高等学校教学参考用书

地球形状及外部重力场

上册

管泽霖　宁津生　编

测绘出版社

地球形状及外部重力场

上　册

管泽霖　宁津生　编

测　绘　出　版　社

内 容 简 介

本书叙述了六个问题：一、重力测量；二、地球重力场的理论；三、重力测量在国家控制网中的应用；四、利用地面资料研究全球重力场和地球形状的方法；五、卫星重力学；六、地球重力固体潮。

本书可以作为有关高等院校教材和教学参考用书，也可作为大地测量、天文、地球物理以及空间技术等有关方面的科研、生产和教学人员的参考书。

高等学校教学参考用书

地球形状及外部重力场

上 册

管泽霖 宁津生 编

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32·印张13½ 字数304千字

1981年6月第一版·1981年6月第一次印刷

印数1—7,000册·定价1.40元

统一书号：15039·新170

前　　言

地球形状及外部重力场一直是大地测量科学研究的核心问题。尤其是现在，为发展空间技术和改善国家天文大地网等方面的需要，对此问题在科学技术上又提出了许多实际的要求。同时由于天文、大地和重力测量以及人造卫星的观测资料，不论数量还是质量都在提高，因此以较高的精度来解决“地球形状及外部重力场”中的许多实际科学技术问题已具备了现实的可能性。此外，随着现代科学的发展和边缘学科的兴起，大地测量学、天文学、地球物理学以及其它有关学科又使“地球形状及外部重力场”扩大了研究领域，增添了新的内容，发展了新的概念。

本书的目的是对“地球形状及外部重力场”作较系统而全面的介绍。但为了便于教学和参考，我们将全书共分六个部分，而每一个部分都具有独立的完整性，以供读者按实际需要翻阅。

第一部分重力测量。在这一部分里叙述了绝对重力测量以及用摆仪和重力仪进行相对重力测量的原理、方法和所使用的仪器，而其中以重力仪测定相对重力为讨论的重点，着重介绍了目前国内外常用的和新型的重力测量仪器。阐述了重力仪的观测误差和设计要求以及重力测量的平差方法，此外，还对海洋重力测量和航空重力测量作了简要的叙述。

第二部分地球重力场的理论。在这一部分里主要叙述位理论的基本知识和正常重力场的选取方法，并从边值问题出发推导了斯托克司和维宁·曼尼兹公式，最后还讨论了重力测量的归算，此外，为了本书第三部分的需要，在这里对莫

洛金斯基提出的研究地球形状的方法预先作了简单的介绍。

第三部分重力测量在国家控制网中的应用。在这一部分里重点介绍了在国家控制中所需要的天文大地垂线偏差和大地水准面差距（或高程异常）以及高程系统的有关理论和计算方法，并根据建立国家控制网对它们提出的精度要求，讨论了重力测量的设计问题。此外还对重力异常的内插和推估（包括最小二乘配置）作了一般性的阐述。最后作为综合利用天文、大地、重力等测量数据的实例，还介绍了珠穆朗玛峰高程的计算方法。

第四部分利用地面资料研究全球重力场及地球形状的方法。在这一部分里着重讨论利用地面的天文大地和重力资料计算大地水准面差距和垂线偏差的球函数系数，推导了广义的弧度测量方程，介绍了确定地球质心坐标和空中重力场的问题。这里还进一步对莫洛金斯基研究地球形状的方法作了详细的论述并推导了有关公式。此外，一般地介绍了杰弗瑞斯、格拉夫·亨特和比亚哈马等人研究地球形状的方法。

第五部分卫星重力学。在这一部分里介绍了天体力学中的二体问题的基本概念以及利用地球引力场对卫星轨道的摄动观测解算地球引力位的带和非带球函数系数的方法。此外还简单地介绍了卫星重力学的几种新方法：无阻力卫星、卫星跟踪卫星、卫星重力梯度测量及卫星测高等。

