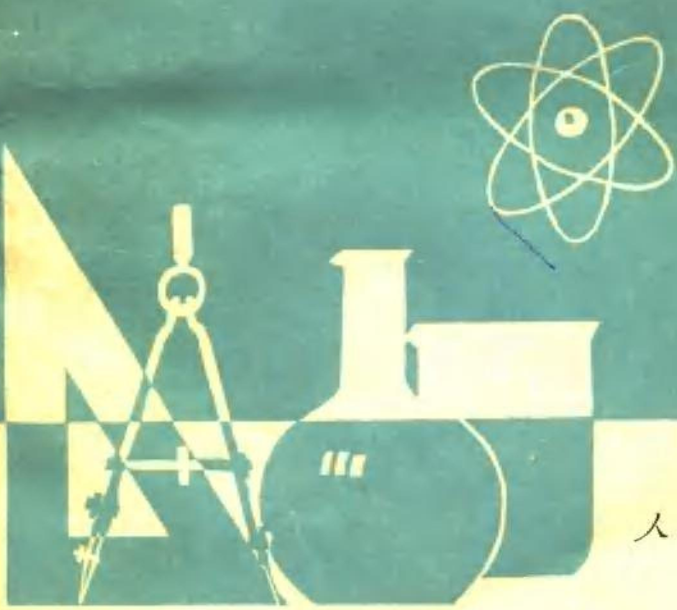
高中数学习题集

GAOZHONG SHUXUE XITI JI



浙江
人民出版社

高中数学习题集

杭州市中学数学教研大组编

浙江人民出版社

内 容 提 要

本书编选高中数学习题一千余题，分别写有简要的解题方法，较难习题附有“提示”。适合在校学生和知识青年自学，也可供教师教学参考。

高中数学习题集

杭州市中学数学教研大组编

*

浙江人民出版社出版

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本：787×1092 1/32 印张：12 3/4

1979年2月第一版

1979年2月第二次印刷

印数：500,001--650,000

统一书号：7103·1013

定 价： 0.87 元

（封面设计：周盛发）

编 者 的 话

数学是学习现代科学技术必不可少的基础知识，对于在本世纪内把我国建设成为农业、工业、国防和科学技术现代化的社会主义强国具有十分重要的作用。为了帮助知识青年和在校中学生学好数学知识，以适应实现四个现代化的需要，我们编写了《高中数学习题集》，供具有高中文化程度的知识青年自学和在校中学生课外练习，同时也可供中学数学教师教学参考。

全书内容分代数、三角、平面几何、立体几何、解析几何和综合题六个部分。各部分都编写了解题方法，较难习题附有提示，书后列有答案。希望读者选做习题时，先看各部分前面的解题方法，仔细审题，不要急于看提示、答案，培养独立思考，学会一题多解。这样有利于掌握解题规律，提高分析问题和解决问题的能力。

在编写过程中，我们得到了杭州市广大中学数学教师的热情支持，提供了大量的习题和多年积累的宝贵资料，部分同志并直接参加本书的编写工作，付出了辛勤的劳动，谨向他们表示衷心的感谢。

由于时间仓促，水平有限，一定存在不少缺点，希望读者批评指正。

编　　者

1978年4月

目　　录

一、代　　数

（一）实　　数

（1）实数的分类：

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

① 无理数是无限不循环小数。不尽方根如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt[3]{2}$、…… 等是无理数。但无理数不一定是不尽方根，如π(3.141592……)、e(2.71828……)等也是无理数。

② 每一个有理数都可以表示为$\frac{n}{m}$的形式（其中m、n是整数，$m\neq0$)，反过来，每一个形式如$\frac{n}{m}$的数（其中m、n是整数，$m\neq0$）是有理数。因此，要判断一个数是有理数还是无理数，

