

微积分和数学分析引论

第二卷 第二分册

R. 柯朗 F. 约翰 著

科学出版社

微积分和数学分析引论

第二卷 第二分册

R. 柯朗 F. 约翰 著

张恭庆 廖可人 邓东皋 译
吴兰成 叶其孝 林源渠
叶其孝 校

科学出版社

1989

内 容 简 介

本书是柯朗等著的《微积分和数学分析引论》第二卷、第四、五章的汉译本。第四章介绍多重积分；第五章讲述曲面积分和体积分之间的关系。各章节都有例题、习题和解答并备以附录介绍相关的内容。

读者对象为理工科师生和工程技术人员。

R. Courant F. John
INTRODUCTION TO CALCULUS AND ANALYSIS
Volume 2
John Wiley and Sons, Inc. 1974

微积分和数学分析引论

第二卷 第二分册

R. 柯朗 F. 约翰 著

张恭庆 廖可人 邓东皋 译

吴兰成 叶其孝 林源乘 译

叶其孝 校

责任编辑 徐宇星 刘嘉善

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989年5月第一版 开本：850×1168 1/32

1989年5月第一次印刷 印张：10

印数：0001—3,230 字数：262,000

ISBN 7-03-000926-6/O · 224

定价：6.50 元

JY1161112

序 言

R. 柯朗的《微积分 (Differential and Integral Calculus)》, 卷一和卷二, 获得了巨大的成功, 引导了几代数学家进入高等数学的领域。整套书阐发了这样一条富有教益的道理: 真正有意义的数学是由直观想象与演绎推理相结合而创造出来的。在准备本修订版的过程中, 著者们力图保持原著所特有的这两种思维方式的合理结合。虽然 R. 柯朗未能亲眼看到这第二卷的修订本的出版, 但是在柯朗博士于 1972 年 1 月去世之前, 所有主要的修改内容都已经由著者们商量出一致的意见并草拟了纲要。

从一开始, 著者们就清楚地理解到, 阐述多元函数的第二卷应当比第一卷作更大的修改。特别是, 似乎最好用与一维空间中的积分法同样程度的严密性和普遍性来处理高维空间中的积分法的所有基本定理。另外, 若干具有根本重要性的新概念和新论题, 它们在著者们看来, 是属于数学分析引论的。

本卷末尾较短的几章(六、七、八)(分别讲微分方程、变分法、复变函数的), 仅作了较小的改动。在本卷的主体部分(第一至第五章)中, 我们尽量保存了原来的体系, 各章的主题都在不同的水平上按大体上平行的两条线索进行阐述: 一条是较多地基于直观论证的非正式引述, 一条是为后续的严密证明打基础的、对于应用的讨论。

原来的第一章中所讲的线性代数的材料, 看来已不足以作为扩展了的微积分结构的基础。因此, 这一章(现在的第二章)完全重写了, 现在讲述了所需要的 n 阶的行列式、矩阵、多线性型、格拉姆行列式、线性流形等的一切性质。

现在的第一章包括了线性微分型及其积分的所有基本性质。这就为读者提供了阅读第三章(第 3.6 节)新添的高阶外微分型的

预备知识。现在的第三章中还新添了一个关于隐函数定理的利用逐次逼近法的证明，一个关于临界点的个数和二维向量场的指数的讨论。

在第四和第五章中，对重积分的基本性质作了大量的增补。这里面临着大家熟知的困难：展布在一个流形 M 上的积分，很容易通过把 M 适当划分成小片来定义，却必需证明它不依赖于特殊的分划。这由系统地使用约当可测集类的有限交性质和单位分划而解决了。为了使应用拓扑学上的复杂性减少到最低限度，我们只考虑了光滑地嵌入于欧氏空间中的流形。另外，对流形的“定向”的概念也作了详细的研讨，这是要讨论外微分型的积分及其可加性所必需的。在这个基础上我们给出了 n 维空间中的散度定理和司铎克斯定理的证明。在第四章关于傅立叶积分的一节（第4.13节）里，还新添了关于巴色瓦恒等式和傅立叶重积分的论述。

