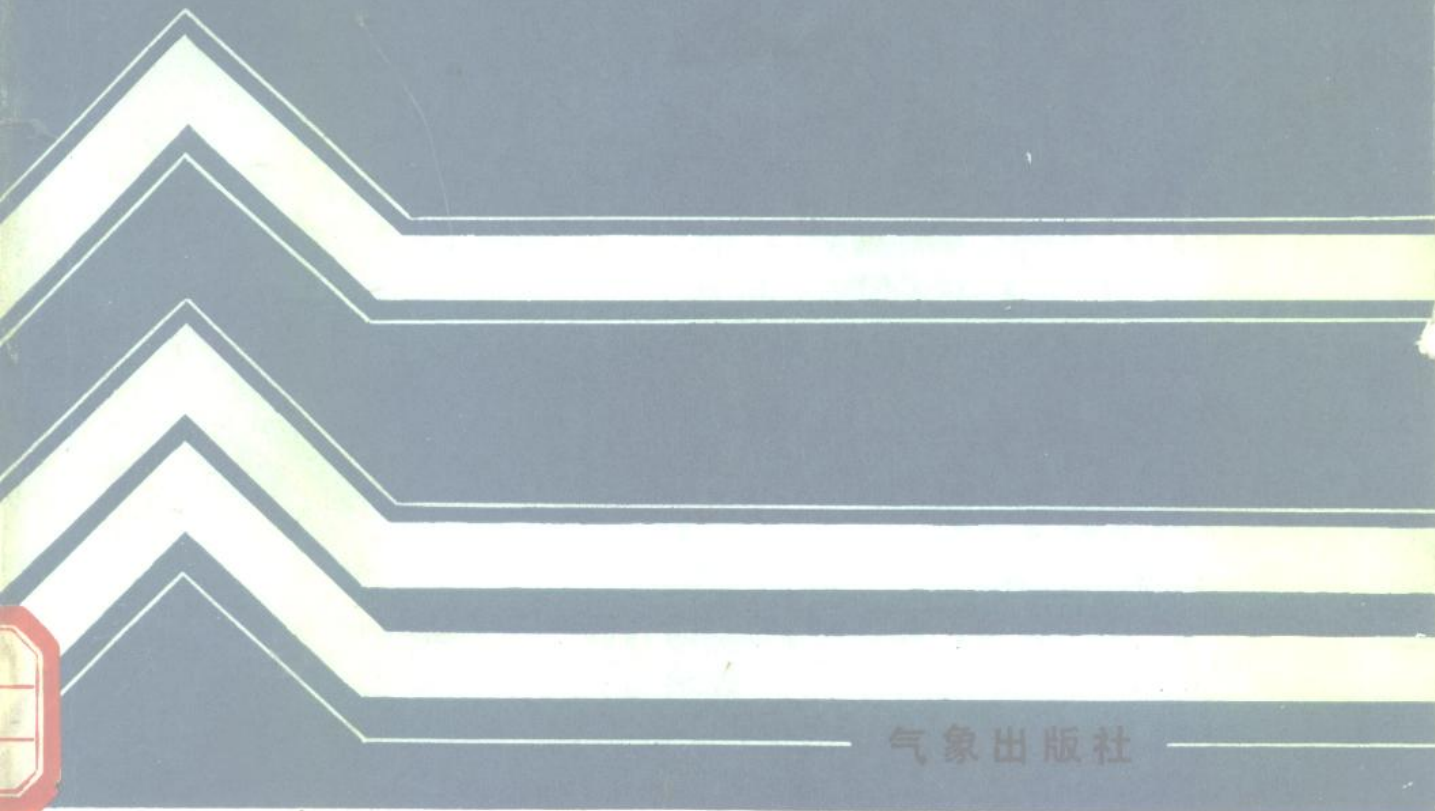


廖洞贤 王两铭

数值天气预报 原理及其应用



气象出版社

数值天气预报 原理及其应用

廖洞贤 编著
王两铭

气象出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了数值天气预报的基础理论和“谱模式”、“参数化”等国内外的研究成果,并从应用数值天气预报的实际需要出发,编写了“诊断分析”、“资料处理”和“数值天气预报的应用和加工”等专门章节。全书内容丰富、层次清晰,语言流畅、深浅得当。兼有业务和教学参考书的特点。