就可以研究它能不能表示为$\frac{n}{m}$的形式。

③ 整数可以分为偶数和奇数两类：每一个偶数可以表示为$2n$（n是整数）的形式；每一个奇数可以表示为$2n-1$（或$2n+1$，其中n是整数）的形式。反过来，$2n$（n是整数）是偶数，$2n-1$（n是整数）是奇数。

（2）$|a|$表示实数a的绝对值。当a代表正数或零的时候，$|a|$就等于a；当a代表负数的时候，$|a|$就等于$-a$. 也就是：$|a|=\begin{cases} a & 当 a\geqslant 0 \\ -a & 当 a<0 \end{cases}$. 因此，$|a|$总是一个非负的数。遇到有关$|a|$的问题，一般要就$a\geqslant 0$及$a<0$的情况按照上面的规定，分别脱去绝对值的符号，分别作出解答。

（3）在没有特别说明的情况下，对于字母代表的实数，应当考虑到它的各种不同情况，不能仅仅从形式上去判断它代表什么数。例如$-a$可能是正数、也可能是负数，$\sqrt{a}$可能是无理数也可能是有理数，也可能没有意义；又例如，对于不等式$x>\frac{1}{x}$，不能把x当作正数而变形为$x^2>1$等等。

1. 在数-1.6，$1.\dot{6}$，$\sqrt{1.6}$，$\lg 3$，$1-i$，$\operatorname{tg} 60°$，0，$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$中：

（1）哪几个是有理数；

（2）哪几个是无理数；

（3）哪几个是实数；

（4）在数轴上记出所有的实数；

（5）按从小到大的顺序，用不等号联结起来。

2．回答下列各题，并能说明理由：

（1）什么数的相反数是$-\sqrt{3}$？

（2）3是什么数的倒数？

（3）$\frac{1}{4}$与-0.25是不是互为相反数？

（4）$\sqrt{2}$与$-\frac{\sqrt{2}}{2}$是不是互为倒数？

（5）任何实数是否都存在它的相反数？都存在它的倒数？

3．已知x、y是实数，在什么情况下，$\frac{y}{x}$是（1）正数；（2）负数；（3）零；（4）没有意义；（5）整数。

4．a和$\frac{1}{a}$可能一个是有理数而另一个是无理数吗？举例说明。

5．是否任何无限小数都是无理数？两个无理数的和与积能否是有理数？举例说明。

6．计算：

（1）$\left|-\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{1}{2}\right|$；　　（2）$\left|-\frac{1}{3}\right|-\left|\frac{1}{2}\right|$；

（3）$\left|-\frac{1}{3}\right|\times\left|\frac{1}{2}\right|$；　　（4）$\left|-\frac{1}{3}\right|\div\left|\frac{1}{2}\right|$；

（5）$\left|-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right|$；　　（6）$\left|-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|$；

（7）$\left|-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right|$；　　（8）$\left|-\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}\right|$.

7．下列各对数有什么区别？为什么？

（1）3^2和3×2；　　（2）$(-3)^2$和-3^2；

（3）$(-2)^3$和-2^3；　　（4）2×3^2和$(2\times3)^2$；

(5) $\left(\frac{2a}{3}\right)^2$ 和 $\frac{2a^2}{3}$。

8．计算：

(1) $\left(1\frac{3}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)\div1\frac{1}{6}\div4$；

(2) $2.25+\left[4\times\frac{3}{16}-\left(\frac{7}{8}-0.875\right)\right]$；

(3) $-3-\left[-5+\left(1-\frac{2}{3}\times0.6\right)\div(-3)\right]$；

(4) $\frac{2}{5}\div\left(-2\frac{2}{5}\right)-\frac{8}{21}\left(-1\frac{3}{4}\right)-0.75$；

(5) $(-2)^4\times(-5)-[(-3)^3-(-4)^2\times(-1)^5]$；

(6) $1\div[(-2)^2\times0.5^2-(-2.24)\div(-2)^3]-1\frac{7}{18}$；

(7) $\dfrac{-1\frac{2}{3}\times\left(0.5-\frac{2}{3}\right)}{-\frac{1}{2}+1\div1\frac{2}{7}}$.