在这一卷的准备过程中，最珍贵的是，著者们能不断得到两位朋友慷慨的帮助，一位是 Carnegie-Mellon 大学的 Albert A. Blank 教授，一位是 Negev 大学的 Alan Solomon 教授。在几乎每一页上都有着他们的批评、改正、建议的痕迹。他们还为一卷准备了练习题和问题。

我们感谢 K. O. Friedrichs 教授和 Donald Ludwig 教授的建设的宝贵建议，还感谢 John Wiley and Sons 公司及其编辑部的不断鼓励和帮助。

F. 约翰

纽约，1973年9月

目 录

序言	i
第一章 多元函数及其导数	1
1.1 平面和空间的点和点集	1
a. 点的序列: 收敛性 (1) b. 平面上的点集 (3) c. 集合的边界. 闭集与开集 (6) d. 闭包作为极限点的集合 (8) e. 空间的点与点集 (9)	
练习 1.1	10
问题 1.1	11
1.2 几个自变量的函数	11
a. 函数及其定义域 (11) b. 最简单的函数 (12) c. 函数的几何表示法 (13)	
练习 1.2	15
1.3 连续性	17
a. 定义 (17) b. 多元函数的极限概念 (19) c. 无穷小函数的阶 (22)	
练习 1.3	24
问题 1.3	27
1.4 函数的偏导数	27
a. 定义. 几何表示 (27)	
练习 1.4 a	31
问题 1.4 a	33
b. 例 (33) c. 偏导数的连续性与存在性 (35)	
练习 1.4c	36
d. 微分次序的改变 (37)	
练习 1.4 d	40
问题 1.4 d	40
1.5 函数的全微分及其几何意义	41
a. 可微性的概念 (41)	

练习 1.5 a	43
问题 1.5 a	44
b. 方向导数 (44)	
练习 1.5 b	46
c. 可微性的几何解释. 切平面 (47)	
练习 1.5 c	49
d. 函数的微分 (50)	
练习 1.5 d	53
e. 在误差计算方面的应用 (53)	
练习 1.5 e	54
1.6 函数的函数(复合函数)与新自变量的引入.....	55
a. 复合函数. 链式法则 (55)	
练习 1.6 a	59
问题 1.6 a	60
b. 例 (61) c. 自变量的替换 (62)	
练习 1.6 c	65
问题 1.6 c	66
1.7 多元函数的中值定理与泰勒定理	66
a. 关于用多项式作近似的预备知识 (66)	
练习 1.7 a	67
b. 中值定理 (68)	
练习 1.7 b	69
问题 1.7 b	70
c. 多个自变量的泰勒定理 (70)	
练习 1.7 c	72
问题 1.7 c	73
1.8 依赖于参量的函数的积分	74
a. 例和定义 (74) b. 积分关于参量的连续性和可微性 (76)	
练习 1.8 b	81
c. 积分(次序)的互换. 函数的光滑化 (82)	
1.9 微分与线积分	(84)

a. 线性微分型 (84) b. 线性微分型的线积分 (87)	
练习 1.9 b	93
c. 线积分对端点的相关性 (93)	
1.10 线性微分型的可积性的基本定理	96
a. 全微分的积分 (96) b. 线积分只依赖于端点的必要条件 (97)	
c. 可积条件的不足 (99) d. 单连通集 (102) e. 基本定理 (105)	
附录	107
A. 1 多维空间的聚点原理及其应用	107
a. 聚点原理 (107) b. 柯西收敛准则, 紧性 (109) c. 海涅-波瑞耳覆盖定理 (110) d. 海涅-波瑞耳定理在开集所包含的闭集上的应用 (111)	
A. 2 连续函数的基本性质	113
A. 3 点集论的基本概念	114
a. 集合与子集合 (114) b. 集合的并与交 (116) c. 应用于平面上的点集 (119)	
A. 4 齐次函数	120
第二章 向量、矩阵与线性变换	123
2.1 向量的运算	123
a. 向量的定义 (123) b. 向量的几何表示 (125) c. 向量的长度, 方向夹角 (127) d. 向量的数量积(131) e. 超平面方程的向量形式 (133) f. 向量的线性相关与线性方程组 (136)	
练习 2.1	141
2.2 矩阵与线性变换	143
a. 基的变换, 线性空间 (143) b. 矩阵 (146) c. 矩阵的运算 (150) d. 方阵, 逆阵, 正交阵 (152)	
练习 2.2	157
2.3 行列式	159
a. 二阶与三阶行列式 (159) b. 向量的线性型与多线性型(162)	
c. 多线性交替型, 行列式的定义 (166) d. 行列式的主要性质 (169) e. 行列式对线性方程组的应用 (173)	
练习 2.3	175

