平差计算

（习题题解）

[西德] H.沃尔夫

测绘出版社

平差计算

（习题题解）

［西德］H·沃尔夫　著

方佩竹　译

胡明城　校

测绘出版社

内 容 提 要

本书作者H·沃尔夫是当代西德理论测量学家，著述宏富，有著名的"沃尔夫平差法"。

《平差计算》分作两卷出版，第一卷是实用公式，译本已由我社于1983年出版；本书是第二卷，即习题题解，兼有部分示例。内容侧重平差计算在各种测量技术方面的应用。通过典型例题，着重解决计算中所遇到的困难。也吸收了最小二乘法的现代发展。

本书与第一卷在结构、计算技术和专业术语方面有紧密联系，又独立自成系统，每章均按矩阵书写方式列出简明公式一览表。

本书可供科研、教学和作业人员以及在校学生参考。

平 差 计 算

（习题题解）

［西德］H·沃尔夫 著

方佩竹 译

胡明城 校

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本850×1168 1/32·印张11.75·字数302千字

1985年10月第一版·1985月10月第一次印刷

印数 1—5,500册·定价 3.20 元

统一书号：15039·新 374

前　言

众所周知，平差计算是通过它的应用予以肯定的，并通过实用来证明它的正确性。事实上，平差计算除了以测量学为其主要应用领域之外，还在天文学、地球物理学、农业、国民经济和统计学等方面得到了广泛应用。然而，试图包罗最小二乘法的全部运用，并相应地通过习题予以说明，这将是一种空想，同样也是多余的。

因此，本例题集侧重于叙述平差计算在测量技术方面的应用。但并不要求完整性和处理测量学中会出现的一切平差情况，而是通过所选择的典型例题，着重于解决列出解答式子所遇到的困难。本书也吸收了最小二乘法的一些现代发展，它们可以概括为自由网、伪求逆、拟合推估、条样函数和统计假设检验等等概念，这些都是必须了解的。

本书与《平差计算》（实用公式）一书在结构、计算技术和专业术语方面是紧密联系的；本书许多地方出现的方括号提示均涉及前书有关内容。虽然如此，但是本例题集是独立的和自成系统的论著，因为每一章均按矩阵书写方式列有简明的公式一览表。

运用平差计算的困难，通常不在于对理论上公式推导的理解，而是在于平差方法的处理，因为当提出实际问题时：一旦认清了如何为此特定问题建立思维模型，运用何种基本关系式，则计算的实施不会再有困难。

因此，本书中各个例题严格按照函数模型或随机模型的类别排列：从非相关观测的简单问题到需要顾及观测量间相关性的较为费事的问题。

本书中只有一部分例题是用数字详细表述的，其它的例题只

列出解答式子。为了不致使人们产生一种以为平差计算问题就是数值计算的印象，这样的安排看来是适宜的，特别是当数值计算超过一定范围时，人们会以为平差计算所要考虑的只是用计算机进行计算和编制程序。

本书可作为学生家庭作业和考前准备的辅助读物，作业员也可以根据示例进行平差计算。

考虑到作业员只是偶尔从事平差计算，故书后附有详细的名称和主题索引，因而对出现的具体平差任务，可以比较容易地查考和得到解答。

H·沃尔夫（Helmut Wolf）

1978年5月于波恩

目 录

第Ⅰ篇 非相关观测

习 题：

第Ⅱ篇　相关观测

第Ⅲ篇 统计检验法

第 I 篇　非相关观测

非相关观测的标志是，在各观测结果之间，[C 2]中定义的所有相关系数 r 都为零。

I 1　根据真误差计算中误差

对所有的真误差，都假定其真值（=相对于总体的期望值，参见[C1.2.2]）为零。

因为每一观测列或误差列在统计上可以看成为一个随机样本，所以它的范围，即所考察的观测个数不应过少，这一点是很重要的。

I1.0　一般情况

区分为以下 A、B 和 C 三种情况

A）一维误差

可以作为一维真误差处理的有

a）观测值 L 对其真值● X 的偏差 ε:

