最新"全国高中数学联赛"模拟卷
国家集训队教练执笔联合编写

畅销15年
超1200万册

总主编 单墫 熊斌

奥数教程
能力测试

·配《奥数教程》第六版·

高三年级

本册主编 余红兵

上海市著名商标
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

总主编 单墫 熊斌

奥数教程能力测试

·配《奥数教程》第六版·

华东师范大学出版社

高三年级

本册主编 余红兵
参编者 边红平 冯志刚
葛军 刘诗雄
单墫 熊斌
余红兵

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程能力测试. 高三年级/单墫,熊斌主编;余红兵分册主编. —上海:华东师范大学出版社,2010.6
ISBN 978-7-5617-7920-0

Ⅰ.①奥… Ⅱ.①单…②熊…③余… Ⅲ.①数学课—高中—习题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 125435 号

奥数教程(第六版)能力测试

高三年级

总 主 编 单 墫 熊 斌
本册主编 余红兵
总 策 划 倪 明
项目编辑 孔令志
审读编辑 胡红梅
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者 上海景条印刷有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 7
字 数 147 千字
版 次 2014 年 7 月第二版
印 次 2016 年 2 月第 5 次
书 号 ISBN 978-7-5617-7920-0/G·4627
定 价 15.00 元

出 版 人 王 焰

前　言

由华罗庚、苏步青等老一辈数学家倡导发起，中国数学会举办的“全国高中数学联赛”旨在提高学生学习数学的兴趣，推动课外活动的开展，发现和培养理科人才，促进基础教育的改革.

2009年全国高中数学联赛从题型、题量、考试时间等方面都进行了大幅调整，2010年联赛将在前一年的基础上进行微调，调整后的一试包括8道填空题（每题8分）、3道解答题（分别为16分、20分、20分），满分120分，考试时间为80分钟；加试共4道题，涉及平面几何、代数、数论、组合四个方面，4道题的分值依次为40分、40分、50分、50分，满分180分，考试时间为150分钟.

本书根据全国高中数学联赛最新的精神与模式，提供了14套模拟试题，以及详细的解答.参加编写工作的老师为边红平（试题（一）、（二）），冯志刚（试题（三）、（四）），葛军（试题（五）、（六）），刘诗雄（试题（七）、（八）），单墫（试题（九）、（十）），熊斌（试题（十一）、（十二）），余红兵（试题（十三）、（十四））.本书的统稿工作由余红兵老师负责.

华东师范大学出版社

目　录

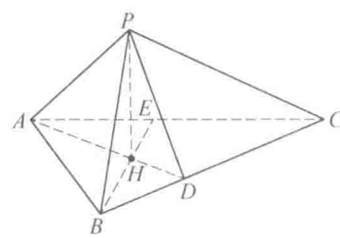
全国高中数学联赛模拟试题(一)

一　试

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1 已知 $f:\mathbf{N}_+\rightarrow\mathbf{N}_+$ 严格递增,且对一切 $n\in\mathbf{N}_+$,都有 $f(f(n))=3n$. 则 $f(2014)=$ ________.

2 如图,四面体 $P-ABC$ 的体积 $V=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $AC=AB$, $BC=2$, P 在底面 ABC 上的射影为 $\triangle ABC$ 的垂心 H,则二面角 $P-BC-A$ 的大小为 ________.



(第 2 题)

3 设 O 为 $\triangle ABC$(三边长分别为 a、b、c)内任一点, $\triangle OBC$、$\triangle OAC$、$\triangle OAB$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3,则 $S_1\cdot\overrightarrow{OA}+S_2\cdot\overrightarrow{OB}+S_3\cdot\overrightarrow{OC}=$ ________.