第六部分地球重力固体潮。在这部分里阐述了固体潮的原理以及引潮力位的拉普拉斯和杜德森展开问题，导出了理论固体潮的计算公式，讨论了平衡潮的理论和勒甫数。此外介绍了勒柯拉兹和维尼狄可夫两种固体潮调和分析方法。最后还对固体潮在大地测量和天文学中的作用作了简单的叙述。

为了便于读者阅读，本书最后还附有四个附录，它们的内容是一、对球函数进行了详细的讨论；二、推导了地球正常场的索米里安公式；三、根据拉格朗日括弧导出了拉格朗日摄动方程；四、介绍了杜德森展开式中系数的推导方法，并列出调和分析中的有关表格。

本书承武汉测绘学院陈健教授以及卞兴华、范良季、崔春芳等同志对本书提出了许多宝贵意见。另外高增吉同志为本书的插图描绘，王新华同志为本书的照片复制，以及夏碧玉、刘冬梅等同志为本书的缮写做了很多工作，在此向他们一并致以谢意。

由于“地球形状和外部重力场”涉及的问题较广，尽管我们在主观上力求写好，但限于水平，错误之处在所难免，这里恳切地希望读者批评指正。

作　　者

1980.3.

目　　录

第一部分　重 力 测 量

第二部分 地球重力场理论的基础

第三部分　重力测量在国家控制网中的作用

第一部分　重力测量

第一章　用动力法测定重力

§1—1　重力测量定义及方法

重力测量按字义就是“量测重力的数值”。如图1-1-1所示，地球上任一质点A，总是受有两个力的作用：一是地球所有质量对该质点的吸引力$\vec{F}$；二是质点随地球以等角速度ω绕固定轴旋转而产生的惯性离心力$\vec{P}$（通常简称离心力），此两力的合力称为重力，即：

$$\vec{G}=\vec{F}+\vec{P}$$

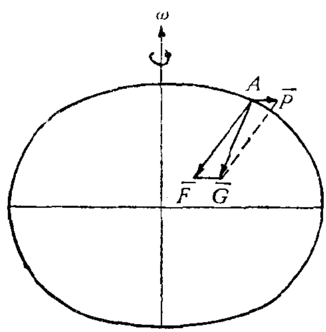

图 1-1-1

但是地球上任一质点除了受到地球质量的吸引外，还受到宇宙间其它天体的吸引；同时地球的旋转轴、地球的形状及其内部质量的分布都不是固定不变的，因此重力还有一种广义的定义，即宇宙间全部物质对地球上任一质点所产生的引力和该点随地球相对于惯性中心运动而引起的离心力的合力。在这种定义下，地球上任一质点的重力随着天体相对于地球的位置不同、地球瞬时旋转轴的摆动、地球旋转角速度的变化、地球形状的改变和内部质量的迁移等因素而变化。总之，广义定义的重力，不论其

数值还是方向都随时间而发生周期性或长期性的变化。现代高精度重力测量已有可能测定出这种随时间而变化的重力。

从牛顿第二定律可知，重力 G 是质量 m 和重力加速度 g 的乘积，即 $G=mg$。在C.G.S制中，力的量纲为克·厘米·秒$^{-2}$=1达因，即使质量为1克的物体产生1厘米/秒^{2}加速度的力。重力的单位也是达因。当被吸引质量 $m=1$克时，则重力的数值就等于重力加速度。所以在重力测量中，为了方便起见，往往把重力加速度叫做重力。所谓重力测量实际上是测定重力加速度的数值。由此，重力（即重力加速度）的量纲为厘米·秒$^{-2}$，这种单位称为“伽”（为纪念伽里略而定名）；千分之一伽称为“毫伽”；千分之一毫伽称为“微伽”，即

$$1\text{厘米/秒}^2=1\text{伽}=10^3\text{毫伽}=10^6\text{微伽}$$

重力测量有绝对重力测量和相对重力测量两种。

所谓绝对重力测量，是用仪器直接测出地面上某点的绝对重力值。地球表面上的绝对重力值约在978～983伽之间。

所谓相对重力测量，是用仪器测出地面上两点之间的重力差值。地球表面上的最大重力差约为5000毫伽的量级。

重力，可以采用与它有关的许多物理现象来测定。现有的各种方法，归纳起来不外下面两大类：

一、动力法。它是观测物体的运动状态以测定重力。例如利用物体的自由下落或上抛运动，或者利用摆的自由摆动，都可测定重力。在这类方法中，有的可以用来测定绝对重力，有的也可测定相对重力。