参见[A1.2]: $\varepsilon_i = X - L_i$，（$i = 1, 2, \cdots, n_\varepsilon$）

（I 1.1-1）

（n_ε = 偏差值 ε 的个数）。

那么一个 L_i 值的中误差 m_i 为

$$m_i = \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]/n_\varepsilon} \qquad \text{（I 1.1-2）}$$

● 就实用目的来说，若其它观测值 $\overline{L}$ 的精度比 L 高得多，则把真值 X 作为 $\overline{L}$ 的平均值就足够了。

b）双观测 L' 及 L'' 之间的差值 d：

参见[A1.6]：$d_j = L''_j - L'_j$，（$j = 1, 2, \cdots, n_d$）

（Ⅰ1.1-3）

（n_d = 差值 d 的个数）。

然后一个 d_j 值（权为 p_j）的中误差 m_{d_j} 为

$$m_{d_j} = m_{d_0} \Big/ \sqrt{p_j}\text{，其中 } m_{d_0} = \sqrt{[pdd]/n_d}$$

（Ⅰ1.1-4）

c）相互独立的不符值 w：

w 由观测值 L 组成，参见[A3.7]，例如按线性（或线性化）的形式：

$$w_1 = a_1L_1 + a_2L_2 + \cdots \qquad w_2 = b_1L_1 + b_2L_2 + \cdots$$

$$w_3 = c_1L_1 + c_2L_2 + \cdots$$

即 $w_1 = [aL]$　$w_2 = [bL]$　$w_3 = [cL]$

（Ⅰ1.1-5）

只要表明

$$[ab/p] = 0,\ [ac/p] = 0,\ [bc/p] = 0,\ \cdots \qquad \text{（Ⅰ1.1-6）}$$

（$p_k = L_k$ 的权，$k = 1, 2, \cdots, n_w$）

然后一个 L_k 值（权为 p_k）的中误差 m_k 为

$$m_k = m_0/\sqrt{p_k} \quad \text{而} \quad m_0 = \sqrt{[pww]/n_w} \qquad \text{（Ⅰ1.1-7）}$$

（n_w = 不符值 w 的个数）。

式中　$p_1 = \dfrac{1}{[aa/p]}$，$p_2 = \dfrac{1}{[bb/p]}$，$p_3 = \dfrac{1}{[cc/p]}$

（Ⅰ1.1-8）

假定熟悉矩阵计算，参见[$\underline{D}$]，则（Ⅰ1.1-7）亦可写成

$$m_0 = \sqrt{\underline{w}^T\,\underline{p}\,\underline{w}/n_w} \qquad \text{（Ⅰ1.1-9）}$$

式中

$$\underline{w}^T=[w_1,\ w_2,\ w_3,\ \cdots],\qquad p=\begin{bmatrix} p_1 & & \\ & p_2 & \\ & & p_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

（Ⅰ1.1-10）

d）彼此相关的不符值w：

w由观测值L组成：

（1）若一开始即确定条件（Ⅰ1.1-6）未得到满足，亦即各个不符值w并非互独立的，则必须用下式代替上节各式进行计算：

$$m_k=m_0/\sqrt{p_k},\ \text{而}\ m_0=\sqrt{\underline{w}^T\underline{Q}_w^{-1}\underline{w}/n_w}\qquad（Ⅰ1.1-11）$$

式中

$$\underline{Q}_w=\begin{bmatrix} [aa/p], & [ab/p], & [ac/p], & \cdots \\ [ab/p], & [bb/p], & [bc/p], & \cdots \\ [ac/p], & [bc/p], & [cc/p], & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\qquad（Ⅰ1.1-12）$$

（2）在此情况下(即彼此相关的w)，尽管应用了(Ⅰ1.1-7)，(Ⅰ1.1-9)，这只是具有近似计算的性质!