9．用科学记数法记出下列各数，即写成 $a\times10^n$ 的形式（$1\leqslant a<10$）：

(1) 1 吨＝1000000 克；

(2) 11立方米＝11000000000 立方毫米；

(3) 光波速度约 300000000 米/秒；

(4) 地球的质量约为五十九万八千亿亿吨。

10．求证$\sqrt{2}$不是有理数。

（二）数的整除

研究某数能否被另一数 a 整除，一般有以下几种方法：

(1) 把该数拆成两部分，使其中一部分能被 a 整除，于是，只要研究另一部分能否被 a 整除；

(2) 把该数分解出含有数 a 的因子；

(3) 利用数学归纳法证明；

(4) 利用二项式展开定理加以研究。

如果研究一个多项式 A 能否被另一多项式 B 整除，那末还可以从多项式 A 能否包含多项式 B 的所有根来判别。

1．求证：若某数的数码和是 3 的倍数，则此数能被 3 整除；

提示：一个 n 位数可写成 $a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_k 10^{n-k} + \cdots + a_n$，并且注意 $a_k 10^{n-k} = a_k(\overbrace{99\cdots9}^{(n-k)\text{个}9}+1) = \overbrace{99\cdots9}^{(n-k)\text{个}9}a_k + a_k$，即每一个数位都拆成两部分：第一部分能被 3 整除，第二部分就是该数位上的数码。

2．求证：若一数的末两位是 4（或 25）的倍数，则此数能被 4（或 25）整除。

提示：只要说明 $a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_k 10^{n-k} + \cdots + a_{n-2} 10^2$ 能被 4（或25）整除。

3．求证：若一数的奇数位上的数码和与偶数位上的数码和之差是 11 的倍数，则此数能被 11 整除。

提示：$a_k 10^{n-k} = a_k(11-1)^{n-k}$．应用二项式定理展开：

$a_k(11-1)^{n-k} = a_k[11^{n-k} + C_{n-k} \cdot 11^{n-k-1}(-1)$

$$
\begin{aligned}
&+C_{n-k}^{2}\cdot 11^{n-k-2}(-1)^{2}+\cdots \\
&+C_{n-k}^{n-k-1}\cdot 11\cdot(-1)^{n-k-1}+(-1)^{n-k}] \\
=\;&11a_k[11^{n-k-1}+C_{n-k}\cdot 11^{n-k-2}(-1) \\
&+C_{n-k}^{2}11^{n-k-3}(-1)^{2}+\cdots \\
&+C_{n-k}^{n-k-1}11(-1)^{n-k-1}]+(-1)^{n-k}a_k.
\end{aligned}
$$

4．试求 101^{10} 除以 11 所得的余数。

提示：$101^{10}=(99+2)^{10}$，展开后的前10项都能被11整除，只须求 2^{10} 除以 11 所得的余数即可。

5．求证：$3^{2n+2}-8n-9$ 是 64 的倍数。（n 为正整数）

提示：$3^{2n+2}=(3^2)^{n+1}=(1+8)^{n+1}$，利用二项式定理展开。

6．求证：$17^{2n}-1$ 是 288 的倍数。（n 为正整数）

提示：$17^{2n}-1=(17^2)^n-1=289^n-1^n$.

a^n-1^n 可以被 $a-1$整除。

7．求证：$13^{2n}-1$ 是 168 的倍数。（n 为正整数）

提示：（同上题类似）。

8．求证：$53^{53}-33^{33}$ 能被 10 整除。

提示：(a) $53^{53}=(50+3)^{53}$，$33^{33}=(30+3)^{33}$，

(b) $3^{53}-3^{33}=3^{33}(3^{20}-1)=3^{33}[(3^4)^5-1^5]$

$=33^{33}(81^5-1^5)$.