2.4 行列式的几何解释	178
a. 向量积与三维空间中平行六面体的体积 (178) b. 行列式关于一列的展开式. 高维向量积 (186) c. 高维空间中的平行四边形的面积与平行多面体的体积 (188) d. n 维空间中平行多面体的定向 (193) e. 平面与超平面的定向 (197) f. 线性变换下平行多面体体积的改变(199)	
练习 2.4	200
2.5 分析中的向量概念	202
a. 向量场 (202) b. 数量场的梯度 (203) c. 向量场的散度和旋度 (206) d. 向量族. 在空间曲线论和质点运动中的应用(209)	
练习 2.5	212
第三章 微分学的发展和應用	217
3.1 隐函数	217
a. 一般说明 (217)	
练习 3.1 a	218
b. 几何解释 (218)	
练习 3.1 b	220
c. 隐函数定理 (220)	
练习 3.1 c	224
d. 隐函数定理的证明 (224)	
练习 3.1 d	227
e. 多于两个自变量的隐函数定理 (228)	
练习 3.1 e	229
3.2 用隐函数形式表出的曲线与曲面	230
a. 用隐函数形式表出的平面曲线 (230)	
练习 3.2 a	234
b. 曲线的奇点 (235)	
练习 3.2 b	237
c. 曲面的隐函数表示法 (238)	
练习 3.2 c	240
3.3 函数组、变换与映射	241

a. 一般说明 (241)	
练习 3.3 a	246
b. 曲线坐标 (246)	
练习 3.3 b	249
c. 推广到多于两个变量的情形 (249)	
练习 3.3 c	252
d. 反函数的微商公式 (252)	
练习 3.3 d	255
e. 映射的符号乘积 (258)	
练习 3.3 e	261
f. 关于变换及隐函数组的逆的一般定理, 分解成素映射 (262)	
练习 3.3 f	267
g. 用逐次逼近法迭代构造逆映射 (267)	
练习 3.3 g	273
h. 函数的相依性 (273)	
练习 3.3 h	275
i. 结束语 (275)	
练习 3.3 i	277
3.4 应用	278
a. 曲面理论的要素 (278)	
练习 3.4 a	287
b. 一般保角变换 (288)	
练习 3.4 b	290
3.5 曲线族, 曲面族, 以及它们的包络	291
a. 一般说明 (291)	
练习 3.5 a	292
b. 单参量曲线的包络 (293)	
练习 3.5 b	296
c. 例 (296)	
练习 3.5 c	302
d. 曲面族的包络 (304)	

练习 3.5 d	306
3.6 交错微分型	308
a. 交错微分型的定义 (308)	
练习 3.6 a	310
b. 微分型的和与积 (311)	
练习 3.6 b	312
c. 微分型的外微商 (313)	
练习 3.6 c	316
d. 任意坐标系中的外微分型 (317)	
练习 3.6 d	326
3.7 最大与最小	326
a. 必要条件 (326) b. 例 (329)	
练习 3.7 b	331
c. 带有附加条件的最大与最小 (332)	
练习 3.7 c	336
d. 最简单情形下不定乘数法的证明 (336)	
练习 3.7 d	338
e. 不定乘数法的推广 (339)	
练习 3.7 e	342
f. 例 (343)	
练习 3.7 f	346
附录	348
A.1 极值的充分条件	348
练习 A. 1	353
A.2 临界点的个数与向量场的指数	355
练习 A. 2	362
A.3 平面曲线的奇点	362
练习 A. 3	365
A.4 曲面的奇点	365
练习 A. 4	365
A.5 流体运动的欧拉表示法与拉格朗日表示法之间的	