本书可供气象科研人员、大专院校有关师生、研究生和气象有关业务人员学习参考。

数值天气预报原理及其应用

廖洞贤
王两铭 编著

责任编辑 陆 勇

气象出版社 出版
(北京西郊白石桥路46号)

密云华都印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

开本: 787×1092 1/16 印张: 27.25 字数: 691千字

1986年5月第一版 1988年1月第二次印刷

印 数: 2001—3500 定 价: 6.35元

ISBN 7-5029-0076-4/P·0052

前 言

数值天气预报是我国气象现代化的重要内容之一，也是近三十年来发展起来的重要的天气预报的方法之一。现在，已有三十多个国家和地区采用，并用它作日常业务预报。近年来，这种预报发展很快。目前，数值预报不仅能作形势预报，也能作天气和气象要素的预报；不仅能作一个国家的预报，也能作半球和全球预报；不仅能作短期预报，也能作中期预报；长期预报也进行过令人鼓午的试验。并且，在准确率方面也取得了可喜的进步。翻开过去国内出版的数值天气预报书籍，可见有些已不能概括新发展的内容，有些内容已过时了。

针对这些情况，我们在这些书籍的基础上，整理并选编了近年来国内外在数值天气预报方面的重要成果，如谱模式、大气物理过程的参数化和正规波等，对它们进行了较系统的论述。还考虑到预报员应用数值天气预报的实际需要，专门编写了“诊断分析”、“资料处理”和“数值天气预报的应用和加工”等章节。

考虑到大气波动的稳定性、风压场之间的适应等，在一般动力气象书中已有专门讲述，为避免重复，在本书中均不再详细讲述。对一般动力气象未讲述、而数值预报又很需要的理论或方法，如正交曲线坐标、静力平衡近似和用气象要素作垂直坐标的数学物理基础、统一的坐标变换、边界条件的影响和要求、以及计算稳定性等，则给予适当的论述。

在编写过程中，作者虽力求使内容丰富、严谨且具有系统性，但因限于水平，难免事与愿违，有不少缺点和错误，希望读者及时提出批评指正，作者表示衷心的感谢。

作者

目 录

第一章 正交曲线坐标的基本方程	(1)
§ 1 正交曲线坐标	(1)
§ 2 大气运动的基本方程	(4)
§ 3 球极坐标的基本方程	(6)
§ 4 局地直角坐标的基本方程	(7)
§ 5 柱极坐标的基本方程	(8)
§ 6 考虑地图投影的基本方程	(9)
第二章 大气动力方程组的简化	(14)
§ 1 尺度分析	(14)
§ 2 水平运动方程的简化	(16)
§ 3 地转近似	(17)
§ 4 静力平衡近似	(20)
§ 5 热力学方程的分析	(23)
§ 6 连续方程的分析	(24)
§ 7 包辛内斯克近似	(25)
§ 8 静力平衡近似的进一步讨论	(26)
第三章 垂直坐标和坐标系	(29)
§ 1 用气象要素作垂直坐标的数学物理基础	(29)
§ 2 坐标变换	(31)
§ 3 垂直边界条件	(37)
§ 4 垂直坐标的比较和选择	(39)
§ 5 混合坐标系	(40)
第四章 大气中的多波动运动	(42)
§ 1 大气波动的分类	(42)
§ 2 波动能量的频散	(43)
§ 3 大气中的基本波动	(43)
§ 4 大气中的混合波	(47)
§ 5 滤波	(51)
§ 6 准静力平衡对大气波动的影响	(53)
第五章 模式大气和大气模式的设计	(55)
§ 1 模式大气和大气模式	(55)
§ 2 大气模式的设计	(55)
§ 3 对动力热力学方程简化的进一步讨论	(55)
§ 4 完全的能量方程和大气中的某些不变量	(60)
§ 5 能量守恒和模式设计(一)	(62)
§ 6 有效位能和大型静力稳定度	(67)
§ 7 能量守恒和模式设计(二)	(69)