9．至少对于怎样的自然数 n，数 $n!$ 才能被下列各数整除？

① 6；② 8；③ 15；④ $P_1\cdot P_2$(其中 P_1 和 P_2 是质数)。

提示：把 6，8，15分解为质数的乘积。

10．求证下列各题：

① 两个连续的奇数的平方差是 8 的倍数；

② 任何奇数（除 1 以外）的平方减 1 是 8 的倍数；

③ 相邻两个整数的平方差是奇数；

④ 四个连续整数的乘积加 1 是一个完全平方数；

⑤ 三个连续整数的立方和能被 3 整除。

提示：奇数用 $2k-1$ 表示；偶数用 $2k$ 表示；相邻两数记作 $k,k+1$；相邻两奇数记作 $2k-1,2k+1$，$\sum_{n-1}^{n+1}k^3=3n(n^2+2)$（$k$ 为自然数）。

11．求证：$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ 对于任何正整数 n 都是整数，并且是 3 的倍数。

提示：因式分解 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$.

注意：两个连续正整数，其中必有一个偶数。

$\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}$. 三个连续正整数必有一个是 3 的倍数。

12．有一个三位数，其数字成等差数列。原数除以数字的和得商15；又原数加396，则其和仍为三位数而数字顺序与原数字相反，求原数。

提示：设等差数列的首项为 a，公差为 d，则三位数为 $(a+2d)+10(a+d)+a$.

13．求证：n^3+5n 是 6 的倍数。（n 是正整数）

提示：用数学归纳法证明。

14．求证：三个连续自然数的积能被 3 整除。

提示：用数学归纳法证明。

15．连续四个奇数之和的平方为各数平方和的 3 倍多 84，求这四个奇数。

提示：设四个奇数为 $2n-3$，$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$.

（三）代数式恒等变形

(1) 代数式的恒等变形是改变代数式的形式，而它的值保持不变。进行恒等变形，需要熟练选用整式、分式、根式（包括有理数指数幂）等的性质、运算法则和公式，并注意变形过程中字母的允许范围。

(2) 这里，补充交代一下多项式的几条性质，以利于解下面的题目。

① 多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 除以 $(x-k)$ 所得的余数等于 $f(k)$. 如果 $f(x)$ 能够分解出一个因式 $(x-k)$（就是 $f(x)$ 被 $x-k$ 整除），那么，必有 $f(k)=0$. 反过来，如果 $f(k)=0$，那么，$f(x)$ 必定有一个因式是 $(x-k)$（就是 $f(x)$ 必定被 $x-k$ 整除）。

② 多项式 $f(x)$ 和多项式 $\phi(x)$ 恒等，那么，对应项的系数必相等，反过来也成立。

③ 如果 $f(x)$ 的系数都是实数，若 $f(a+bi)=0$，那么，$f(a-bi)=0(b\neq0)$. 就是说，实系数一元 n 次方程，虚根总是成对的。

④ 如果 $f(x)$ 的系数都是整数，若 $f(a+\sqrt{b})=0$，那么 $f(a-\sqrt{b})=0$（a 和 b 是有理数，$\sqrt{b}$ 是无理数）. 就是说，整系数一元 n 次方程的无理根总是成对的。

(3) 将多项式进行因式分解，除了应用提取公因式、分组分解、十字相乘、应用乘法公式等方法以外，还可以应用以上多项式的性质。特别的，如果一个多项式 $f(x)$ 的系数是整数（如果是有理数，则可化为整数系数），那么，这个多项式就可

能有$(x+k)$的因式，其中k是有理数，且$k=\pm\frac{n}{m}$，m是首项系数的因数，n是常数项的因数。这只要利用综合除法，逐一试除即可。例如：

$9x^4-3x^3+7x^2-3x-2$的因式,可能是：$x\pm1$、$x\pm2$、$x\pm\frac{1}{3}$、$x\pm\frac{2}{3}$、$x\pm\frac{1}{9}$、$x\pm\frac{2}{9}$.逐一进行试除即可得因式$\left(x+\frac{1}{3}\right)$、$\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

