看一个数能不能被3整除，不是看它的个位，而应该看这个数各位上的数字的和能不能被3整除。

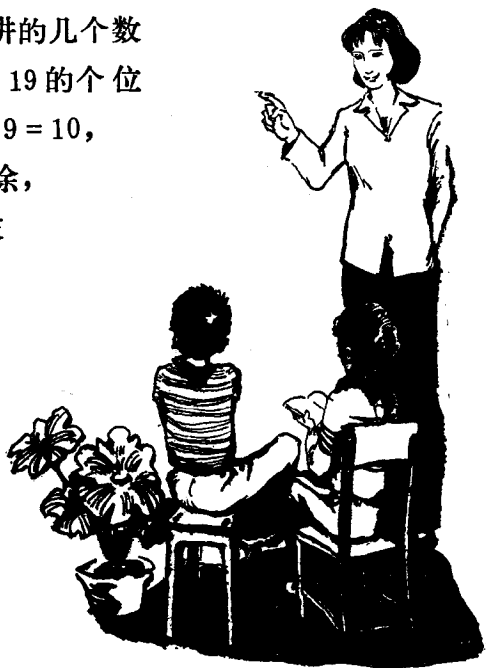
老师：小卫说得对。小胡，把你刚才说的数用小卫的方法试试看。

小胡：我讲的几个数只有19不对。19的个位是9，但是 $1+9=10$ ，10不能被3整除，所以19不能被3整除。

老师：你知道这是为什么？

小胡：不知道。

老师：好，我们不妨用261这个数来



研究一下：

$$261 = 200 + 60 + 1。$$

100可以写成 $99 + 1$ ，

200就是 $99 \times 2 + 2$ ；

10可以写成 $9 + 1$ ，

60就是 $9 \times 6 + 6$ 。

小胡：为什么这样分开呢？

小卫：我看出来了，其中，9和99都能被3整除，这样，在200中就分出了一个加数2，在60中就分出了一个加数6， $261 = 99 \times 2 + 2 + 9 \times 6 + 6 + 1$ 。我们把2、6、1这些余下的数加起来，如果能被3整除，那么261就能被3整除。

小胡：我懂了。

老师：这样判断一个数能不能被3整除就快了。这要同判断能不能被2和5整除的方法区别开。

小卫：老师，判断能被9整除的数也能用判断被3整除的方法去做吗？

老师：一个数各位上数字的和如果能被9整除，这个数就能被9整除。我们来举个例子吧：比如：3141这个数可以看成 $3000 + 100 + 40 + 1$ ，而 $3000 = 999 \times 3 + 3$ ， $100 = 99 + 1$ ， $40 = 9 \times 4 + 4$ ， $1 = 1$ 。我们把3、1、4、1相加得9，因为9能被9整除，所以就能断定3141能被

9 整除。

小胡：真有意思，我懂了。

老师：我提个问题让你俩想想：能被 3 整除的数能被 9 整除吗？能被 9 整除的数能被 3 整除吗？

小胡：能被 9 整除的数一定能被 3 整除，能被 3 整除的数也一定能被 9 整除。

小卫：小胡第一句话说对了，第二句应该是：能被 3 整除的数不一定能被 9 整除。

老师：小卫补充得好，能被 3 整除的数不一定能被 9 整除。例如：15 能被 3 整除，但就不能被 9 整除。所以，我们必须仔细地分别它们的特征。

整除的一些性质

老师：小胡，我考考你，不用计算，你能说出下列算式的和能被 3 整除吗？

$48 + 15$ 、 $24 + 15$ 、 $16 + 15$ 、 $30 + 15$ 、 $7 + 10$ 、 $80 + 30$ 、
 $18 + 21 + 12$ 、 $11 + 13$ 、 $10 + 20$ 。

小胡：我看除去 $80 + 30$ 的和不能被 3 整除，其他算式都能被 3 整除。

小卫：小胡的说法不完全。我看上面的算式中有这样几种情况：

(1) 如果算式中每个加数都能被 3 整除，它们的和就能被 3 整除。例如： $48 + 15$ 、 $24 + 15$ 等。

(2) 如果算式中有一个加数不能被 3 整除，和就不能被 3 整除。例如： $16 + 15$ 。

(3) 如果算式中每个加数都不能被 3 整除，和有两种可能，有的可能能被 3 整除，如： $11 + 13$ 、 $10 + 20$ ；有的不能被 3 整除，如 $7 + 10$ 。这样要通过计算来决定。

