高等师范院校试用教材

数学物理方程

黄德民 张德厚 编

吉林教育出版社

高等师范院校试用教材　**数学物理方程**　黄德民　张德厚　编

责任编辑　王铁义　　　　封面设计　隋壮基

出版：吉林教育出版社　　787×1092毫米　32开本　8.5印张　184,000字

发行：吉林省新华书店　　1987年9月第1版　　1987年9月第1次印刷

印数：1—1,480册

印刷：长春科技印刷厂　　统一书号：7375·570　　定价：1.45元

内容提要

本书共分四章，第一章讨论热传导方程基本定解问题的适定性，介绍分离变量法和傅里叶变换法。第二章讨论波动方程基本定解问题的适定性，介绍拉普拉斯变换法和达朗贝尔解法。第三章讨论拉普拉斯方程基本定解问题的适定性，介绍格林函数法。第四章对二阶线性偏微分方程的理论作了简单的分析和总结。每章都附有一定数量的习题，书后附有习题的答案、提示和略解。

本书可以作为高等师范院校数学专业的教材，亦可作为函授大学、电视大学和业余大学数学专业以及工科院校有关专业的参考书。

说　　明

本书是编者根据多年的教学实践，按照原教育部颁布的高等师范院校数学系现行教学计划的要求，在原《数学物理方程讲义》的基础上重新编写而成的．内容包括三类典型方程——热传导方程、波动方程和拉普拉斯方程基本定解问题的适定性讨论、常用解法以及三类方程分类和总结．讲授时间（包括习题课）约60—70学时．

在编写过程中，我们根据高师特点，在选材上，主要介绍基本理论和基本方法．通过处理典型物理问题，讲清数学方法，同时也适当地联系物理实际．在写法上，力争做到通俗易懂，深入浅出．书中例题较多，便于自学．每章配有一定数量的习题，书后附有习题答案、提示和略解，供读者参考．

在编写时，我们参考了一些兄弟院校编写的有关材料．由于编者水平有限，不妥和错误之处在所难免，希望使用本书的同志批评指正．

编　者

1985年2月于长春

引　　言

数学物理方程作为一门学科，它包括描述许多自然现象的微分方程、积分方程和函数方程等，内容十分丰富．但作为高等师范院校数学系的一门专业基础课，其内容只能讨论偏微分方程的经典部分，其中主要是属于二阶线性偏微分方程的热传导方程、波动方程和拉普拉斯方程．这些方程已很好地描述了一些基本的自然现象，并能解决一些常见的物理学和工程技术科学中的问题．学好数学物理方程，需要数学分析和常微分方程的知识．从本质上说，数学物理方程是数学分析基本理论和方法的一种应用．通过这门课程的学习，不仅可以掌握运用数学工具解决一些物理问题的基本方法，从一个侧面看到数学与其它自然科学有着密切的联系，同时还能很好地巩固和加深对数学分析知识的理解，提高逻辑思维能力，初步体会到数学在四化建设中的重要作用．这些数学修养，对于将从事数学、物理、工程技术方面工作的同志，都是十分必要的．

目　录

第一章　热传导方程

热量从物体的一部分传到另一部分，或从一个物体传到和它相接触的另一个物体，这种现象通常称为热传导．热传导理论在实际中有着广泛的应用．例如，在水力工程中的混凝土坝建筑中，水泥在硬化过程中会发生大量的水化热，使坝体内部温度急剧升高，而与外界空气接触的部分则冷却较快，因此使混凝土内部温度与外层温度相差悬殊，产生内部膨胀而外层收缩的现象．由于互相约束，使之不能自由伸缩，在混凝土表面层就会产生拉应力．当这种拉应力超过混凝土的抗拉强度时，就会产生裂缝，破坏坝的结构．又例如，在大型机器工作过程中会产生大量的热量，在原子工业中会产生大量的能量，等等．这些因素也都会在结构中引起巨大的温度变化，产生很大的热应力，往往也能导致结构物的破坏．为了避免这种情况的发生，无论采取何种措施，倘若对其中热的流动和温度分布规律没有很好的了解，都将是盲目的．所以，我们必须首先掌握它的热流动规律或温度分布状况．

在这一章中，我们先把一般物体热传导问题变为数学问题，接着给出数学问题的解答，最后给出数学解答的物理意义．

§1. 热传导方程的导出和定解条件

我们先复习一下固体热传导问题中的两个基本定律．这两个基本定律后面我们要用到．

1. 傅里叶实验定律和牛顿冷却定律

对于任何物体，热传导过程中温度是基本的物理量．用数学方法研究热传导过程的主要任务，在于研究温度在物体中随时间变化的规律．该物体中点$M(x,\ y,\ z)$于时刻t的温度用$u(x,\ y,\ z,\ t)$表示，则有

$$u=u(M,\ t)=u(x,\ y,\ z,\ t) \tag{1.1}$$

函数(1.1)表示了物体在每一点M上温度随时间t变化的规律，并给出了每一指定时刻温度在整个物体中的分布状况．在某一时刻物体上一切点的温度值的总体称为**温度场**，它是一个数量场．场的温度随时间而变化者，称之为**不稳定温度场**．式(1.1)就是不稳定温度场的数学表示．不随时间变化的称为**稳定温度场**，即$u=u(x,\ y,\ z)$．本章讨论不稳定温度场，稳定温度场将在第三章讨论．

