BUZHIDAO DE SHIJIE

不知道的世界

数　学　篇

李毓佩　著

策划、主编　陈海燕

责任编辑　吕卫丽
美术编辑　毕树校
封面设计　田家雨　吴湘仁
版式设计　朱　虹
插　　图　阎　萍
电脑制作　红　雨

中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

不知道的世界:数学篇/李毓佩著.—北京:中国少年儿童出版社,1998

ISBN 7-5007-4091-3/G·2858

Ⅰ.不… Ⅱ.李… Ⅲ.①科学知识-少年读物②数学-少年读物 Ⅳ.N49

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第07687号

不知道的世界

·数学篇·

李毓佩 著

*

中国少年儿童出版社出版发行

社址:北京东四12条21号 邮编:100708

河北新华印刷二厂印刷 新华书店经销

*

850×1168 1/32 4.75印张

1998年8月河北第1版 1999年4月河北第3次印刷

本次印数:21000册 定价:11.00元

ISBN7-5007-4091-3/G·2858

凡有印装问题,可向本社发行二科调换

主编的话

我们对所接触的世界似乎已经熟识，人类有理由为几千年积累的丰富知识而自豪。然而，知识像一个不断膨胀的圆圈，圈外即是浩瀚无边的未知世界。随着知识魔圈的扩大，它与未知世界的接触面也日益增大。于是，在知识爆炸的时代，人类反倒觉得不知道的东西越来越多。这正是人类探索与创造的源源不绝的催动力。

众多的科普读物，力求展现已知世界，而我们现在做的正好相反。这是一套未知世界的小百科，它选取了一系列科学谜案，反映了人们在探疑解谜中作出的努力和遭遇的障碍，介绍了各种有代表性的假说、猜想和目前已达到的研究水平，提供了攻难闯关的相关知识背景，并指示了可能的途径。总之，它要把读者带进一个陌生神秘、异彩纷呈、激动人心的未知世界，激发人的探索欲和创造欲，同时使人获得相关知识和科学思想。

这是一套由科学家和科普作家们写给青少年的书，易读、易懂而又叫人着迷。让我们畅想：未来有一位中国科学家，因为破答了中外未解的科学悬谜而功著世界。今天，他(她)还只是个风华少年，正坐在小小的书桌前，如痴如醉地捧读着《不知道的世界》……

陈海燕

1998 年 5 月 18 日

在知识的长河中注入一点水

记得两年前的某一天，中少社的几位朋友来找我闲聊，说起他们正在策划一部丛书，叫做《十万个不知道》。一听这题目，我说："这个主意好。老跟孩子讲这是这样的，那是那样的，日子久了，孩子们可能会感到乏味的。也得跟孩子讲讲，世界上还有许多不知道的事儿，比已经知道的多得多，而且有趣得多。如果能潜移默化，让孩子们的心里萌发一株不断求知的苗苗，这部丛书就算成功了。"

没想到经过两年的努力，他们已经编成了十本；一个星期前，把最先印得的两本样书给我送来了。丛书改了名称，改成了《不知道的世界》。我看改得好。原来用《十万个不知道》，是受到了《十万个为什么》的启发，从编辑的意图来说，两者是相辅相成的；要是不改，倒像唱对台戏了：我赞成改。这两本样书，一本讲植物，一本讲物理；每本二十几篇，一篇一个主题，推想其他八本也是这个格局。看内容和行文，这部丛书是为初中生和小学生编写的，每一本讲一个方面。以读者已有的知识为基础，讲这一方面最近有了什么新成就，正在研究哪些新课题，将来可能朝哪个方向发展：就这样，把读者领进一个不知道的世界。这个世界无边无垠，多少原先不知道的，现在知道了，却又引发出更多的不知道来。从每一个不知道到知道，都没有现成的道路，道路需要

人们去探索。在探索中，有的人走通了，有的人碰了壁，也有殊途而同归的，都到达了目的地。在我看到的两本样书中，这样有趣的故事一个接着一个，到了儿也没有说完；留下一大堆不知道，让读者自己去思索。