§ 8 综合结果	(73)
第六章 几个简化的大气模式和它们的性质	(75)
§ 1 正压过滤模式	(75)
§ 2 斜压过滤模式	(81)
§ 3 正压原始方程模式	(85)
§ 4 多层原始方程模式	(88)
第七章 计算方法(一)	(94)
§ 1 预报问题的离散化	(94)
§ 2 差分近似	(94)
§ 3 一致性、收敛性和计算稳定性	(96)
§ 4 分析计算稳定性的方法	(98)
§ 5 几种差分格式和它们的性质	(100)
§ 6 起步问题	(107)
§ 7 二维差分格式的构造	(109)
第八章 计算方法(二)	(115)
§ 1 常用差分格式的系统性误差	(115)
§ 2 非线性计算不稳定	(120)
§ 3 正压涡度方程的守恒格式	(122)
§ 4 椭圆型方程的数值解	(127)
第九章 诊断分析	(138)
§ 1 诊断分析和其内容	(138)
§ 2 气块路径	(138)
§ 3 影响垂直速度的物理因素	(140)
§ 4 几种早期计算垂直速度的方法	(142)
§ 5 ω -方程	(145)
§ 6 直接用测风资料计算大范围散度的方法	(148)
§ 7 垂直速度的订正	(150)
§ 8 在山区计算垂直速度的问题	(152)
§ 9 直接用观测资料进行大范围涡度、通量、梯度和平流的计算	(153)
§ 10 波谱分析	(154)
§ 11 复数列 FFT	(155)
§ 12 实数列 FFT	(157)
第十章 水平侧边界条件	(161)
§ 1 数值天气预报水平侧边界条件的特点	(161)
§ 2 常用的水平侧边界条件	(162)
§ 3 半球预报的反对称条件和对称反对称条件	(168)
§ 4 水平侧边界条件引起的计算稳定性问题	(172)
§ 5 有限区域预报的固定边界条件和半固定边界条件	(174)
第十一章 预报模式的积分(一)	(182)
§ 1 正压过滤模式	(182)
§ 2 斜压过滤模式	(183)

§ 3 历史的经验教训和使用原始方程的必要性	(185)
§ 4 原始方程差分格式的计算稳定性	(186)
§ 5 通量形式原始方程差分格式的构造	(187)
§ 6 跳点格式和能量的频散	(196)
§ 7 一个用跳点格式表示的原始方程模式	(200)
§ 8 在跳点格式中极地附近地区的处理	(203)
§ 9 一些可以节省计算时间的差分格式	(205)
第十二章 预报模式的积分(二)	(211)
§ 1 准拉格朗日格式	(211)
§ 2 半球范围的积分(地图投影直角坐标)	(212)
§ 3 半球和全球范围的积分(球面坐标)	(214)
§ 4 一个时间、空间都差分的能量守恒格式	(219)
§ 5 一个保持能量和位拟能守恒的正压原始方程差分模式	(223)
§ 6 非线性计算不稳定性的进一步分析	(227)
§ 7 在 σ -坐标中计算气压梯度力的问题	(230)
第十三章 套网格预报	(237)
§ 1 套网格和套网格预报的必要性	(237)
§ 2 活动套网格和多重套网格	(237)
§ 3 两种做套网格预报的方法	(238)
§ 4 修正的“单向方法”	(238)
§ 5 准拉格朗日法	(240)
§ 6 不等距差分法	(244)
§ 7 异模式套网格	(246)
§ 8 套网格模式中存在的问题	(248)
第十四章 谱模式	(250)
§ 1 一般的情况	(250)
§ 2 谱函数的选择	(250)
§ 3 球面调和函数及其性质	(252)
§ 4 正压涡度方程	(255)
§ 5 正压涡度方程的计算稳定性	(257)
§ 6 正压谱模式的积分性质	(258)
§ 7 变换法	(260)
§ 8 半谱法	(262)
§ 9 美国国家气象中心业务用的谱模式	(263)
§ 10 半球预报的水平侧边界条件	(270)
§ 11 波谱法和差分法的比较	(271)
第十五章 正规波	(273)
§ 1 一般原理	(273)
§ 2 离散化的正压大气	(275)
§ 3 离散化的斜压大气	(279)
§ 4 哈佛函数	(282)