联系.....	366
练习 A. 5	367
A.6 闭曲线的切线表示法与周长不等式	367
练习 A. 6	369
解答.....	370

目 录

第四章 多重积分	453
4.1 平面上的面积	453
a. 面积的若当测度的定义(453) b. 一个没有面积的集合(456)	
c. 面积的运算法则(458) 练习 4.1 (460)	
4.2 二重积分	460
a. 作为体积的二重积分(460) b. 积分的一般分析概念(462) c. 例(466)	
d. 记号、推广、基本法则(468) e. 积分估计与中值定理(469)	
4.3 三维及高维区域上的积分	472
4.4 空间微分、质量与密度	473
4.5 化重积分为累次单积分	474
a. 在矩形上的积分(474) b. 积分交换次序, 积分号下求微分(477)	
c. 在更一般的区域上化二重积分为单重积分(478) d. 在多维区域中的推广(482)	
4.6 重积分的变换	484
a. 平面上的积分的变换(484) b. 高于二维的区域(489) 练习4.6(490)	
4.7 广义多重积分	492
a. 有界集上函数的广义积分(493) b. 广义积分一般收敛定理的证明(497)	
c. 无界区域上的积分(499) 练习4.7(502)	
4.8 在几何中的应用	503
a. 体积的初等计算(503) b. 体积计算的一般性附注. 旋转体在球坐标系中的体积(505)	
c. 曲面的面积(507) 练习4.8(515)	
4.9 在物理中的应用	516
a. 矩和质心(516) b. 惯性矩(518) c. 复合摆(520) d. 吸引质量的势(523)	
练习 4.9(526)	
4.10 在曲线坐标中的重积分	529
a. 重积分的分解(529) b. 应用到移动曲线扫过的面积和移动曲面扫过的体积. 古鲁金公式. 配极求积仪(532)	

4.11	任意维数的体积和曲面面积	537
	a. 高于三维的曲面面积和曲面积分(537) b. n 维空间中的球体面积和体积(538) c. 推广, 参数表示(542) 练习 4.11(545)	
4.12	作为参数的函数的广义单积分	546
	a. 一致收敛性, 对参数的连续依赖性(546) b. 广义积分对参数的微分法和积分法(549) c. 例(551) d. 菲涅尔积分值的计算(556) 练习4.12(557)	
4.13	傅立叶积分	559
	a. 引言(559) b. 例(562) c. 傅立叶积分定理的证明(564) d. 傅立叶积分定理的收敛速度(567) e. 傅立叶变换的巴色瓦等式(570) f. 多元函数的傅立叶变换(572) 练习 4.13 (579)	
4.14	欧拉积分(伽玛函数)	579
	a. 定义和函数方程(579) b. 凸函数, 波尔-摩尔路波定理的证明(581) c. 伽玛函数的无穷乘积(585) d. 延拓定理(589) e. 贝塔函数(591) f. 分数次微商和积分、阿贝尔积分方程(594) 练习4.14(595)	
附录:	积分过程的详细分析	598
A.1	面积	598
	a. 平面的分划和相应的内、外面积(598) b. 若当可测集及其面积(600) c. 面积的基本性质(602)	
A.2	多元函数的积分	607
	a. 函数 $f(x, y)$ 的积分的定义(607) b. 连续函数的可积性与在集合上的积分(609) c. 重积分的基本法则(611) d. 化重积分为累次单积分(614)	
A.3	面积与积分的变换	617
	a. 集合的映射(617) b. 重积分的变换(622)	
A.4	关于曲面面积定义的附注	623
第五章	曲面积分和体积分之间的关系	626
5.1	线积分和平面上的重积分之间的联系(高斯, 斯托克斯和格林的积分定理)	626
5.2	散度定理的向量形式, 斯托克斯定理	633
	练习 5.2(637)	
5.3	二维分部积分公式, 格林定理, 散度定理	637

