清华大学计算机系列教材

图论与代数结构

戴一奇 胡冠章 陈 卫

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

TSINGHUA COMPUTER

清华大学出版社

图论与代数结构

戴一奇　胡冠章　陈　卫

清华大学出版社

（京）新登字 158 号

内 容 简 介

离散数学是计算机专业的主要数学基础，本书与“数理逻辑与集合论”一起构成了清华大学计算机系的离散数学教材，全书共分 10 章：图论的基本概念；道路与回路；树；平面图与图的着色；匹配与网络流；图的连通性；代数结构预备知识；群；环和域；格与布尔代数。

全书结构紧凑、内容精炼、证明严谨、语言流畅。为了便于读者理解和掌握基本理论，书中提供了丰富的例题，同时给出了众多良好的图算法，并进行了复杂性分析。此外，每章附有较多习题，其难度恰当。

本书可作为计算机专业学生的教科书或参考书，也可供计算机工程技术人员作为参考。

图书在版编目（CIP）数据

图论与代数结构/戴一奇等编著。—北京：清华大学出版社，1995

ISBN 7-302-01814-6

Ⅰ．图… Ⅱ．戴… Ⅲ．①图论②代数-结构（数学） Ⅳ．①0157.5②015

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 03642 号

出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编 100084）
印刷者：北京通县宏飞印刷厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：787×1092　1/16　印张：14.25　字数：335 千字
版　次：1995 年 8 月第 1 版　　1995 年 8 月第 1 次印刷
书　号：ISBN　7-302-01814-6/TP・810
印　数：0001—4000
定　价：9.90 元

前　言

离散数学是计算机专业的基础数学课程，它以离散量为研究对象，主要包括数理逻辑、集合论、图论和代数结构四部分内容。

清华大学计算机科学与技术系把离散数学安排为“数理逻辑与集合论”，“图论与代数结构”两门课程，分两个学期讲授，各占 50 学时。

本书分两大部分，其中一～六章是图论，在第一章介绍了图的基本概念及其代数表示方法，第二至第六章分别详细讨论了道路与回路、树、平面图与图的着色、匹配与网络流、图的连通性等图的主要内容，并且将它们与计算机的应用紧密结合，分析介绍了众多良好的图算法，给出其正确性证明与复杂度分析，这样，使读者在图的应用及算法的设计与分析方面能得到较好的训练与培养。第七～十章是代数结构部分，主要讨论了群、环和域、格与布尔代数等内容，它们都是抽象代数的基本内容，是计算机科学的重要数学基础。

书中给出了大量的例题，它们不但有助于对概念的理解，同时也帮助读者掌握不同的证明方法。各章后面附有较多的习题，有难有易，同时还有一定数量的上机题，可以帮助读者熟悉掌握图的编程技巧。

本书是作者在使用多年“图论与代数结构”讲义的基础上完成的。其中戴一奇修改了第一～六章，胡冠章修改了第七～九章，并审定了全书，陈卫修改了第十章。在出版过程中，得到了周远清教授和林行良教授的热情支持，贾志红同志完成了全部书稿的输入与排版，在此一并表示感谢。

由于水平所限，本书难免出现错误与缺点，恳切希望得到广大读者，特别是讲授此课程的老师们的批评与指正。

目　　录

第一章　基 本 概 念

1.1　图 的 概 念

世界上许多事物以及它们之间的联系都可以用图形直观地表示。这时人们往往用结点表示事物，用边表示它们之间的联系。这种由结点和边构成的图形就是图论所研究的对象。

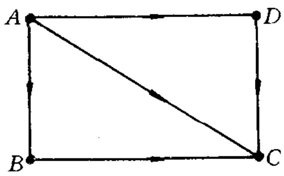
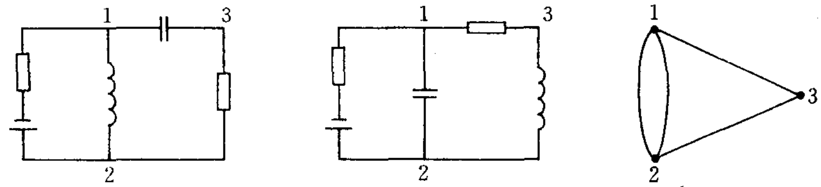