第十六章 初值处理	(289)
§ 1 初值处理的必要性	(289)
§ 2 三类处理	(289)
§ 3 静处理的方法	(289)
§ 4 动处理的方法	(294)
§ 5 变分处理	(299)
§ 6 各种处理方法的比较和存在的问题	(302)
第十七章 对辐射和边界层的考虑	(305)
§ 1 参数化和参数化的必要性	(305)
§ 2 辐射	(305)
§ 3 太阳辐射	(306)
§ 4 长波辐射	(310)
§ 5 行星边界层	(313)
§ 6 边界层厚度的预报	(317)
§ 7 下垫面温度的预报	(321)
第十八章 降水预报	(323)
§ 1 大尺度降水	(323)
§ 2 对流性降水	(328)
§ 3 对流调整	(328)
§ 4 对流参数化方案	(330)
§ 5 郭晓岚方案	(330)
§ 6 修正的郭晓岚方案	(334)
§ 7 荒川-舒伯特方案	(336)
§ 8 几种方案的比较	(348)
第十九章 资料处理和客观分析	(351)
§ 1 资料处理	(351)
§ 2 客观分析	(356)
§ 3 改进的多项式法和逐步订正法	(357)
§ 4 多元最优插值	(361)
§ 5 哈佛函数分析	(364)
§ 6 四维同化	(367)
第二十章 数值天气预报的应用和加工	(371)
§ 1 预报员应用数值天气预报的经验	(371)
§ 2 预报员对数值天气预报的应用	(371)
§ 3 对数值预报图的客观订正	(374)
§ 4 重要天气图	(375)
§ 5 用统计学方法对数值天气预报的加工	(380)
§ 6 用动力学方法对数值天气预报的加工	(385)
附录	(389)
一、数值天气预报中常用的几种地图投影	(389)
二、用地图直角网格坐标计算 f 、 m	(393)

三、向量运算公式	(394)
四、常系数差分方程的解法	(395)
五、完全的位涡度方程	(396)
六、正压过滤模式的格林函数	(397)
七、斜压准地转模式的格林函数	(398)
八、正压大气中切变涡度和曲率涡度的相互转化	(403)
九、太阳天顶角的计算	(405)
十、辐射传递方程	(406)
十一、晴天大气的长波辐射	(406)
十二、地表的垂直结构	(408)
十三、检验回归方程、判别函数统计显著性的蒙特·卡洛方法	(410)
十四、平滑运算	(411)
十五、探空报电码	(416)
符号一览表	

第一章 正交曲线坐标的基本方程

§ 1 正交曲线坐标

1. 尺度因子

大气运动可以用不同的坐标来描写。除常用的直角坐标外,还可以用一般的曲线坐标。因而,探讨直角坐标和曲线坐标间的关系,并将大气基本方程用后者表示出来是很必要的。

现在,我们就从这两种坐标系的关系出发来研究问题。

设一般曲线坐标为 q_1, q_2, q_3 , 而

$$\begin{cases} x = f_1(q_1, q_2, q_3) \\ y = f_2(q_1, q_2, q_3) \\ z = f_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad (1.1)$$

如图 1.1, 取向径 $\mathbf{r}$ 代表从坐标原点指向点 P 的向量, P 在直角坐标和一般曲线坐标中的坐标分别是 (x, y, z) 、 (q_1, q_2, q_3) 。如果令 q_2, q_3 为常数, 而 q_1 变化, 则 $\mathbf{r}$ 画出的曲线为 q_1 坐标线。类似地, 我们可以定义经过 P 点的 q_2 和 q_3 坐标线。如果这三条坐标线不共面, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 分别是它们增加方向的单位向量, 则

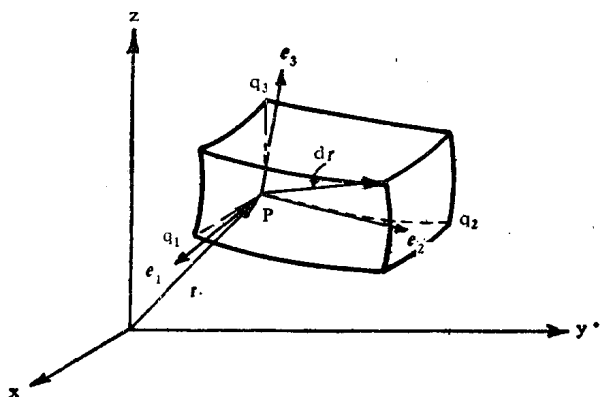


图 1.1

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (1.2)$$

因为当 q_2, q_3 为常数时, $\mathbf{r}$ 的矢端总沿 q_1 坐标线变化, 故 $\partial \mathbf{r} / \partial q_1$ 在点 P 与 q_1 坐标线相切。令