4 已知实数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的各项都不为 0,且当 $n\geqslant 2$ 时,

$a_n=\dfrac{3}{5}a_{n-1}-\dfrac{4}{5}b_{n-1}$, $b_n=\dfrac{4}{5}a_{n-1}+\dfrac{3}{5}b_{n-1}$,其中 $a_1=1$, $b_1=\dfrac{4}{3}$. 则通项公式 $\{a_n\}=$ ________; $\{b_n\}=$ ________.

5 一个边长为 8 的正方形,被 7 条水平线和 7 条竖直线分成 64 个小正方形,所有由水平线和竖直线(包括大正方形的边)构成的矩形中,是正方形且面积大于 1 的概率是 ________.

6 设实数 x 满足 $\sec x+\tan x=\dfrac{22}{7}$, $\csc x-\cot x=\dfrac{m}{n}$(正整数 m、n 没有大于 1 的公约数),则 $m+n=$ ________.

7 已知:x、y、z 是非 0 实数,且 $x+y+z=0$,则 $f=\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{zx}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}$ 的最大值为 ________.

8 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意一点, F_1、F_2 是椭圆的焦点,延长 PF_1、PF_2 分别交椭圆于 A、B 两点,则 $\dfrac{|PF_1|}{|F_1A|}+\dfrac{|PF_2|}{|F_2B|}$ 的值为 ________.

二、解答题(共 56 分)

9 (16 分)实数数列 x_0, x_1, x_2, $\cdots$ 定义为 $x_0=2014$, $x_n=-\dfrac{2014}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}x_k(n\geqslant 1)$,则 $\sum\limits_{n=0}^{2014}2^n x_n$ 的值为 ________.

10 (20 分)已知 $n \in \mathbf{N}_+$，$n > 1$，n 个实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足：

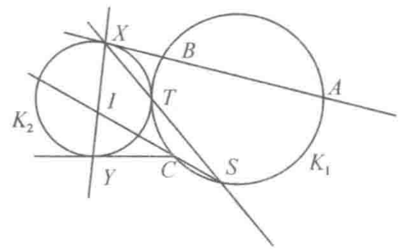
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0,$$
$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = 1.$$

求证：$|a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n| \leqslant \frac{n-1}{2}$.

11 (20 分)已知函数 $y = |x| + 1$，$y = \sqrt{x^2 - 2x + 2 + t}$，$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1-t}{x}\right)(x > 0)$ 的最小值恰好是方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的三个根，其中 $0 < t < 1$. $A(x_1, M)$、$B(x_2, N)$ 两点是函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的图象上两个达到极值的点. 求 $|M - N|$ 的取值范围.

加　试

1 (40 分)设两个圆 K_1、K_2 外切于点 T,过圆 K_2 上一点 X 的切线交圆 K_1 于点 A、B,S 是直线 XT 与圆 K_1 的另一个交点. 在弧 TS(不包含 A、B)上取一点 C,过点 C 作圆 K_2 的切线 CY,切点为 Y,并且线段 CY 与线段 ST 没有交点. 记 I 为直线 XY、SC 的交点. 求证:AI 平分$\angle BAC$.



(第 1 题)

2 (40 分)已知函数 $f:\mathbf{N}_+ \to \mathbf{N}_+$ 满足:

(1) 对所有正整数 k、n,有 $kf(n) \leqslant f(kn) \leqslant kf(n)+k-1$;

(2) 对任意正整数 n,有 $f(2014n) \leqslant 2014f(n)+2012$.

求证:存在正整数 m,使得 $f(2014m)=2014f(m)$.

3 (50 分) 已知存在唯一一个定义在 $\mathbf{Z}$ 上的整值函数 $f(x)$，满足：(1) $0 \leqslant f(x) \leqslant 97$；(2) 当 $x \in \mathbf{Z}$ 时，$f(x+97)=f(x)$；(3) $f(2)=49$；(4) 当 $x, y \in \mathbf{Z}$ 时，$f(x)f(y)=f(xy) \pmod{97}$. 求使 $f(x)=91$ 成立的最小正整数 x.

