微积分和数学分析引论

第二卷　第二分册

R. 柯朗　F. 约翰 著

科 学 出 版 社

微积分和数学分析引论

第二卷 第二分册

R. 柯朗 F. 约翰 著

张恭庆 廖可人 邓东皋
吴兰成 叶其孝 林源渠 译

叶其孝 校

科 学 出 版 社

1 9 8 9

内容简介

本书是柯朗等著的《微积分和数学分析引论》第二卷、第四、五章的汉译本. 第四章介绍多重积分；第五章讲述曲面积分和体积分之间的关系. 各章节都有例题、习题和解答并备以附录介绍相关的内容.

读者对象为理工科师生和工程技术人员.

R. Courant　F. John

INTRODUCTION TO CALCULUS AND ANALYSIS

Volume 2

John Wiley and Sons, Inc. 1974

微积分和数学分析引论

第二卷　第二分册

R. 柯朗　F. 约翰　著

张燕庆　廖可人　邓东皋
吴兰成　叶其孝　林源渠　译

叶其孝　校

责任编辑　徐宇星　刘嘉善

科学出版社出版

北京市东黄城根北街16号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1989年5月第一版　开本：850×1168　1/32

1989年5月第一次印刷　印张：10

印数：0001—3,230　字数：262,000

ISBN 7-03-000926-6/O·224

定价：6.50元

序　　言

R. 柯朗的《微积分 (Differential and Integral Calculus)》，卷一和卷二，获得了巨大的成功，引导了几代数学家进入高等数学的领域. 整套书阐发了这样一条富有教益的道理：真正有意义的数学是由直观想象与演绎推理相结合而创造出来的. 在准备本修订版的过程中，著者们力图保持原著所特有的这两种思维方式的合理结合. 虽然 R. 柯朗未能亲眼看到这第二卷的修订本的出版，但是在柯朗博士于 1972 年 1 月去世之前，所有主要的修改内容都已经由著者们商量出一致的意见并草拟了纲要.

从一开始，著者们就清楚地理解到，阐述多元函数的第二卷应当比第一卷作更大的修改. 特别是，似乎最好用与一维空间中的积分法同样程度的严密性和普遍性来处理高维空间中的积分法的所有基本定理. 另外，若干具有根本重要性的新概念和新论题，它们在著者们看来，是属于数学分析引论的.

本卷末尾较短的几章(六、七、八)(分别讲微分方程、变分法、复变函数的)，仅作了较小的改动. 在本卷的主体部分(第一至第五章)中，我们尽量保存了原来的体系，各章的主题都在不同的水平上按大体上平行的两条线索进行阐述：一条是较多地基于直观论证的非正式引述，一条是为后续的严密证明打基础的、对于应用的讨论.

原来的第一章中所讲的线性代数的材料，看来已不足以作为扩展了的微积分结构的基础. 因此，这一章(现在的第二章)完全重写了，现在讲述了所需要的 n 阶的行列式、矩阵、多线性型、格拉姆行列式、线性流形等的一切性质.

现在的第一章包括了线性微分型及其积分的所有基本性质. 这就为读者提供了阅读第三章(第 3.6 节)新添的高阶外微分型的

预备知识．现在的第三章中还新添了一个关于隐函数定理的利用逐次逼近法的证明，一个关于临界点的个数和二维向量场的指数的讨论。

在第四和第五章中，对重积分的基本性质作了大量的增补．这里面临着一个大家熟知的困难：展布在一个流形M上的积分，很容易通过把M适当划分成小片来定义，却必需证明它不依赖于特殊的分划．这由系统地使用约当可测集类的有限交性质和单位分划而解决了． 为了使应用拓扑学上的复杂性减少到最低限度，我们只考虑了光滑地嵌入于欧氏空间中的流形． 另外，对流形的“定向”的概念也作了详细的研讨，这是要讨论外微分型的积分及其可加性所必需的．在这个基础上我们给出了n维空间中的散度定理和司铎克斯定理的证明． 在第四章关于傅立叶积分的一节(第 4.13 节)里，还新添了关于巴色瓦恒等式和傅立叶重积分的论述．

在这一卷的准备过程中，最珍贵的是，著者们能不断得到两位朋友慷慨的帮助，一位是 Carnegie-Mellon 大学的 Albert A. Blank 教授，一位是 Negev 大学的 Alan Solomon 教授． 在几乎每一页上都有着他们的批评、改正、建议的痕迹．他们还为这一卷准备了练习题和问题．

我们感谢 K. O. Friedrichs 教授和 Donald Ludwig 教授的建设性的宝贵建议，还感谢 John Wiley and Sons 公司及其编辑部的不断鼓励和帮助。

F. 约翰

纽约，1973 年 9 月

目　　录

目　　录

第一章 多元函数及其导数

在第一卷中曾讨论过的极限、连续、导数和积分等概念，同样也是二元或多元函数的基本概念. 然而，有很多在一元函数理论中并不存在的新的现象，必须在多维中加以讨论. 通常一个定理只要对于两个变量的函数可以证明它，那么在证明中不需要作任何本质的改变，就容易推广到多于两个变量的函数中去. 因此，在以后的论述中我们常限于讨论两个变量的函数，其中各种关系都比较容易用几何图形来显示，而只当由此得到一些另外的见解时，才对三个或更多个变量的函数加以讨论；所得结果也同样可以作简单的几何学的解释.

1.1 平面和空间的点和点集

a. 点的序列：收敛性

在一个笛卡儿平面坐标系中，一对有顺序的数值 (x,y) 在几何上可以用一个点 P 来表示，这个点的坐标为 x 和 y. 两点 $P=(x,y)$ 与 $P'=(x',y')$ 之间的距离可以由公式

$$\overline{PP'}=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$$

求得. 这是欧几里得几何学的基本公式. 我们利用距离的概念可以定义一个点的邻域. 一个点 $C=(\alpha,\beta)$ 的 ε 邻域是由所有那些与 C 的距离小于 ε 的点 $P=(x,y)$ 构成的；从几何学上说，这是一个以 C 为中心、以 ε 为半径的圆盘[1]，它可用不等式

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<\varepsilon$$

---

1) 平常所用的“圆”这个词，是指一条曲线还是指由它所界的区域，是含糊不清的. 我们根据实际流行的说法，把“圆”只用于曲线，而把“圆形区域”或“圆盘”用于两维区域. 同样，在空间中我们把“球面”(即球形曲面)与它所界的三维立体“球体”区别开来.