若物体内部温度分布不一样，那么就会产生由高温到低温的热"流"．我们在物体内的点M处作一曲面S，并从其上取一小曲面块ΔS(图1.1)．设$\vec{n}$为曲面ΔS沿热流方向的法线．在时间间隔Δt内沿曲面ΔS的法线$\vec{n}$方向从ΔS上传过的热量设为ΔQ，由实验知道，流过的热量ΔQ不仅与Δt和ΔS的大小成正比，而且与温度u在$\vec{n}$方向上的陡度（即$\dfrac{\Delta u}{\Delta n}$，单位距离上的温差）成正比，即

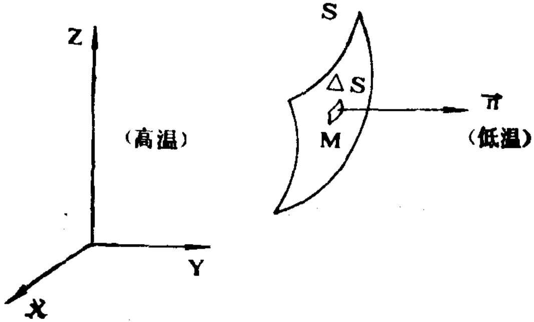

图 1.1

$$\Delta Q = -\ k\ \frac{\Delta u}{\Delta n}\Delta s\Delta t$$

写成微分形式为

$$dQ = -\ k\frac{\partial u}{\partial n}\ ds\ dt \tag{1.2}$$

其中$k>0$，式中的负号表示热流是沿着高温到低温的方向，并用来使热流量成为正值，因为$\frac{\partial u}{\partial n}<0$. 式(1.2)中的$k$称为材料的**热传导系数**. 公式(1.2)称为热传导的**傅里叶实验定律**.

设物体表面温度为u，而与物体表面接触的介质的温度为u_1(为明确起见，不妨设$u>u_1$，即物体放热). 所谓**牛顿冷却定律**，就是在时间间隔dt内从物体内部通过表面ds传至周围介质的热量dQ不仅与ds和dt，而且与物体表面和周围介质间的温差$u-u_1$成正比

$$dQ = k_1(u-u_1)dsdt \tag{1.3}$$

式中的比例系数$k_1>0$称为**热交换系数**。

下面我们根据傅里叶定律，牛顿冷却定律以及能量守恒定律，来推导热传导过程中温度场$u(x, y, z, t)$所应满足的方程及定解条件.

2. 热传导方程的导出

考察均匀且各向同性的物体Ω. 设热传导系数k和物体密度ρ为常数，又设$u(x, y, z, t)$表示物体Ω内点$M(x,y,z)$处在时刻t的温度. 我们在物体Ω内于M处任取边长为Δx，Δy和Δz的，边与坐标轴平行的微元长方体（图1.2，图1.3）. 由于微元体取得充分小，所以长方体的两平行面上的热流方向可以认为是一致的. 为不失一般性，假设各对平行面上的热流方向与坐标轴的正向一致. 按照傅里叶定律(1.2)，在时间Δt内沿x轴正向从长方体左面流入长方体的热量为

$$\Delta Q_x = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \Delta y\Delta z\Delta t$$

和从长方体右面流出的热量为

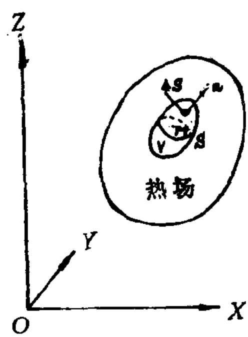

图 1.2

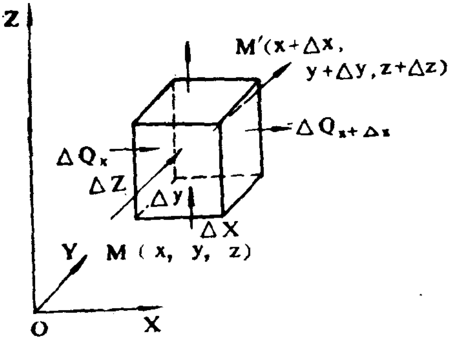

图 1.3

$$\Delta Q_{x+\Delta x} = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t$$

因此，在x方向由于热传导而引起的留在长方体内的热量为

$$Q_x = \Delta Q_x - \Delta Q_{x+\Delta x} = k\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right]\Delta y \Delta z \Delta t$$