4 (50 分) 给定正整数 n，求具有下面性质的最小正整数 k：用 n 色染 $2n \times k$ 的棋盘，对于每种染色方式，都存在 4 个同色小方格，它们的中心是一个矩形的四个顶点，且此矩形的边平行于棋盘的边界线.

全国高中数学联赛模拟试题(二)

一 试

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1 复数 a、b、c 满足 $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2014$,且 $a\neq b$. 则 $c^2(a+b)=$ ________.

2 对任意 $x, y\in\mathbf{R}^+$,函数 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 满足:$x^2f(y)-y^2f(x)\geqslant(x^4-y^4)f(x)f(y)$, $f(1)=\frac{1}{2}$,则 $f(10)=$ ________.

3 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点,且满足 $3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$,则 $S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}=$ ________.

4 对于实数 x, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 对于某个整数 k,恰存在 2014 个正整数 n_1, n_2, $\cdots$, n_{2014} 满足:$k=[\sqrt[3]{n_1}]=[\sqrt[3]{n_2}]=\cdots=[\sqrt[3]{n_{2014}}]$,并且 k 整除 $n_i(i=1, 2, \cdots, 2014)$,则 $k=$ ________.

5 已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2,过椭圆的右焦点 F_2 作一条直线 l 交椭圆于点 P、Q,则 $\triangle F_1PQ$ 内切圆面积的最大值是________.

6 在四面体 $ABCD$ 中,面 ABC 与面 BCD 成 60° 的二面角,顶点 A 在面 BCD 上的射影 H 是 $\triangle BCD$ 的垂心,G 是 $\triangle ABC$ 的重心,若 $AH=4$, $AB=AC$,则 $GH=$ ________.

7 已知 $abc=-1$, $\frac{a^2}{c}+\frac{b}{c^2}=1$,则 $ab^5+bc^5+ca^5=$ ________.

8 $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\cdots(1+\tan 44^\circ)$ 的值为________.

二、解答题(共 56 分)

9 (16 分)已知 x_1, x_2, $\cdots$, x_{n+1} 是 $n+1$ 个正实数.证明:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_1x_2x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}\geqslant 4(1-x_1x_2\cdots x_{n+1}).$$

10 (20 分)2014 个实数 x_1，x_2，…，x_{2014}满足方程组：

$$\sum_{k=1}^{2014} \frac{x_k}{n+k}=\frac{1}{2n+1},\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ 2014,$$

试计算 $\sum\limits_{k=1}^{2014} \frac{x_k}{2k+1}$ 的值.

11 (20 分)已知集合 $M=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 99\}$，现随机选取 M 中 9 个元素做成子集，记该子集中的最小数为 ξ. 计算 $E\xi$ 的值.

加 试

1 (40 分)点 M、N、P 在锐角 $\triangle ABC$ 内,满足 $\angle MAB=\angle MCA$, $\angle MAC=\angle MBA$; $\angle NBA=\angle NCB$, $\angle NBC=\angle NAB$; $\angle PCA=\angle PBC$, $\angle PCB=\angle PAC$. 求证:直线 AM、BN、CP 共点,且它们的交点在$\triangle MNP$ 的外接圆上.

2 (40 分)n 是一个正整数,实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 和 r_1, r_2, $\cdots$, r_n 满足:$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, $0\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_n$,求证: $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_ia_j\min(r_i, r_j)\geqslant 0$.

3 (50 分)求证:存在八个连续正整数,每个都不能表示成$|7x^2+9xy-5y^2|$的形式($x, y\in \mathbf{Z}$).

4 (50 分)$n\in \mathbf{N}_+$, $m\in \mathbf{N}_+$. $A=\{1, 2, \cdots, n\}$, $B=\{1, 2, \cdots, m\}$,集合$S\subseteq\{(u, v)\mid u\in A, v\in B\}$,满足对任意$(a, b)\in S$, $(x, y)\in S$均有$(a-x)(b-y)\leqslant 0$. 求$|S|_{\max}$.