5.4	散度定理应用于重积分的变量替换	639
	a. 1-1 映射的情形(639) b. 积分的变量替换和映射度(642)	
5.5	面积微商, 将 Δu 变到极坐标的变换	646
5.6	用二维流动解释格林和斯托克斯公式	650
5.7	曲面的定向	655
	a. 三维空间中二维曲面的定向(656) b. 在定向曲面上曲线的定向(666)练习 5.7 (668)	
5.8	曲面上微分形式和数量函数的积分	668
	a. 定向平面区域上的重积分(668) b. 二阶微分形式的曲面积分(671) c. 定向曲面上微分形式的积分和非定向曲面上数量函数的积分之间的关系(673)	
5.9	空间情形的高斯定理和格林定理	676
	a. 高斯定理(676) 练习 5.9 a(680) b. 高斯定理在流体流动中的应用(681) c. 高斯定理在空间力和曲面力上的应用(683) d. 分部积分和三维空间中的格林定理(686) e. 应用格林定理把 ΔU 变换成球坐标的形式(687)练习 5.9 c(689)	
5.10	空间斯托克斯定理	690
	a. 定理的叙述和证明(690) 练习 5.10a (693) b. 斯托克斯定理的物理解释(694) 练习 5.10 b(696)	
5.11	高维积分恒等式	702
附录:	曲面和曲面积分的一般理论	704
A.1	三维空间中的曲面和曲面积分	704
	a. 基本曲面(704) b. 函数在基本面上的积分(707) c. 定向基本曲面(709) d. 简单曲面(711) e. 单位分解以及在简单面上的积分(714)	
A.2	散度定理	717
	a. 定理的叙述及其不变性(717) b. 定理的证明(719)	
A.3	斯托克斯定理	722
A.4	在高维欧氏空间中的曲面和曲面积分	725
	a. 基本曲面(725) b. 微分形式在定向基本面上的积分 (727) c. 简单 m 维曲面(727)	

A.5	高维空间中简单曲面上的积分, 高斯散度定理和一般的斯托克斯公式.....	730
解答	733

第一章 多元函数及其导数

在第一卷中曾讨论过的极限、连续、导数和积分等概念，同样也是二元或多元函数的基本概念。然而，有很多在一元函数理论中并不存在的新的现象，必须在多维中加以讨论。通常一个定理只要对于两个变量的函数可以证明它，那么在证明中不需要作任何本质的改变，就容易推广到多于两个变量的函数中去。因此，在以后的论述中我们常限于讨论两个变量的函数，其中各种关系都比较容易用几何图形来显示，而只当由此得到一些另外的见解时，才对三个或更多个变量的函数加以讨论；所得结果也同样可以作简单的几何学的解释。

1.1 平面和空间的点和点集

a. 点的序列：收敛性

在一个笛卡儿平面坐标系中，一对有顺序的数值 (x, y) 在几何上可以用一个点 P 来表示，这个点的坐标为 x 和 y 。两点 $P = (x, y)$ 与 $P' = (x', y')$ 之间的距离可以由公式

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

求得。这是欧几里得几何学的基本公式。我们利用距离的概念可以定义一个点的邻域。一个点 $C = (\alpha, \beta)$ 的 ε 邻域是由所有那些与 C 的距离小于 ε 的点 $P = (x, y)$ 构成的；从几何学上说，这是一个以 C 为中心、以 ε 为半径的圆盘¹⁾，它可用不等式

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < \varepsilon$$

1) 平常所用的“圆”这个词，是指一条曲线还是指由它所界的区域，是含糊不清的。我们根据实际流行的说法，把“圆”只用于曲线，而把“圆形区域”或“圆盘”用于二维区域。同样，在空间中我们把“球面”（即球形曲面）与它所界的三维立体“球体”区别开来。