高等学校自学函授教材

数学分析

（上册）

郑宪祖　王仲春
赵更吉　王利民　姚　兵　编

陕西科学技术出版社

责任编辑 赵生久

高等学校自学函授教材

数 学 分 析

（上 册）

郑宪祖 王仲春
赵更吉 王利民 姚 兵 编

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行 平凉地区印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 18印张 384千字

1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷

印数：1—9,000

统一书号：7202·113 定价：3.70元

TJ1/234/08

前　言

本书分上、下两册．上册包括：极限理论与一元函数微积分；下册包括：级数理论和多元函数微积分．根据自学为主的特点，本书精选内容、分散难点，贯彻启发式，力争对读者有一定的吸引力；在叙述上，尽力作到深入浅出、通俗易懂、便于自学；在体例上，每章由两部分组成，第一部分为教材正文，第二部分为自学指导与参考资料．

自学指导与参考资料主要内容包括："内容结构分析与要点"，它是本章概括性的总结，利于读者从教材结构上系统地掌握所学内容，了解其重点；"基本内容、原理的补充说明"，供教师教学参考及学有余力的读者进一步钻研教材内容；"典型例题与解题方法"，通过各种类型的例题，总结一些解题的方法，除供教学或解题时的参考外，可为自学考试提供资料．

本书是甘肃省教育厅高教局委托西北师范学院函授部组织人力编写的，主要供函授大学、夜大学、电大、教师进修学院、中等专业学校及有志自学成材者学习，也可作为全日制大学自学教材或教学参考书．

本书由西北师范学院郑宪祖教授主编，在编写和出版过程中，得到了陕西科学技术出版社的大力支持，在此表示感谢．

由于我们水平有限，缺点错误及疏漏之处难免，希读者批评指正．

编　者

1985.7.

目　录

第一章　函　数

函数是数学分析研究的对象，它不仅在数学中处于非常重要的地位，而且在其他自然科学、工程技术中都被广泛地应用．因此，掌握函数概念，对今后的学习具有重要意义．

§1.1　集　合

集合不仅是建立函数概念的基础，而且是现代数学的一个最基本的重要概念，它的方法和记号几乎渗透到数学的每一个分支．本节首先对集合作一简要介绍．

一　集合的概念

集合是一个原始概念．因此，它的含义只能通过实例来说明．

例 1　某工厂内正在自学大学课程的职工的全体就构成一个集合．该集合中每一个成员称为这个集合的一个元素．

例 2　方程 $x^2+x-6=0$ 的全部实根构成一个集合．该方程的每个实根称为这个集合的一个元素．

例 3　在平面直角坐标系中，圆 $x^2+y^2=1$ 上的全体点组成一集合．同样，圆上的每一个点称为这个集合的一个元素．

例 4　方程 $x^2+1=0$ 没有实根，我们称方程 $x^2+1=0$ 的所有实根的集合为空集，用 ϕ 表示．

集合A与它的元素a之间的隶属关系记作$a \in A$，读作“a属于A”．若b不是集合A的元素，记作$b \notin A$，读作“b不属于A”．

上述的例子告诉我们，集合的元素可以是人、点或数等等．如果集合中所有的元素都是数，就称此集合为数集．例2中的集合就是一个数集．集合中元素的个数可能是有限，也可能是无限．如果是有限，就称此集为有限集；如果是无限，就称为无限集．如例2为有限集，例3为无限集．

二　集合的表示法

1　列举法　把集合的元素按任意顺序一一列举出来，写在一个花括号内．在列举时，既不能重复，也不能遗漏．

例5　在第一段例2中，由于方程$x^2+x-6=0$只有两个实根$x_1=2$和$x_2=-3$，所以此方程全体实根的集A可写成$A=\{2, -3\}$或$A=\{-3, 2\}$．