全国高中数学联赛模拟试题(三)

一 试

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1 满足等式:$\sqrt{2a+a^2+|2a+1-2b|}=a+2b-b^2$ 的所有整数对(a,b)为________.

2 设 S_n 是集合 $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$的所有 3 元子集的最大元素之和,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=$________.

3 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,且点$\left(0,\frac{3}{2}\right)$到椭圆上的点的最远距离为$\frac{7}{4}$,则 $b=$________.

4 将一个棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 切去四个三棱锥 $A-A_1BD$、$B-B_1AC$、$C-C_1BD$、$D-D_1AC$. 则剩余部分所成的几何体的体积为________.

5 平面上的点集 $M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\log_2(x^2-x+2)=\sin y-\sqrt{3}\cos y,\ \frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\pi\right\}$,将$M$中的点向 x 轴作投影,所得图形的长度为________.

6 已知 a、b 为正实数,复数 z 满足 $|z|\leqslant 1$,且 $z+z|z|=a+b\mathrm{i}$. 则 ab 的最大值为________.

7 一个由非负整数组成的数列$\{a_n\}$满足:$a_0=0$,对任意正整数 n 都有 $a_n\leqslant n$,并且有$\sum\limits_{k=0}^{n}\cos\frac{\pi a_k}{n}=0$. 则 $a_{2014}=$________.

8 已知存在 n 个属于区间$(-1,1)$内的实数 $a_1,\cdots,a_n$ 使得$\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_n=0\\a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=20\end{cases}$,则正整数 n 的最小可能值为________.

二、解答题(共 56 分)

9 (16 分)设 x、y、z 都为正实数. 证明:

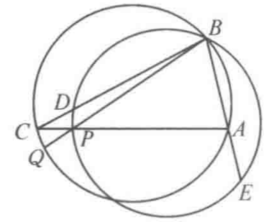
$$\sqrt{(z+x)(z+y)}-z\geqslant\frac{2xy}{x+y}.$$

10 (20 分)设 a、b、k 都是正实数,一个以点(a, b)为圆心的过坐标原点的圆与抛物线 $y = kx^2$ 有异于原点的另外两个交点,它们都落在直线 $y = kx + b$ 上.求 b 的最小可能值.

11 (20 分)给定正实数 x_1、y_1、z_1,定义数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$如下:$x_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n}$; $y_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n}$; $z_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n}$.证明:在数 x_{200}、y_{200}、z_{200} 中必有一个数大于 20.

加　试

1 (40 分)如图所示,在$\triangle ABC$中,$BC > CA > AB$. D是边BC上一点,E为射线BA上一点,使得$BD = BE = CA$.设P是$\triangle BDE$的外接圆与边AC的交点,Q是直线BP与$\triangle ABC$的外接圆的另一个交点.证明:$AQ + CQ = BP$.



(第 1 题)

2 (40 分)设n是一个不小于 2 的正整数,n个正整数a_1, a_2, …, a_n的和为偶数,并且对任意$1 \leqslant k \leqslant n$,都有$a_k \leqslant k$.证明:可以恰当地选择"+"或"−"号,使得

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0.$$

3 (50 分)对非负整数 m、n，设 $a_{m,n}$ 表示多项式$(1+x+x^2)^m$ 的展开式中 x^n 的系数.

证明：对任意非负整数 k，都有 $0 \leqslant \sum_{i=0}^{\left[\frac{2k}{3}\right]}(-1)^i a_{k-i,i} \leqslant 1$.

4 (50 分)设 n 是一个不小于 3 的正整数，正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之和为 1. 证明：

$$\frac{a_2a_3\cdots a_n}{a_1+(n-2)}+\frac{a_1a_3\cdots a_n}{a_2+(n-2)}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{a_n+(n-2)} \leqslant \frac{1}{(n-1)^2}.$$