根据拉格朗日微分中值定理

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x+\theta_1 \Delta x} \cdot \Delta x$$

$$(0<\theta_1<1)$$

于是

$$Q_x = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x+\theta_1 \Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \tag{1.4}$$

按照同样方法，可以写出 y 和 z 方向上的与公式（1.4）类似的两个公式

$$Q_y = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y+\theta_2\Delta y}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \quad (0<\theta_2<1) \tag{1.5}$$

$$Q_z = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z+\theta_3\Delta z}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \quad (0<\theta_3<1) \tag{1.6}$$

这样，由于热传导而引起的贮积在长方体内的总热量为

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_x + Q_y + Q_z \\ &= k\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x+\theta_1\Delta x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y+\theta_2\Delta y}\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z+\theta_3\Delta z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \end{aligned} \tag{1.7}$$

另一方面，长方体内贮积的热量会使长方体内的温度发生变化．设在时间 Δt 内温度从 $u(x, y, z, t)$ 变到 $u(x, y, z, t+\Delta t)$，ρ 为物体的密度（单位体积的质量），C 为物质的比热（单位质量的物质升高单位温度所需要的热量），则温度变化所吸取的热量为

$$Q_2 = C\rho\Delta x\Delta y\Delta z[u(x, y, z, t+\Delta t) - u(x, y, z, t)] \tag{1.8}$$

根据微分中值定理

$$u(x, y, z, t+\Delta t) - u(x, y, z, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t+\theta_4\Delta t}\cdot\Delta t \quad (0<\theta_4<1)$$

于是（1.8）可写为

$$Q_2 = C\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t+\theta_4\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \tag{1.9}$$

如果物体内没有热源，那么根据热量守恒定律，流入长方体内而贮积的热量应等于长方体温度升高所要吸收的热量，即

$$Q_1 = Q_2$$

也就是

$$C\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t+\theta_4\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t =$$

$$= k\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x+\theta_1\Delta x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y+\theta_2\Delta y}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z+\theta_3\Delta z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \tag{1.10}$$

若函数 u 二次连续可微，则在式（1.10）中令 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，$\Delta z\to 0$ 和 $\Delta t\to 0$，在（x，y，z，t）处就有等式

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

成立，或

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.11}$$

式中 $a^2 = \dfrac{k}{C\rho}$ 称为物体的**温度传导系数**．我们假定 a^2 为常数，方程（1.11）称为各向同性均匀物体的**热传导方程**．

如果物体内有热源 $F(x, y, z, t)$，其为单位时间内单位体积中产生的热量，称为**热源密度**，那么此时代替(1.10)应有

$$C\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t+\theta_4\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

$$=k\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x+\theta_1\Delta x}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y+\theta_2\Delta y}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z+\theta_3\Delta z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t+F(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$$

$$\cdot\ \Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \qquad (1.10)'$$

其中 $x<x_1<x+\Delta x$，$y<y_1<y+\Delta y$，$z<z_1<z+\Delta z$，$t<t_1<t+\Delta t$。约去（1.10）′ 中的因子 $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$，并令 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，$\Delta z\to 0$ 和 $\Delta t\to 0$，则从（1.10）′得到$u(x,\ y,\ z,\ t)$所满足的方程

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,\ y,\ z,\ t)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,\ y,\ z,\ t) \qquad (1.12)$$

其中

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{1}{C\rho}F(x,\ y,\ z,\ t)$$

方程（1.11）称为**齐次方程**，而方程（1.12）称为**非齐次方程**。有时也把方程（1.12）简写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f$$

其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为**拉普拉斯算子**。

在适当的情况下，热传导方程的维数（空间变量的个数）可以减少。例如，所考察的物体是一根沿着x轴放置的均匀细杆，又它的侧面是绝热的，因而可以假设在同一截面上温度分布是相同的。这时，温度函数u仅与坐标x和时间t有关，则方程（1.12）变成一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t) \tag{1.13}$$

例如，我们所考虑的物体是一块均匀薄板，其上下表面是绝热的，它放置在xoy坐标平面上。因板很薄，其温度分布沿坐标z轴方向没有变化。这时，温度函数u只与x，y和t有关，则方程（1.12）变为二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,\ y,\ t) \tag{1.14}$$

3. 定解条件的提出

从方程的导出过程可以看出，热传导方程只是传热学基本规律傅里叶定律的一种数学形式。无论物体是由什么样的材料构成的，只要其传热服从傅里叶定律，其内部的温度函数都满足同一形式的方程，只是系数a^2不同而已。就是同一材料构成的物体，不管它们的形状，界面温度（或热流）以及起始温度状况如何，它们内部的温度函数也都满足同一方程。这是因为我们在上面推导方程时是选取物体内部不包括边界的一小部分来讨论的，而且没有考虑起始温度状况的异同。因此，所得到的方程（1.12）只是在某种意义上反映了各种物体内部热运动的普遍规律，从量的角度刻划不同物体的共性。

显然，对于一个物体，如果它的起始温度和界面温度