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = h_1 \mathbf{e}_1$$

则 h_1 表示 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$ 和 $\mathbf{e}_1$ 之间的比值, 通常称为尺度因子或拉梅系数。类似地, 还有

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = h_2 \mathbf{e}_2$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} = h_3 \mathbf{e}_3$$

其中, h_2, h_3 各是 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}$ 和 $\mathbf{e}_2$ 、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}$ 和 $\mathbf{e}_3$ 之间的比值。

2. 梯度、散度和涡度

(1.2)式可以写成

$$d\mathbf{r} = h_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + h_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + h_3 dq_3 \mathbf{e}_3 \quad (1.3)$$

如果在任一点 P 处, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 两两正交, 则称曲线坐标 q_1, q_2, q_3 是正交的。这样, $d\mathbf{r}$ 的长度的平方 ds^2 是

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = h_1^2 (dq_1)^2 + h_2^2 (dq_2)^2 + h_3^2 (dq_3)^2 \quad (1.4)$$

它相当于经过 P 的无穷小曲面平行六面体对角线长度的平方(图 1.1)。显然, 这时, 平行六面体三个棱边的长各是

$$\begin{cases} ds_1 = h_1 dq_1 \\ ds_2 = h_2 dq_2 \\ ds_3 = h_3 dq_3 \end{cases} \quad (1.5)$$

所以, 对一个标量 ψ 来说, 按向量分析中梯度 $\nabla_3 \psi$ 的定义, 在 q_i 坐标线上的投影是 $\frac{\partial \psi}{\partial s_i}$, 而

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

故

$$\nabla_3 \psi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \quad (1.7)$$

其中:

$$\nabla_3 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \quad (1.8)$$

现在, 我们来推导向量 $\mathbf{A}$ 的散度和涡度。

由于 $\mathbf{e}_i$ 是可变向量, 在不同点处, 其方向不同。在推导之前, 我们必须求出 $\nabla_3 \times \mathbf{e}_1$ 和 $\nabla_3 \cdot \mathbf{e}_1$ 等。

因 $\nabla_3 \times \nabla_3 q_1 = 0$, 而按(1.8)式, $\nabla_3 q_1 = \frac{1}{h_1} \mathbf{e}_1$, 故

$$\nabla_3 \times \frac{1}{h_1} \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \times \nabla_3 \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_1} \nabla_3 \times \mathbf{e}_1 = 0$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \nabla_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1 \times \nabla_3 \frac{1}{h_1} \\ &= \mathbf{e}_1 \times (-1) \left(\frac{1}{h_1^3} \frac{\partial h_1}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_1^2 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \right) \end{aligned}$$

所以

$$\nabla_3 \times \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \quad (1.9)$$

类似地,我们可以得到

$$\nabla_3 \times \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} \quad (1.10)$$

$$\nabla_3 \times \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} - \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \quad (1.11)$$

又因

$$\begin{aligned} \nabla_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= \nabla_3 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_3 \times \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_2 \cdot (\nabla_3 \times \mathbf{e}_3) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_2 h_3)}{\partial q_1} \end{aligned} \quad (1.12)$$

类似地,还有

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{e}_2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_1 h_3)}{\partial q_2} \quad (1.13)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_1 h_2)}{\partial q_3} \quad (1.14)$$

如

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3,$$

则

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \cdot \nabla_3 \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \cdot \nabla_3 \mathbf{a}_i)$$

其中 $\mathbf{a}_i$ 是矢量 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{e}_i$ 方向的投影。把(1.8)式和(1.12)–(1.14)式代入上式,散度 $\nabla_3 \cdot \mathbf{A}$ 在正交曲线坐标中的表达式成为

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 h_1 h_2) \right\} \quad (1.15)$$

如 $\mathbf{A} = \nabla_3 \psi$, 则有

$$\begin{aligned} \nabla_3^2 \psi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