图　1.1



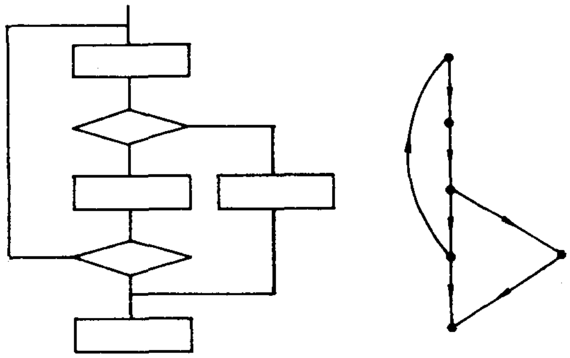
(a)　(b)　(c)

图　1.2

例 1.1.1　A、B、C、D 4 个队进行循环赛。为了解当前各队的胜负情况，可以用结点表示队，用有向边(u,v)表示 u 队胜 v 队。例如图 1.1 表示 A 胜 B、C、D；B 胜 C；D 胜 C，而 B 和 D 之间还没有比赛。

例 1.1.2　两个直流电路如图 1.2(a)(b)。基尔霍夫定律指出：电路特性只与电路网络的拓扑性质有关，而与支路元件的特性无关。因此都可以将它们转化为图 1.2(c)进行研究。

例 1.1.3　人们常用框图的形式来帮助编写或描述程序。当需要对程序进行分析时，也往往用结点表示程序框，用有向边表示它们之间的顺序关系，如图 1.3 。



(a)　(b)

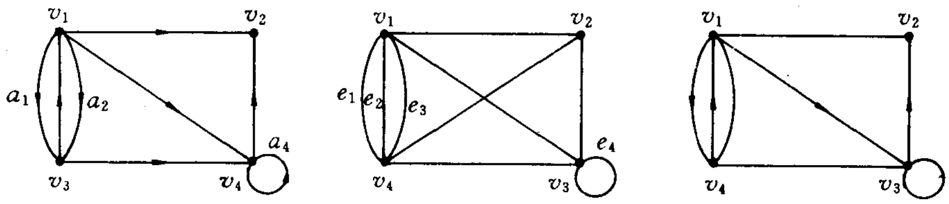
图　1.3

定义 1.1.1　二元组$(V(G),E(G))$称为图。其中$V(G)$是非空集合，称为结点集，$E(G)$是$V(G)$诸结点之间边的集合。常用$G=(V,E)$表示图。

图可以分为有限图与无限图两类。本书只讨论有限图，即 V 和 E 都是有限集。给定某个图$G=(V,E)$，如果不加特殊说明，就认为$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，即结点数$|v|=n$，边数$|E|=m$。

图 G 的边可以是有方向的，也可以是无方向的。它们分称为有向边(或弧)和无向边，用$e_k=(v_i,v_j)$表之。这时我们说 v_i 与 v_j 是相邻结点；e_k 分别与 v_i，v_j 相关联。如果 e_k 是有

向边，称 v_i 是 e_k 的始点，v_j 是 e_k 的终点；并称 v_i 是 v_j 的直接前趋，v_j 是 v_i 的直接后继。如果 e_k 是无向边，则称 v_i，v_j 是 e_k 的两个端点。全部由有向边构成的图叫有向图；只由无向边组成的图叫无向图；既有有向边又有无向边构成的图称为混合图。例如图 1.4(a)是有向图，(b)是无向图，(c)是混合图。在图 G 中，只与一个结点相关联的边称为自环，在同一对结点之间可以存在多条边，称之为重边。含有重边的图叫多重图。比如图 1.4(a)(b)中 a_4，e_4 分别是自环，a_1，a_2 和 e_1，e_2，e_3 分别是重边。



(a)　　(b)　　(c)

图 1.4

定义 1.1.2　$G=(V,E)$的某结点 v 所关联的边数称为该结点的度，用 $d(v)$表示。如果 v 带有自环，则自环对 $d(v)$的贡献为 2。

例如图 1.4(a)中，$d(v_1)=5$，$d(v_2)=2$，$d(v_3)=5$，$d(v_4)=4$。(b)中，$d(v_1)=5$，$d(v_2)=3$，$d(v_3)=5$，$d(v_4)=5$。有向图中由于各边都是有向边，因此每个结点 v 还有其正度($d^-(v)$)和负度($d^-(v)$)。$d^-(v)$的值是以 v 为始点的边的数目，$d^-(v)$是以 v 为终点的边的数目。显然有 $d^-(v)+d^-(v)=d(v)$。