但是，将A写成$A=\{2\}$或$A=\{2, 2, -3\}$都是不允许的，因为前者将方程的一个实根-3漏掉了，后者多写了一个实数2．

例6　由全体自然数构成的数集N，虽然含有无穷多个元素，但它们可以按大小次序由小到大一一列举出来，写成

$$N=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

2　构造式法

一般，当谈到一个集合E时，总是指具有某个共同性质p的元素的全体，记作

$$E=\{x \mid x\text{具有性质}p\},$$

其中竖线左边的x表示集E的元素．这种表示集合的方法称

为构造式法。

例 7 用C表示第一段例 3 中的集合，则C可记为

$$C=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=1\}.$$

其中$(x,\ y)$是集合 C 的元素，即平面上的点。$x^2+y^2=1$表示集合C的元素满足的特定性质p，即点$(x,\ y)$到原点的距离为 1。

三 集合的运算

在讲集合的运算之前先介绍两个重要概念：子集与两个集合的相等。

定义 1 设A,B是两个集合，如果$a\in A\Rightarrow a\in B$[1]，称A是B的子集，或A包含在B内(也称B包含A)，记作$A\subseteq B$。如果至少有一个元素 b，且$b\in B$，但$b\notin A$，称A是 B 的真子集，记作$A\subset B$。

例如全体自然数集N，全体有理数集Q，全体实数集R之间的包含关系是：$N\subset Q\subset R$。

另外，我们约定空集ϕ是任何一个集合A的子集，即$\phi\subseteq A$。

定义 2 如果$A\subseteq B$，并且$B\subseteq A$，则称集合A与集合B相等，记作$A=B$。

例如方程$x^2+x-2=0$的全体实根的集合与$1,-2$两个元素构成的集合是相等的集合。

下面介绍常用的几种集合运算。

1 并 设有集合A、B，如果集合S是A和B的所有元素构成的集合，即

---

〔1〕“$A\Rightarrow B$”指由A推得B。

$$S=\{x \mid x\in A，或x\in B\}，$$

那么就称S是A和B的并集，记作

$$S=A\cup B.$$

例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d,e\}$，则

$$A\cup B=\{a,b,c,d,e\}.$$

2　交　设有集合A、B，如果集合M是A和B的所有公共元素构成的集合，即

$$M=\{x \mid x\in A，且x\in B\}，$$

则称M为A和B的交集，记作

$$M=A\cap B.$$

例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d,e\}$，则

$$A\cap B=\{b,c\}.$$

3　差　设有集合A、B，如果集合D是由属于B但不属于A的所有元素构成，即

$$D=\{x \mid x\in B，但x\notin A\}，$$

则称D为B对A的差集，记作

$$D=B\setminus A.$$

例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d,e\}$，则

$$B\setminus A=\{d,e\}，\quad A\setminus B=\{a\}.$$

从此例看出，一般，$B\setminus A$与$A\setminus B$是两个不同的集合。

两个集合A、B的并、交、差可以用图表示如下：

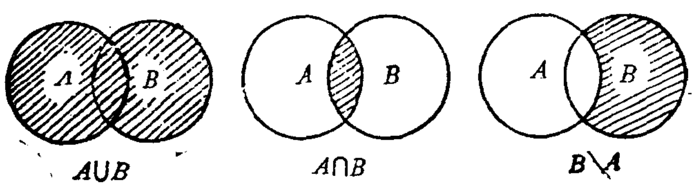

图1—1

思 考 题

1　设a是集合A的一个元素．写法

$$\{a\}\in A$$

对不对？说明理由。

2　设$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,3\}$．判断下列各式的正确性；

（1）$A\subset B$；　（2）$A\cup B=A$；　（3）$A\cap B=B$；

（4）$A\cap B=A$；　（5）$A\setminus B=\{0\}$；　（6）$B\setminus A=\phi$．

习 题

1　写出集$A=\{a,b,c,d\}$的一切子集，并指出它的真子集．问具有n个元素的集合共有多少个子集？

2　设$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e,f\}$．

（1）求$A\cap B$、$A\cup B$、$A\setminus B$、$B\setminus A$；

（2）验证$A\cap B\subset A$，$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$和$A\setminus B=A\setminus A\cap B$，$B\setminus A=B\setminus A\cap B$．