又因

$$\nabla_3 \times \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \nabla_3 \times (a_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^3 [-\mathbf{e}_i \times \nabla a_i + a_i (\nabla \times \mathbf{e}_i)]$$

把(1.8)式和(1.9)–(1.11)式代入,则可以得到 $\nabla_3 \times \mathbf{A}$ 在正交曲线坐标中的表达式,即

$$\nabla_3 \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

于是,涡度 ζ 可以表示为

$$\zeta = \zeta_1 \mathbf{e}_1 + \zeta_2 \mathbf{e}_2 + \zeta_3 \mathbf{e}_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

其中:

$$\mathbf{V}_3 = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3; \quad \boldsymbol{\zeta} = \nabla_3 \times \mathbf{V}_3.$$

3. 向量的个别变化

根据向量分析公式

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}_3}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla_3 (\mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{V}_3) - \mathbf{V}_3 \times \boldsymbol{\zeta} \quad (1.19)$$

而沿 q_1 坐标的分量有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right)_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \left[\frac{1}{2} \nabla_3 (\mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{V}_3) \right]_1 &= \frac{1}{h_1} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) \\ -(\mathbf{V}_3 \times \boldsymbol{\zeta})_1 &= -v_2 \xi_3 + v_3 \xi_2 \\ &= \frac{v_2}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial h_1 v_1}{\partial q_2} - \frac{\partial h_2 v_2}{\partial q_1} \right) + \frac{v_3}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial h_1 v_1}{\partial q_3} - \frac{\partial h_3 v_3}{\partial q_1} \right) \end{aligned}$$

把上面三式代入方程(1.19)的分量式, 于是

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} \right)_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{h_1} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{1}{h_2} v_2 \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{1}{h_3} v_3 \frac{\partial v_1}{\partial q_3} \\ &\quad + \frac{1}{h_1} v_1 \left\{ \frac{v_1}{h_1} \left(\frac{\partial h_1}{\partial q_1} \right) + \frac{v_2}{h_2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right) + \frac{v_3}{h_3} \left(\frac{\partial h_1}{\partial q_3} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{h_1} \left\{ \frac{v_1^2}{h_1} \left(\frac{\partial h_1}{\partial q_1} \right) + \frac{v_2^2}{h_2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right) + \frac{v_3^2}{h_3} \left(\frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.20)$$

用同样方法, 可以求得方程(1.19)沿 q_2 和 q_3 坐标线的分量形式。

为了方便起见, 我们可以把(1.20)式改写成

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} \right)_i &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{h_i} v_j \partial_j \frac{\partial v_i}{\partial q_i} + \frac{v_i}{h_i} \left(\frac{v_j}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right) \\ &\quad - \frac{1}{h_i} \frac{v_j^2}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (1.21)$$

其中: $i, j=1, 2, 3$ 。凡式中下标 j 重复出现的项表示要对 j 求和。如

$$\frac{v_j}{h_j} \frac{\partial v_i}{\partial q_j}$$

表示

$$\sum_{j=1}^3 \frac{v_j}{h_j} \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \quad (1.22)$$

§ 2 大气运动的基本方程

根据动力气象学, 大气运动的基本方程是

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 P - 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 + \mathbf{g} + \mathbf{F}_3 \quad (1.23)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = 0 \quad (1.24)$$

$$p = \rho R T \quad (1.25)$$

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = Q \quad (1.26)$$

其中: $\mathbf{V}_3$ 是三维风速; p, ρ, α, T 各是气压、密度、比容和温度, $\alpha = \frac{1}{\rho}$; Ω 是地球自转角速度; $\mathbf{g}$ 是重力加速度; $\mathbf{F}_3$ 是摩擦力; c_v 是定容比热; Q 是非绝热加热率。

在上述方程组中, 如果摩擦和非绝热加热率是已知函数, 或者可以用这方程组中其他物理量来表示, 其未知函数只有 u, v, w, p, ρ, T 。其个数和方程数相同。则方程组是闭合的。

利用公式(1.19), 方程(1.23)还可以写为

$$\frac{\partial \mathbf{V}_3}{\partial t} + \nabla_3 \frac{1}{2} (\mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{V}_3) = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p - (2\Omega + \zeta) \times \mathbf{V}_3 + \mathbf{g} + \mathbf{F}_3 \quad (1.23)'$$