定义 1.1.3　任意两结点间最多只有一条边，且不存在自环的无向图称为简单图。

以下所说的图在不加说明的情况下指的是无向图。

没有任何边的简单图叫空图，用 N_n 表示；任何两结点间都有边的简单图称为完全图，用 K_n 表示。K_n 中每个结点的度都是 $n-1$。

图 G 具有以下基本性质。

性质 1.1.1　设 $G=(V,E)$有 n 个结点，m 条边，则

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2m。$$

证明：由于每条边 $e=(u,v)$对结点 u 和 v 度的贡献各为 1，因此 m 条边对全部结点度的总贡献就是 $2m$。

性质 1.1.2　G 中度为奇数的结点必为偶数个。

证明：G 中任一结点的度或为偶数或为奇数，设 V_e 是度为偶的结点集，V_o 是度为奇的结点集。于是有

$$\sum_{v\in V_e} d(v) + \sum_{v\in V_o} d(v) = 2m,$$

因此 $\sum_{v\in V_o} d(v)$ 为偶数，即 V_o 中含有偶数个结点。

性质 1.1.3　有向图 G 中正度之和等于负度之和。

这是因为每条边对结点的正、负度贡献各为 1。

性质 1.1.4 K_n 的边数是$\frac{1}{2}n(n-1)$。

证明：K_n 中每各结点的度都是$(n-1)$，由性质 1.1.1 即得。

性质 1.1.5 简单图 G 中一定存在度相同的结点。

证明：设 G 中不存在孤立结点，则对 n 个结点的简单图，每个结点度 $d(v)$的取值范围是 $1\sim(n-1)$，由抽屉原理，一定存在两个度相同的结点。若存在孤立结点，亦类似可证。

定义 1.1.4 如果图 $G=(V,E)$的每条边 $e_i=(v_i,v_j)$都赋以一个实数 w_i 作为该边的权，则称 G 是赋权图。特别地，如果这些权都是正实数，就称 G 是正权图。

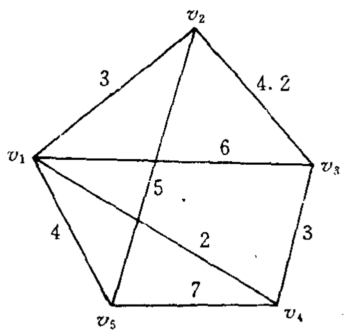


图 1.5

图 1.5 就是一个正权图。权可以表示该边的长度，时间，费用或容量等。

定义 1.1.5 给定 $G=(V,E)$，如果存在另一个图 $G'=(V',E')$，满足 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，则称 G'是 G 的一个子图。特别地，如果 $V'=V$，就称 G'是 G 的支撑子图或生成子图；如果 $V'\subseteq V$，且 E'包含了 G 在结点子集 V'之间的所有边，则称 G'是 G 的导出子图。

例如，图 1.6 中的 G_1 和 G_2 分别是 G 的支撑子图和导出子图，G_3 是 G 的子图。按照子图的定义，显然 G 也是它自身的子图，而且既是支撑子图，也是导出子图。空图也是 G 的子图，而且是支撑子图。它们都称为平凡子图。