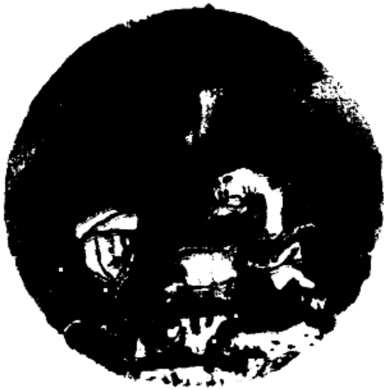
我看照着这个格局编下去，这部丛书会得到成功的。现在的十本，只开了个头。老话说：头开得好就是成功的一半；应该一鼓作气，一本又一本继续往下编：把不知道的世界中的奥秘，一一展现在读者面前，让他们自己挑选将来从哪一个不知道入手，为我们亲爱的祖国做出贡献，在人类知识的长河中，注入一点水。

叶至善

1998年5月19日

目录

1



令人迷惑的古埃及分数

你认识 ， ， 这些古怪的符号吗？这不是小孩子画的儿童画，而是4000多年前古埃及人写的分数。经数学家考证，这里面有不少学问，也存在着不少疑团需要人们去揭示。事情是这样的：

1858年的一天，苏格兰考古学家兰特在埃及的卢克索尔古玩市场上闲逛时，一本用纸草做成的书吸引了他。“纸

草”是尼罗河三角洲出产的一种水生植物，形状像芦苇，晒干剖开压平后，可以当“纸”写字。古埃及的文献主要写在这样的纸草上。兰特买下了这本纸草书。书是长条形的，上面写着密密麻麻的象形会意文字。经研究，此书是4000多年前古埃及的数学文献，作者是阿墨斯，书上有85道实用数学题和解答方法。后来人们把这本纸草书叫做“兰特纸草书”或“阿墨斯纸草书”。此书现在保存在英国的伦敦博物馆里。

人们在“兰特纸草书”上发现了独特的古埃及分数。符号表示$\frac{1}{2}$，表示$\frac{2}{3}$，其余分子为1的分数都用上面画个，下面画几个小竖道来表示，比如表示$\frac{1}{5}$，表示$\frac{1}{7}$。

分子为1的分数叫单分子分数，由于在“兰特纸草书”上发现了这种分数，所以也叫“古埃及分数”。如果分子不是1怎么办？古埃及人能巧妙地用古埃及分数来表示。在“兰特纸草书”的第一页就列着一张表，上面列着怎样把分子是2的分数用古埃及分数来表示的方

法，比如：$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$，$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$，$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$，$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{214}+\frac{1}{448}+\frac{1}{610}$，$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$等等，一直到$\frac{2}{101}$。

古埃及人为什么如此“偏爱”单分子分数呢？这个问题至今仍是一个未解之谜。有人从实用上来解释这个问题：比如$\frac{7}{8}$用单分子分数表示就是$\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$，可以比作 7 个面包 8 个人来平均分配，不但每个人分得的数量一样多，连所分得的块数也一样多。可以这样来分：先把其中的 4 个面包每个切成 2 份，再

把 2 个面包每个切成 4 份，最后一个面包切成 8 份，每人拿大、中、小各 1 份就可以了。

但是这种解释有些牵强。古埃及人不会因为分面包分得均匀，而创造出这么复杂的古埃及分数的。况且，单是把分子不是 1 的分数，用单分子分数来表示也不是一件容易的事。

那么古埃及人有没有一套系统地展开古埃及分数的方法呢？现代数学家认为可能没有。因为在他们的有些展开式中，古埃及分数的个数不是最少的。数学家发现，同一个分数用古埃及分数来表示，表达的方式并不是惟一的。比如，$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$，因为$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$，所以$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$；又因为$\frac{1}{42}=\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}$，所以$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}$。沿用这种方法，展式的项数可以无限增加。

数学上把项数最少的展式叫最优展式。“兰特纸草书”上的展式有许多不是最优的，说明古埃及人对用古埃及分数来表示分数还没有形成一整套的方法。

在研究古埃及分数的基础上，近代

数学家又提出了一个问题：能不能把一个真分数表示成项数最少、不重复的古埃及分数？他们首先想到把最简单的 1 表示成古埃及分数。

直到 1976 年，数学家才发现把 1 表示为分母都是奇数、而项数又最少的古埃及分数的办法，一共有 5 种表示法，每一种表示法都有 9 项：

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{135}+\frac{1}{10395};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{165}+\frac{1}{693};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{231}+\frac{1}{315};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{45}+\frac{1}{385}。$$