二、静力法。它是观测物体受力平衡，量测物体平衡位置受重力变化而产生的位移以测定两点的重力差。例如观测负荷弹簧的伸长即属此类。这种方法只能测定相对重力。

另外按观测领域不同，重力测量分为：陆地重力测量、海洋重力测量与航空重力测量。由于在不同领域观测时，所受外界因素的影响不同，因此观测方法和使用的仪器也有某些差别。

§1—2　用振摆测定绝对重力

绝对重力测量就是直接测定地面上某点的重力值 g，它只能用动力法测定。从十六世纪末世界上进行第一次重力测定至今，虽然测量方法和仪器都有了很大发展，但其基本原理仍然采用振摆和自由落体两种。而近代各国多采用第二种原理。本节首先叙述振摆原理。

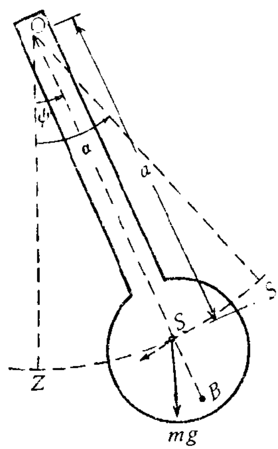

图 1-2-1

用来测定重力的振摆是物理摆，如图 1-2-1，将它悬挂在 O 点上，围绕着通过 O 点并与图面垂直的固定轴（用 x 轴表示）摆动。设 S 为摆的重心；a 是重心到悬挂点 O 的距离；ψ 是任意时刻 OS 与 OZ 轴的夹角，称为偏角，OZ 轴在垂线方向上，为摆的平衡位置；m 为摆的质量。

按理论力学中的转动定理有

$$J_x \frac{d\omega}{dt} = M_x \tag{1-2-1}$$

式中：J_x 为物理摆对固定轴 x 的转动惯量，

ω 为物理摆的摆动角速度，即

$$\omega=-\frac{d\psi}{dt} \tag{1-2-2}$$

此处负号表示偏角ψ增加，角速度ω减小。

M_x为重力分量对x轴的力矩。从图 1-2-1 看出：

$$M_x=mga\sin\psi \tag{1-2-3}$$

将（1-2-2）和（1-2-3）式代入（1-2-1）式，得

$$-J_x\frac{d^2\psi}{dt^2}=mga\sin\psi \tag{1-2-4}$$

令：
$$l=\frac{J_x}{am} \tag{1-2-5}$$

则从（1-2-4）式可得物理摆的运动方程为

$$-\frac{d^2\psi}{dt^2}=\frac{g}{l}\sin\psi \tag{1-2-6}$$

下面将解出这个微分方程式。

将上式左边乘以$2\frac{d\psi}{dt}dt$，右边乘以$2d\psi$，得

$$2\frac{d^2\psi}{dt^2}\cdot\frac{d\psi}{dt}dt=-2\frac{g}{l}\sin\psi d\psi$$

将上式两边同时积分，得

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2=2\frac{g}{l}\cos\psi+c \tag{1-2-7}$$

在上式中，c为积分常数，可按下列初始条件确定：当$t=0$时，$\psi=\alpha$，$\omega=-\frac{d\psi}{dt}=0$，$\alpha$为$OS$离开$Z$轴的最大偏角，称为摆幅（见图 1-2-1）。由此可得：

$$c = -2\frac{g}{l}\cos\alpha$$

再将常数 c 代入（1-2-7）式，得

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\psi - \cos\alpha) \qquad (1\text{-}2\text{-}8)$$