3　设$A=\{1,2\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{1,2,4,5\}$．验证

（1）$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$，（交换律）；

（2）$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，（结合律）；

（3）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，（分配律）．

§1.2　实 数 集

由于数学分析是在实数集内研究函数的，所以我们首先对实数集的一些重要性质作一简要介绍．

正如中学数学所指出的，凡能表示为分数$\frac{n}{m}$（m、n为整

数，且$m \neq 0$）的数，叫作有理数；凡不能表示成分数的数，叫作无理数。或者说，凡能表示成十进制无限循环小数的数，叫有理数；能表示成十进制无限非循环小数的数，叫无理数。有理数与无理数统称之为实数。例如：$\frac{1}{3}=0.3333\cdots$，$\frac{5}{2}=2.50000\cdots=2.4999\cdots$是有理数；$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，$\pi=3.14159\cdots$是无理数，它们都是实数。

一　实数的基本性质

1　关于四则运算的封闭性　对实数集中的任意两个实数进行加、减、乘、除（除数不为零），运算的结果仍是实数。

2　有序性

（1）　三岐性　实数集R中的任意两个实数a和b，一定满足下面三种关系

$$a<b, \quad a=b, \quad a>b$$

中的一种关系，且只能满足一种关系。

（2）　传递性　a, b, c是实数集R中的三个元素，若$a<b$，$b<c$，则$a<c$。

3　实数集R具有阿基米德[1]性质　即对任何两个正实数a、b，必存在自然数n，使得　$na>b$。

4　连续性　我们知道，自然数集N是有间隔的，即在任何一个自然数n和它的后继自然数$n+1$之间，再无任何自然数。在自然数集N的基础上建立的有理数集Q却是稠密

〔1〕阿基米德（Archimedes　前287—前212）古希腊数学家天文学家、力学家。

的，即任何两个有理数之间，必有无限多个有理数。然而，有理数集Q还是有空隙的，即有理数集Q和数轴上的点不能建立一一对应关系。在有理数集Q的基础上建立的实数集R不但是稠密的，而且没有空隙，也就是说，它可以和一条连续不断的数轴上的点建立一一对应关系。所以，我们说实数集R是一个连续的数集，或者说是完备数集。

这样，我们就可以把实数集的一切实数和数轴上的点等同起来，数轴就成为我们头脑中关于实数集的直观图形。借助于这个直观图形，我们就可以把实数集的有序性及连续性表示成：全体实数按照由小到大的顺序，在数轴上从左向右排列，且布满了整条直线。

今后，我们在叙述中，总把“实数a”与“数轴上的点a”两种说法等同起来。

二　绝对值不等式

实数a的绝对值$|a|$定义为：

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当}a\geqslant 0\text{时}, \\ -a, & \text{当}a<0\text{时}. \end{cases}$$

例如，6是正实数，所以$|6|=6$，-6是负实数，故$|-6|=-(-6)$。总之，实数a的绝对值$|a|$是一个非负实数。

在数轴上，正实数a位于原点o的右边，$|a|$表示了线段oa的长度，即点a到原点的距离（见图1—2）。负实数b位于原点o的左边，$|b|$也表示了线段bo的长度，即点b到原点的距离（见图1—2）。

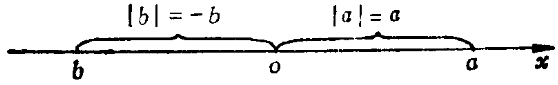

图 1—2

关于实数的绝对值，有如下的性质：

1）$|a| = |-a| \geqslant 0$，当且仅当$a = 0$时，才有$|a| = 0$；

2）$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$；

3）若$h > 0$，则$|a| < h \Longleftrightarrow -h < a < h$[1]。同样，$|a| \leqslant h \Longleftrightarrow -h \leqslant a \leqslant h$。