老师：小卫讲得很清楚。我再请你们想想：能被 3 整除的数，它的倍数也能被 3 整除吗？

小胡：一个数如果能被 3 整除，它的倍数一定能被 3 整除。

老师：对。你能举几个例子吗？

小胡： 12×3 、 15×7 、 18×5 、 21×4 它们的积都能被 3 整除。

小卫：老师，我看一个数能被另一个数整除，它的倍数也一定能被另一个数整除。

老师：小卫的结论是对的。我们学习概念就是要学会从实例中概括出它们的本质东西，并且会初步地推广和发展。



什么是约数、倍数？

老师：小胡，你看 12 能被 3 整除，我们能说 12 是倍数，3 是约数吗？

小胡：我看可以。

小卫：我看这样说是不对的。因为约数和倍数是指两个数之间的关系，不能说某一个数是约数或某一个数是倍数。

老师：小卫说得对。约数和倍数是两个数之间的关系。约数和倍数是在整除的条件下互为依存的，我们只能说甲数是乙数的倍数，或乙数是甲数的约数。下面我们来看几组数，请你们说说看，谁是谁的倍数，谁是谁的约数？

42 和 3、11 和 33、210 和 4、105 和 35、0.5 和 0.1。

小胡：我说：42 是 3 的倍数，3 是 42 的约数；11 是 33 的约数，33 是 11 的倍数；210 不是 4 的倍数，4 也不是 210 的约数；105 是 35 的倍数，35 是 105 的约数；0.5 是 0.1 的倍数，0.1 是 0.5 的约数。

小卫：小胡，你说错了一个。0.5 不是 0.1 的倍数，

0.1 也不是 0.5 的约数。

小胡：为什么？0.5 不是 0.1 的 5 倍吗？

小卫：0.5 是 0.1 的 5 倍，这是对的，但是 0.5 和 0.1 之间不存在整除的情况，所以不能说 0.5 是 0.1 的倍数。

老师：小卫说得对，我们说两个数谁是谁的倍数，它的前提一定是整除，否则是不行的。对于一些概念的运用和理解，一定要注意概念所指的范围，区别概念的本质。否则就会产生一些错误的观念，把概念混淆起来。



怎样找质数？

老师：在一次小测验上有这样一道题，小胡的答案是：在 17、21、23、35、49、51、57、111、729 中，质数是 (17、23、49、57、111)，合数是 (21、35、51、729)。

小卫你说小胡的答案对吗？

小卫：小胡把 49、57、111 错误地写成质数了。

老师：小胡为什么会发生这种错误呢？

小卫：他没有用 20 以内的质数去试除，对质数、合



数的意义还没有完全理解。

老师：对，找质数、合数，不能凭感觉，要有根据地分析。我们在找质数、合数的时候，首先要弄清楚质数、合数的概念。小胡，你说说质数和合数的意义。

小胡：一个自然数，除了1和它本身，没有别的约数，这个数叫质数；一个数除了1和它本身，还有别的约数，这个数就叫合数。

老师：对。那么，你看49、57、111这三个数中除了1和它本身，还有别的约数吗？

小胡：49还有约数7。57、111有没有约数，我看不出来了。

小卫：57、111至少还有约数3。因为 $5+7=12$ ， $1+1+1=3$ ，所以它们都能被3整除。

老师：对，这要把旧知识用上去，运用数的整除性来判别一下。就是刚才小卫说的要用20以内的质数去试除，从小到大，一个一个地看。比如，先看能不能被2整除，再看能不能被3整除，能不能被5整除，能不能被7整除……

小胡：老师，是不是用20以内的质数去试除是判断一个数是不是质数的常用办法？

老师：是的，小胡能找到出现问题的原因，很好。要记住，我们学习知识的时候，一定要灵活运用啊。