由于角速度的平方不会等于负值，因此只有当 $\cos\psi \geqslant \cos\alpha$ 时上式才有意义。

摆的摆幅由 $-\alpha$ 位置摆到 $+\alpha$ 位置所经历的时间 T 称为周期（这里定义的周期比物理学中定义的周期小一半）。由（1-2-8）式可求得：

$$T = \int_0^T dt = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\sqrt{\frac{l}{2g}}\ \frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}} \qquad (1\text{-}2\text{-}9)$$

根据三角学：

$$\cos\psi - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

代入（1-2-9）式，则得

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}} \qquad (1\text{-}2\text{-}10)$$

为了积分上式，引进一个新的积分变量。设

$$\sin\frac{\psi}{2} = k\sin\varphi \qquad (1\text{-}2\text{-}11)$$

$$k = \sin\frac{\alpha}{2}$$

将（1-2-11）式两边微分，得

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2}d\psi = k\cos\varphi d\varphi \qquad (1\text{-}2\text{-}12)$$

将（1-2-10）式按（1-2-11）和（1-2-12）两式变换成新的积分变量，则为

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\varphi}} \qquad (1\text{-}2\text{-}13)$$

上式为第一类椭圆积分。查积分表可得：

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-k^{2}\sin^{2}\varphi)}=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}k^{2}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^{2}k^{4}+\cdots\cdots+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n}\right)^{2}k^{2n}\right]$$

再将 k 用 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 代替，则（1-2-13）式变为：

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^{2}\frac{\alpha}{2}+\frac{9}{64}\sin^{4}\frac{\alpha}{2}+\cdots\cdots\right)$$

当摆幅 α 很小时，上式只取到平方项，并用 $\frac{\alpha}{2}$ 代替 $\sin\frac{\alpha}{2}$，则

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\alpha^{2}\right) \qquad (1\text{-}2\text{-}14)$$

若摆幅 α 为无穷小，则上式可写成：

$$T_{0}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1\text{-}2\text{-}15)$$

在上式中，l 如（1-2-5）式所示，它是几个物理量的组合，具有摆长的意义，称为改化摆长。由悬挂点 O 沿 OS 方向量取改化摆长 l 得到一点 B，称为摆动中心（见图1-2-1）。

按（1-2-15）式，只要测出改化摆长 l 和摆动周期 T，就可求得绝对重力值 g。为此，首先要讨论一下观测值 l 和 T 对 g 的误差影响。

将（1-2-15）式两边取对数，再进行微分，可得

$$\frac{dT}{T}=\frac{1}{2}\frac{dl}{l}-\frac{1}{2}\frac{dg}{g}$$

根据误差传播定理，上式可变为：

$$\left(\frac{m_g}{g}\right)^2=\left(\frac{2m_T}{T}\right)^2+\left(\frac{m_l}{l}\right)^2$$

式中 m_g，m_T，m_l 分别为重力、周期和改化摆长的中误差。

假定 m_T 和 m_l 对 m_g 的影响相等，并要求重力的测定精度为 1 毫伽，即 $\frac{m_g}{g}\approx 10^{-6}$，在此情况下，周期的允许观测误差必须是

$$m_T\approx\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}10^{-6}T=\pm 3.5\times 10^{-7}T$$

改化摆长的允许观测误差应为

$$m_l\approx\pm\frac{1}{\sqrt{2}}10^{-6}l=\pm 0.71\times 10^{-6}l$$

这就是说，如果要求重力测量达到 1 毫伽的精度，则当振摆周期为 1 秒时，周期观测误差不得超过 3.5×10^{-7} 秒；当改化摆长为 1 米时，它的量测误差不得超过 1 微米。由此可见，要求量测周期和改化摆长的精度是相当高的。这就必须周密考虑观测方法和仪器，同时还要充分消除各种外界因素对观测的影响。

振摆周期 T 是可以高精度观测出来的，而改化摆长 l 因是几个物理量的组合，在摆上并无一段具体长度可供量测。