(4) 根式的恒等变形,经常应用根式的意义：$(\sqrt[n]{a})^n=a$, $(a\geqslant0)$，当n为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & (a\geqslant0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$；根式的基本性质：$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mK]{a^{nK}}$；根式运算的法则：$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$，$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$等。必须注意，这些性质和公式都是在$a\geqslant0,b\geqslant0$(或$b>0$)的前提下成立的,如果忽视这一点,常常会得到错误的结果。又$\sqrt{A}$在有意义的情况下，只表示正的平方根，$\sqrt{A}$不能等于一个负数。遇到$\sqrt{x^2}$、$\sqrt{(a-b)^2}$等一类问题时,更应注意这一点。还有,如果一个式子有若干个根式,它们之间不夹着加、减,则化为分数指数来做，常常可以方便一些。

1. 数“1”可以用哪些数学式子来代换？试举出一些例子。

2. 下列各式运算对不对？如果是错的，写出正确的答案：

(1) $\frac{x-y}{a+b}-\frac{x+y}{a+b}=\frac{x-y-x+y}{a+b}=\frac{0}{a+b}=0$；

(2) $\frac{2x-3y}{2}=x-3y$；

(3) $\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2+b^2$；

(4) $(-1)^{-1}=-(-1)=1$；

(5) $\frac{1}{a^{-1}+b^{-1}}=a+b$；

(6) $a^{-1}-b^{-1}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$；

(7) $(a^{-1}+b^{-1})^2=a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$；

(8) $(a+b)^{-2}=a^{-2}+2ab+b^{-2}$；

(9) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3-2=1$；

(10) $\sqrt{25}=\pm 5$；

(11) $\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$；

(12) $\sqrt{(-3)^2}=-3$；

(13) $\sqrt{x^2-9}=x-3$；

(14) $\sqrt{x^2}=\pm x$；

(15) $\sqrt{x^2+2xy+y^2}=x+y$；

(16) $8\sqrt{6}\div 2\sqrt{3}=(8\div 2)(\sqrt{6}\div\sqrt{3})$；

(17) $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=\sqrt[6]{99-70\sqrt{2}}$；

(18) $y=-2x^2-x-1=2x^2+x+1$；

(19) $\frac{x-c}{(x+a)(x+b)}-1=(x-c)-(x+a)(x+b)$；

(20) $\sin 4x=4\sin x$；

(21) $\sin(-3x)=-\sin 3x$；

(22) $\cos(-5x)=-\cos 5x$;

(23) $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$;

(24) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha$;

(25) $\sqrt{\cos^2 245^\circ}=\cos 245^\circ$;

(26) $\lg 5+\lg 8=\lg 13$;

(27) $(\log_a x)^2=2\log_a x$;

(28) $(\log_2 27)\div 3=\log_2 3$;

(29) $\dfrac{\lg 16}{\lg 2}=\lg 8$;

(30) $\log_a(x^2+1)-\log_a x^2=\log_a 1=0$;

(31) $\lg(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}})=\dfrac{1}{2}\lg a+\dfrac{1}{3}\lg b$.

将下列各式因式分解：(3-7)

3. (1) $(x^3+y^3)^2-9x^2y^2(x+y)^2$;

(2) $ab-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)+\dfrac{1}{8}c^2$;

(3) $(1+y)^2-2x^2(1-y^2)+x^4(y-1)^2$;

(4) $x^4+x^2-2ax+1-a^2$;

(5) $x^2y^2-x^2-y^2-4xy+1$;

(6) $(x+y)^4+(x^2-y^2)^2+(x-y)^4$;

(7) $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)+16$;

(8) $(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)-6$.

4. (1) $a^4+\dfrac{1}{4}$; 提示：配中项。

(2) $x^4+y^4+(x+y)^4$;

提示：将 x^4+y^4 化为 $(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$.

(3) $(b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2+(ab-ac)^2+a^4$;