3）设a、b为两个任意的实数，则有不等式

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|;$$

5）$|ab| = |a| \cdot |b|$，$|a^n| = |a|^n$，n为自然数；

6）$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$。

下面给出性质3)和性质4)的证明，其它的证明请读者自行给出。

性质3)的几何意义是说：实数a到原点的距离小于(小于或等于)正数h，和$-h < a < h$（或$-h \leqslant a \leqslant h$）是一回事。现在给出证明：

先证　$|a| < h \Rightarrow -h < a < h$。

若$a \geqslant 0$，则$|a| = a$，根据$|a| < h$，有$a < h$；又因$a \geqslant 0$，$h > 0$，故$-h < a$。联结起来得 $-h < a < h$。

若$a < 0$，则$|a| = -a$，根据$|a| < h$，有$-a < h$，即$-h < a$；又因$a < 0$，故$a < h$。联结起来又得 $-h < a < h$。

再证　$-h < a < h \Rightarrow |a| < h$。

---

〔1〕符号"$\Longleftrightarrow$"表示相互推出，或等价的意思。

若$a\geqslant 0$，则$|a|=a$，根据$-h<a<h$中的右端不等式，得$|a|<h$。

若$a<0$，则$|a|=-a$，$-|a|=a$，根据$-h<a$，得$-h<-|a|$，从而又得$|a|<h$。

这样，$|a|<h\Longleftrightarrow -h<a<h$得证。同理可证$|a|\leqslant h\Longleftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h$。 ▌

性质4)的证明：

先证所谓三角不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$。若$a=b=0$，显然它成立。下面只考察a、b中至少有一个不为0的情况。我们利用性质2)、3)来证明。

由性质2)知，$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，故$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$。又$|a|+|b|>0$，于是由性质3)得

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \tag{1}$$

再证不等式$||a|-|b||\leqslant|a+b|$。由于$|a|=|(a+b)+(-b)|$，又$|-b|=|b|$，故由三角不等式，得$|a|\leqslant|a+b|+|b|$，即$|a|-|b|\leqslant|a+b|$。交换a与b，又得$|b|-|a|\leqslant|a+b|$。二者合起来有

$$-|a+b|\leqslant|a|-|b|\leqslant|a+b|, \tag{2}$$

再由性质3)得

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|.$$

联合(1)式与(2)式，得

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|. \tag{3}$$

因为$|-b|=|b|$，所以把(3)式中的b改为$-b$，又得$||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$。至此，已完全证明了性质4)。 ▌

如果碰到$|a+b+c|$，先将$a+b$看成一个数，即

$$|a+b+c|=|(a+b)+c|,$$

那么，根据性质4)，有

$$\big|\,|a+b|-|c|\,\big|\leqslant|a+b+c|\leqslant|a+b|+|c|.$$

再对$|a+b|$用性质 4)，得

$$\big|\,|a|-|b|-|c|\,\big|\leqslant|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|.$$

通常，三角不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$用得较多。利用数学归纳法，不难证得：n个实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$之和的绝对值不大于这n个实数绝对值的和．即

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|,$$

或缩写成

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|.$$

三 区间

区间是数学分析中最常用的一类特殊的数集．

设a、b为二实数，且$a<b$．把数集$\{x\,|\,a<x<b\}$叫做开区间，记为(a, b)．把数集$\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$叫做闭区间，记为$[a, b]$．把数集$\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$和$\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$称为半开半闭区间，分别记为$[a, b)$和$(a, b]$．上述区间称为有限区间，区间长度为有限数$b-a(>0)$．根据实数$x$与数轴上的点$x$的一一对应关系，上述区间反映在数轴上是图 1 — 3 所表示的开线段、闭线段及半开半闭线段．

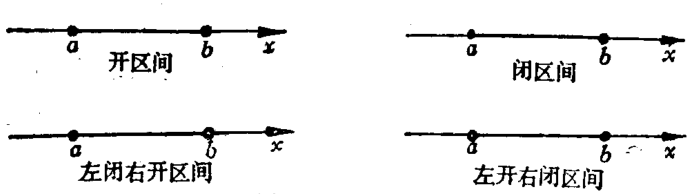

图 1 — 3