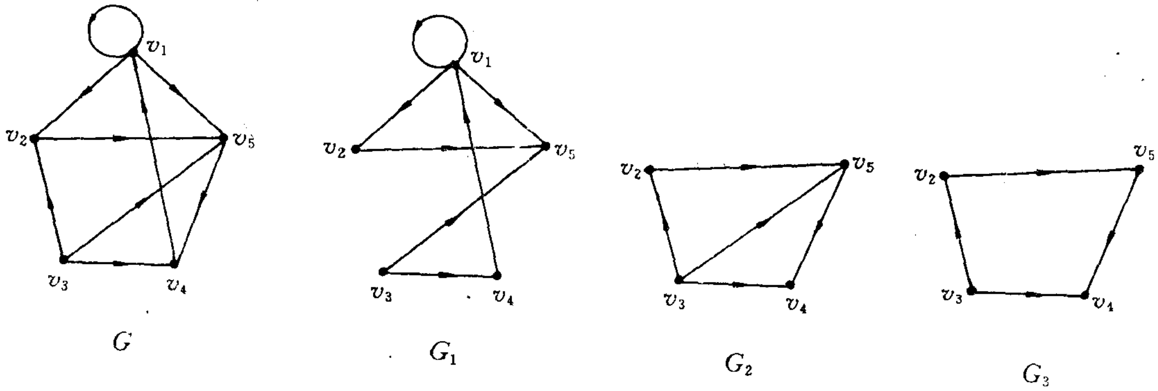
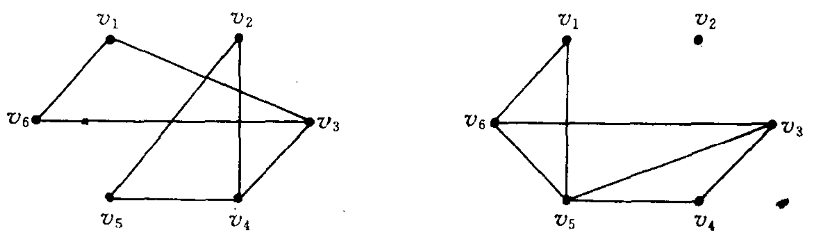


图 1.6

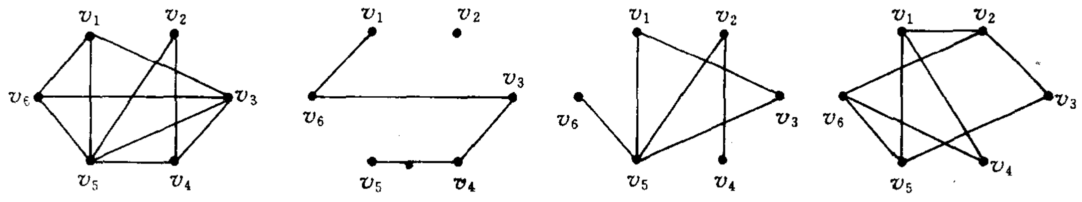
定义 1.1.6 给定两个图 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$。令 $G_1\cup G_2=(V,E)$，其中 $V=V_1\cup V_2$，$E=E_1\cup E_2$，$G_1\cap G_2=(V,E)$，其中 $V=V_1\cap V_2$，$E=E_1\cap E_2$，$G_1\oplus G_2=(V,E)$，其中 $V=V_1\cup V_2$，$E=E_1\oplus E_2$，分别称为 G_1 和 G_2 的并、交和对称差。

例如图 1.7 中 G_1 和 G_2 的并、交、对称差分别是(a)、(b)和(c)。

在 G 中删去一个子图 H，指删掉 H 中的各条边，记作 $G-H$，特别地，对于简单图 G，称 K_n-G 为 G 的补图，记作 $\overline{G}$。例如图 1.7 中 G_1 的补图是(d)。从 G 中删去某个结点 v 及其关联的边所得到的图记作 $G-v$。从 G 中删去某条特定的边 $e=(u,v)$，记作 $G-e$。例如图 1.6 中 $G-v_1=G_2$，$G_2-(v_3,v_5)=G_3$。显见 $G-v$ 是 G 的导出子图，而 $G-e$ 是 G 的支撑子图。如果在 G 中增加某条边 e_{ij}，可记作 $G+e_{ij}$，例如 $G_3+(v_3,v_5)=G_2$。



G_1　　G_2



(a)　(b)　(c)　(d)

图 1.7

如果 G 是无向图，则 $\Gamma(v)=\{u\,|\,(v,u)\in E\}$ 称为 v 的邻点集。

定义 1.1.7　设 v 是有向图 G 的一个结点，则

$$\Gamma^{+}(v)=\{u\,|\,(v,u)\in E\}$$

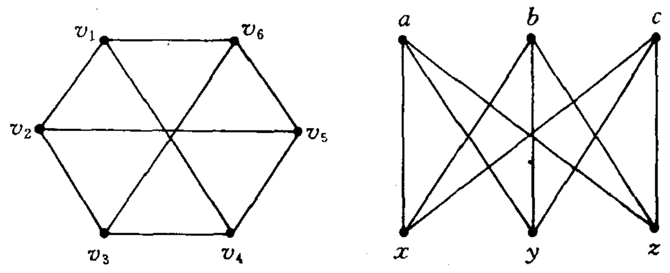
称为 v 的直接后继集亦称外邻集；相应地

$$\Gamma^{-}(v)=\{u\,|\,(u,v)\in E\}$$

称为 v 的直接前趋集亦称内邻集。

例如图 1.6(a)的 $\Gamma^{+}(v_1)=\{v_1,v_2,v_5\}$，$\Gamma^{-}(v_2)=\{v_5\}$；$\Gamma^{-}(v_1)=\{v_1,v_4\}$，$\Gamma^{-}(v_2)=\{v_1,v_3\}$。图 1.5 中，$\Gamma(v_1)=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$\Gamma(v_2)=\{v_1,v_3,v_5\}$。