这是运动方程的另一种形式。

热力学方程(1.26)还可以写为

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \quad (1.27)$$

其中: c_p 是定压比热。

如考虑水汽发生从气态到液态的相变, 则状态方程和热力学方程应分别为

$$p = \rho R T_v \quad (1.28)$$

和

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q - L \frac{dq}{dt} - c_l m \frac{dT}{dt} \quad (1.29)$$

其中: T_v 是虚温, $T_v = (1 + 0.608 q)T$; q 是比湿; m 是单位质量空气中的液体水; L 是潜热; c_l 是液态水的比热。注意, 这时, Q 中只包含潜热和液体水增温所需热量以外的加热。

在讨论相变的过程时, 还需要用到水汽方程, 即

$$\frac{d}{dt} \rho_v \alpha = \frac{S}{\rho} \quad (1.30)$$

其中: ρ_v 是水汽密度; S 是水汽源或汇, 表示单位时间单位体积内, 增加(或减少)的水汽的质量。

容易看出, 上方程表示单位质量空气中水汽量 $\rho_v \alpha$ 的变化等于单位质量空气中水汽的源或汇。

现在, 我们来推导方程(1.30)

众所周知, 空气是由多种气体组成的混合气体。在常温下, 它们之间没有化学变化。因此, 在固定空间内, 空气中某气体质量的变化, 可以看成是仅有该气体存在时该气体质量的变化。设水汽的密度是 ρ_v , 根据连续方程

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\nabla_3 \cdot \rho_v \mathbf{V}_3 + S \quad (1.31)$$

其中: S 是水汽的源或汇, 如由于蒸发、凝结或湍流扩散造成水汽量的改变等。在另一方面, 如果空气的密度为 ρ , 则

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla_3 \cdot \rho \mathbf{V}_3 \quad (1.32)$$

按比湿定义, $q = \rho_v / \rho$ 。用 q 乘上式, 减去(1.31)式, 我们可以得到用 q 表示的水汽变化方程

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \rho_v \alpha = \frac{S}{\rho} \quad (1.33)$$

§ 3 球极坐标的基本方程

令

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda \quad (1.34 a)$$

$$y = r \cos \varphi \sin \lambda \quad (1.34 b)$$

$$z = r \sin \varphi \quad (1.34 c)$$

其中, r 是所考虑点到球心的距离, λ, φ 各是经度和纬度。于是

$$dx = -r \cos \varphi \sin \lambda d\lambda - r \sin \varphi \cos \lambda d\varphi + \cos \varphi \cos \lambda dr$$

$$dy = r \cos \varphi \cos \lambda d\lambda - r \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + \cos \varphi \sin \lambda dr$$

$$dz = r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr$$

故

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + r^2 \cos^2 \varphi (d\lambda)^2$$

$$h_1 = h_\lambda = r \cos \varphi, h_2 = h_\varphi = r, h_3 = h_r = 1 \quad (1.35)$$

于是

$$\begin{aligned} \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 &= \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\nabla_3 \psi = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r \quad (1.37)$$

$$\xi = \nabla_3 \times \mathbf{V}_3 = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \begin{vmatrix} r \cos \varphi \mathbf{e}_\lambda & r \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_r \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial r} \\ r \cos \varphi u & r v & w \end{vmatrix} \quad (1.38)$$

$$\nabla_3^2 \psi = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (1.39)$$

其中: $\mathbf{V}_3 = u \mathbf{e}_\lambda + v \mathbf{e}_\varphi + w \mathbf{e}_r$,

$$\begin{cases} u = r \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \approx a \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \\ v = r \frac{d\varphi}{dt} \approx a \frac{d\varphi}{dt} \\ w = \frac{dr}{dt} \end{cases} \quad (1.40)$$

其中: a 是地球的平均半径。

现在, 我们来推导球极坐标中的运动方程和连续方程。

因为 $2\Omega = \bar{f}\mathbf{e}_\varphi + f\mathbf{e}_r$, 有

$$2\Omega \times \mathbf{V}_3 = (-fv + \bar{f}w)\mathbf{e}_\lambda + fu\mathbf{e}_\varphi - \bar{f}u\mathbf{e}_r \quad (1.41)$$