这 5 种表示方法中前 6 项都相同。

古埃及人在 4000 多年前就发明并

使用了单分子分数，可以肯定地说是他们需要这种分数。在4000多年前还谈不上数学研究，数学都是应实际需要而产生，在实际应用中得到发展的。古埃及人为什么要创造出这么复杂的单分子分数呢？他们的目的究竟何在？

在“兰特纸草书”的第一页就列举了把分子是2的分数化成单分子分数的表，他们当时究竟是怎样展开的？用的是什么方法？

如果这些问题能够弄清楚，对了解古代人类如何对待分数、使用分数，都是十分重要的。但是这些问题至今还是一些悬案。

简单却解决不了

谜一样的古埃及分数给人类留下许多问题，其中有一个问题看上去很简单，但数学家们却解决不了。这是一个什么样的问题呢？这要从问题的起源说起。

前面已经讲了古埃及人偏爱单分子分数（也称单分数）。现代数学家找不出他们偏爱的原因，就把兴趣转移到研究单分数上。他们研究了这样一个问题：一个单分数能不能化为两个单分数之和？

这个问题好像小学生都会。比如$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$，$\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$，如果再认真想一下的话，还可以得到一个简单的公式：

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)} \qquad (1)$$

随便给定一个单分数，都可以用公式(1)化成两个单分数之和。比如$\frac{1}{15}$，这里 $n=15$，而 $n+1=16$，$n(n+1)=15\times16=240$，使用公式(1)可得：

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$$

这样就把$\frac{1}{15}$化成两个单分数之和了。

数学家对公式(1)不满意，原因是它只能得到一种化法，而不能得到全部的化法。$\frac{1}{15}$除了可以化成$\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$外，还可以写成以下 3 种形式：$\frac{1}{15}=\frac{1}{18}+\frac{1}{90}$，$\frac{1}{15}=\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$，$\frac{1}{15}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$。数学家希望能找到一个把所有化法都包括的公式。

数学家对公式(1)进行了改进：任何一个单分数，把它化为两个不同的单分数$\frac{1}{x}$和$\frac{1}{y}$之和，只要取 $x=n+d$，$y=n+\frac{n^2}{d}$，其中 d 是 n^2 的任一个正约数，可

得到如下公式：

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n+d}+\frac{d}{n(n+d)} \quad (2)$$

为了方便，一般只取 $x<y$，即 $d<n$ 的解。

比较公式（1）和公式（2），容易发现，公式（2）是把公式（1）中的某些1换成了d。为了保证y是正整数，d必须能整除n^2，因此要规定d是n^2的任意一个正约数。n^2的正约数可以不止一个，比如$n=15$时，$n^2=15^2$，小于15的15^2的正约数有1，3，5，9。此时可以算出相应的$x=n+d$有$15+1=16$，$15+3=18$，$15+5=20$，$15+9=24$；相应的$y=n+\frac{n^2}{d}$有$15+\frac{15^2}{1}=240$，$15+\frac{15^2}{3}=90$，$15+\frac{15^2}{5}=60$，$15+\frac{15^2}{9}=40$。这样可以得到把$\frac{1}{15}$写成两个单分数之和的所有可能的形式，它们是：

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}=\frac{1}{18}+\frac{1}{90}=\frac{1}{20}+\frac{1}{60}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$$

从公式(1)只能得到一个，到公式(2)可以得到所有表达式，这当然是很大的进步。

上面是把一个单分数分解成两个单

分数之和。现在把问题再变得难一点：如果给你的是一个真分数$\frac{m}{n}$（$n>m$），又如何把它分解成两个单分数之和呢？

比如$\frac{2}{3}$是一个真分数，如何把它化成两个单分数之和？一共有几种化法？这个问题利用公式（2）就可以解决。

设$\frac{2}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，则$\frac{1}{3}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}$，为了简单可设 $x<y$。根据公式（2），应该有

$$2x=3+d \qquad 2y=3+\frac{3^2}{d}$$

其中 $d<3$，是 3^2 的正约数，因此 $d=1$。

这时可以得到 x 和 y：