给定了结点数目及它们之间的相邻关系，便很容易画出图 G，不过它的形状不是唯一的。这种形状不同但结构相同的图叫做同构。



G_1　　G_2

图 1.8

定义 1.1.8　两个图 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$，如果 V_1 和 V_2 之间存在双射 f，而且 $(u,v)\in E_1$，当且仅当 $(f(u),f(v))\in E_2$ 时，称 G_1 和 G_2 同构。记作 $G_1\cong G_2$。

例 1.1.4　图 1.8 的 G_1 和 G_2 是同构的。因为设 $f(v_1)=a$，$f(v_2)=x$，$f(v_3)=b$，$f(v_4)=y$，$f(v_5)=c$，$f(v_6)=z$ 时，对任意 $e=(u,v)\in E_1$，都有 $e'=(f(u),f(v))\in E_2$，反之亦然，即

$(v_1,v_2)\in E_1\leftrightarrow(f(v_1),\quad f(v_2))=(a,x)\in E_2$，

$(v_1,v_4)\in E_1\leftrightarrow(f(v_1),\quad f(v_2))=(a,y)\in E_2,$

$(v_1,v_6)\in E_1\leftrightarrow(f(v_1),\quad f(v_2))=(a,z)\in E_2,$

$(v_2,v_3)\in E_1\leftrightarrow(f(v_2),\quad f(v_3))=(x,b)\in E_2,$

$(v_2,v_5)\in E_1\leftrightarrow(f(v_2),\quad f(v_5))=(x,c)\in E_2,$

$(v_3,v_4)\in E_1\leftrightarrow(f(v_3),\quad f(v_4))=(b,y)\in E_2,$

$(v_3,v_6)\in E_1\leftrightarrow(f(v_3),\quad f(v_6))=(b,z)\in E_2,$

$(v_4,v_5)\in E_1\leftrightarrow(f(v_4),\quad f(v_5))=(y,c)\in E_2,$

$(v_5,v_6)\in E_1\leftrightarrow(f(v_5),\quad f(v_6))=(c,z)\in E_2,$

从定义可知，如若 $G_1\cong G_2$，必须满足。

(1) $|V(G_1)|=|V(G_2)|,\quad |E(G_1)|=|E(G_2)|$。

(2) G_1 和 G_2 结点度的非增序列相同。

(3) 存在同构的导出子图。

其中(3)对判定两个图不同构有时十分有效。例如图 1.9 的 G_1 不存在与 G_2 结点集$\{a,b,c,d,e,f\}$所成的导出子图同构的子图，因此 G_1 与 G_2 不同构。

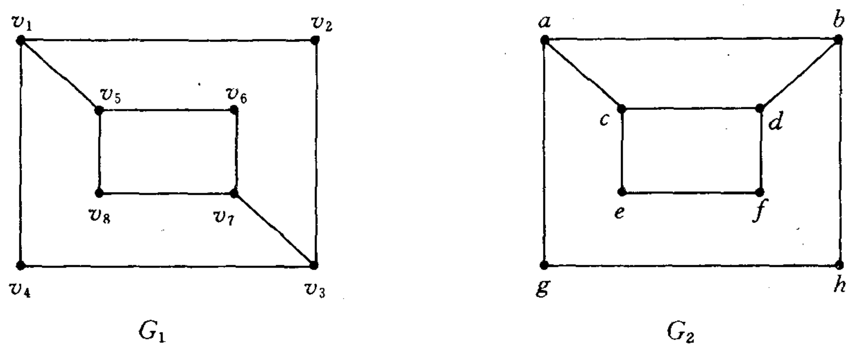


图 1.9

1.2 图的代数表示

在对图 G 进行描述或运算时，需要采用代数方法进行表示。常用的表示方法有

1.2.1 邻接矩阵

邻接矩阵表示了结点之间的邻接关系。

有向图的邻接矩阵 A 是一个 n 阶方阵，其元素为：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E。\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