（3）布耶哈马（Bjerhammar）给出一种代替公式，他认为其结果与（Ⅰ1.1-11）所得的结果之差最大约为10%．代替（Ⅰ1.1-11）的公式为

$$m_k=m_0/\sqrt{p_k}$$

$$\text{而}\ m_0=\sqrt{[ww]\Big/\left(\left[\frac{aa}{p}\right]+\left[\frac{bb}{p}\right]+\left[\frac{cc}{p}\right]+\cdots\right)}$$

（Ⅰ1.1-13）

历史上的误差衡量标准：

（只用于a）的情况，亦即用以代替（Ⅰ1.1-2）式）

（1）L_i的平均误差：　$t_i=[|\varepsilon|]/n$，

（2）L_i的或然误差：　$r_i=|\overline{\varepsilon}|$

若将相应的误差列按$|\varepsilon|$上升的顺序排列，则上式中的$|\overline{\varepsilon}|$正

是位于该列中央的$|\varepsilon|$值。　　　　　　　　　　　　(Ⅰ1.1-14)

(3) L_i 的似或然误差：$r'_i=([\sqrt{|\varepsilon|}]/n_i)^2$

同时必须是　$|m|>|t|>|r'|$　　　　　　　　　　　(Ⅰ1.1-15)

B) 二维误差(在x，y平面上)，参见[A1.2.2]

1) 坐标中误差 m_x 及 m_y：

$$m_x=\sqrt{[\varepsilon_x\varepsilon_x]/n}, \quad m_y=\sqrt{[\varepsilon_y\varepsilon_y]/n} \qquad (\text{Ⅰ}1.1\text{-}16)$$

($n=x$坐标真误差$\varepsilon_x=x-L_x$的个数，与y坐标真误差$\varepsilon_y=y-L_y$的个数相同)。

2) 点位中误差(依赫尔默特)：

$$m_p=\sqrt{m_x^2+m_y^2}=\sqrt{[\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2]/n} \qquad (\text{Ⅰ}1.1\text{-}17)$$

没有根据认为x和y的精度必定不同，因而不必分别求m_x及m_y，而依下式计算综合的坐标中误差$m_{x,y}$：

$$m_{x,y}=m_p/\sqrt{2}=\sqrt{[\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2]/2n} \qquad (\text{Ⅰ}1.1\text{-}18)$$

C) 关于三维或多维误差，参见[A1.2.2]

Ⅰ1.1　根据对真值的偏差计算中误差

习　题Ⅰ1.1-Nr.1：光学测距的中误差

观　测：

采用光学测距仪(作地形测量)，得出作为等精度的L，其真值为X.

试　求：

一个L值的中误差m，以及相应的平均误差、或然误差与似或然误差。

解　答：

按照式(Ⅰ1.1-2)及(Ⅰ1.1-14)计算如下：

中误差　　$m=\sqrt{4.007/10}=\pm0.63$m,

平均误差　　$t=\pm5.49/10=\pm0.55$m,

或然误差　　$r=\pm(0.50+0.55)/2=\pm0.52$m,

似或然误差　$r'=\pm(6.920/10)^2=\pm0.48$m.

L=实测值	X=真值	ε	ε^2	$\sqrt{\varepsilon}$
m	m	m		
65.8	65.81	+0.01	0	0.100
68.0	67.85	−0.15	22	0.387
61.9	61.55	−0.35	122	0.592
64.5	64.97	+0.47	221	0.686
61.4	61.90	+0.50	250	0.707
69.5	68.95	−0.55	302	0.742
67.8	68.50	+0.70	490	0.837
62.8	63.52	+0.72	518	0.849
69.2	70.19	+0.99	980	0.995
64.7	63.65	−1.05	1.102	1.025
总和55.6	56.89	+3.39 −2.10 +1.29	4.007	6.920

(ε及L按$|\varepsilon|$值上升的顺序排列)

习　题 I 1.1-Nr.2：量取坐标的中误差

观　测：

在一平板仪图幅上三次彼此独立地量取A点的坐标L_{x_i}及L_{y_i}($i=1, 2, 3$)。

已　知：

A点的真坐标X及Y。

试　求：

量取的中误差m_x及m_y，综合的点位中误差m_p。

解　答：

按照式(I 1.1-17)及(I 1.1-18)计算：

a)坐标中误差：　$m_x = \sqrt{21.6/3} = \pm 2.6\text{m}$

$m_y = \sqrt{42.3/3} = \pm 3.8\text{m}$

b)点位中误差：　$m_p = \sqrt{(21.6+42.3)/3} = \pm 4.6\text{m}$

凑整：

$m_x = \pm 3\text{m}$，　$m_y = \pm 4\text{m}$，　$m_p = \pm 5\text{m}$