其中: $f = 2\Omega \sin\varphi$; $\bar{f} = 2\Omega \cos\varphi$; Ω 是地球自转角速度的值。

把(1.41)式代入运动方程(1.23), 并利用公式(1.20)–(1.22), 再用 $-g\mathbf{e}_r$ 代替 $\mathbf{g}$, a 代替 r , 则沿纬线、经线和垂直方向的运动方程各可以写作

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dt} - \frac{uv}{a} \operatorname{tg}\varphi + \frac{uw}{a} - fv + \bar{f}w \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{a \cos\varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a} \operatorname{tg}\varphi + \frac{vw}{a} + fu = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi \quad (1.43)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} - \bar{f}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + F_r \quad (1.44)$$

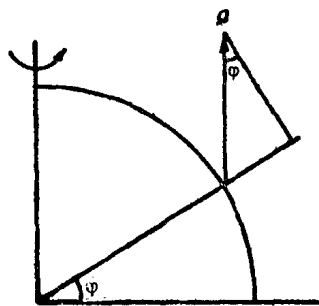


图 1.2

其中:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.45)$$

利用公式(1.36), 连续方程成为

$$\begin{aligned} & \frac{d\rho}{dt} + \rho \left\{ \frac{1}{a \cos\varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos\varphi) \right. \\ & \left. + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) \right\} = 0 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} & \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{1}{a \cos\varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v \operatorname{tg}\varphi}{a} \right. \\ & \left. + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2w}{a} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

§ 4 局地直角坐标的基本方程

所谓局地直角坐标系, 是指原点取在地球某点, 以 x -轴指向东, y -轴指向北, z -轴指向天顶的直角坐标系。这种坐标系对研究短期、范围比整个球面小得多的天气演变, 可以起到简化动力方程的作用。这时, 在方程(1.42)–(1.44)中, 可以略去和地球曲率 $\frac{1}{a}$ 有关的项 $u^2 \operatorname{tg}\varphi/a$ 等。如再略去与 $\bar{f}$ 有关的小项, 并令

$$dx = a \cos\varphi d\lambda$$

$$dy = a d\varphi$$

$$dz = dr$$

则运动方程组成为

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \quad (1.47)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \quad (1.48)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \quad (1.49)$$

而连续方程成为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.50)$$

其中:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.51)$$

$$z = r - a_0$$

如令 $\mathbf{V}_3 = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, $2\boldsymbol{\Omega} = f\mathbf{k}$, 容易看出, 方程(1.47)–(1.49)和连续方程(1.50)各可以表示为和方程(1.23), (1.24)相似的形式, 即

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p - f\mathbf{k} \times \mathbf{V}_3 - g\mathbf{k} + \mathbf{F}_3 \quad (1.52)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = 0 \quad (1.53)$$

$$\text{但这时需令 } \nabla_3 \cdot = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}; \quad \nabla_3 = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

§ 5 柱极坐标的基本方程

令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, 则

$$\begin{cases} dx = -r \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi dr \\ dy = r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr \\ dz = dz \end{cases}$$

于是

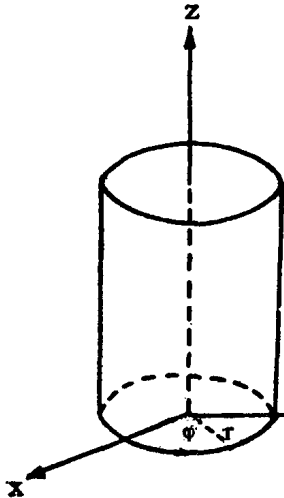


图 1.3 柱极坐标

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$$

$$\text{故 } h_r = 1, h_\varphi = r, h_z = 1 \quad (1.54)$$

利用(1.8)和(1.15)–(1.17)式, 我们可以得到

$$\nabla_3 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.55)$$

$$\nabla_3^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \quad (1.56)$$

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \nabla_3 \times \mathbf{V} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & r v_\varphi & v_z \end{vmatrix} \quad (1.57)$$

现在, 我们来推导运动方程。

从方程(1.52)和(1.53)出发, 令 $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$, 利用公式(1.21), 我们可以求得柱极坐标中的运动方程和连续方程