例如图 1.10 的邻接矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

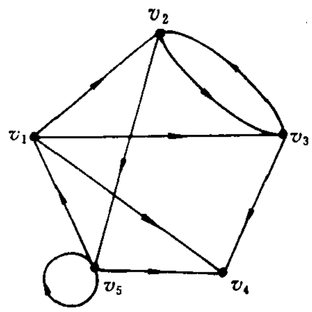


图 1.10

邻接矩阵 A 第 i 行非零元的数目恰是 v_i 的正度，第 j 列非零元的数目是 v_j 的负度。邻接矩阵可以表示自环，但无法表示重边。

无向图的邻接矩阵是一个对称矩阵，例如图 1.11 的邻接矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

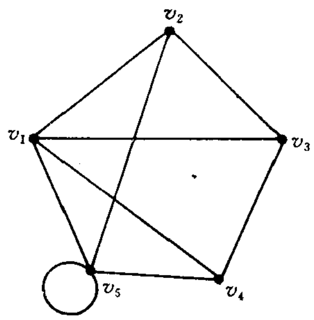


图 1.11

1.2.2 权矩阵

赋权图常用权矩阵 A 进行表示。其元素

$$a_{ij}=\begin{cases}w_{ij}, & (v_i,v_j)\in E。\\0, & 其它。\end{cases}$$

例如图 1.5 的权矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}0&3&6&2&4\\3&0&4.2&0&5\\6&4.2&0&3&0\\2&0&3&0&7\\4&5&0&7&0\end{bmatrix}$$

1.2.3 关联矩阵

关联矩阵表示结点与边之间的关联关系。

有向图 G 的关联矩阵 B 是 $n\times m$ 的矩阵，当给定结点和边的编号之后，其元素

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\in E。\\-1, & e_j=(v_k,v_i)\in E。\\0 & 其它。\end{cases}$$

例如图 1.12 的关联矩阵是

$$
\begin{array}{c}
B=\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array}
\end{array}
$$

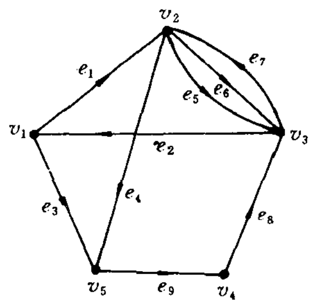


图 1.12

关联矩阵具有以下性质：

1. 每列只有两个非零元：1 和 -1。

2. 第 i 行非零元的数目恰是结点 v_i 的度，其中 1 元的数目是 $d^+(v_i)$，-1 元的数目是 $d^-(v_i)$。

3. 能够表示重边，但不能表示自环。

类似地，无向图也有其关联矩阵 B，但其中不含 -1 元素。

例如图 1.13 的关联矩阵是

$$
\begin{array}{c}
B=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array}
\end{array}
$$

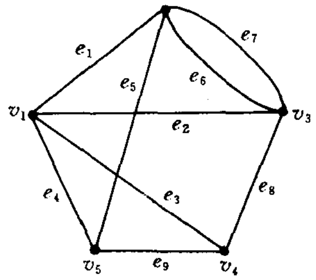


图 1.13

当邻接矩阵和关联矩阵能够表示某个图 G 时，这种表示是唯一的，而且十分直观。但由于它们不能表示重边或自环，因此这种表示有其局限性。特别在使用计算机对某个图 G 进行运算时，采用邻接矩阵或关联矩阵作为输入形式将占据较大的存储空间并可能增加计算复杂度。因此，为克服这些缺陷，再介绍图的另外几种常用表示方法。

1.2.4 边列表

边列表是对关联矩阵的列进行压缩的结果。它由两个 m 维向量 A 和 B 组成，当对 G 的结点和边分别编号之后，若 $e_k=(v_i,v_j)$，则 $A(k)=i$，$B(k)=j$，即 $A(k)$ 存放第 k 条边始点编号，$B(k)$ 存放其终点编号。如果 G 是赋权图，则再增加一个 m 维向量 Z，若 e_k 的权是 w_k，则令 $Z(k)=w_k$。例如图 1.14 的边列表示形式是

A：(4　4　1　2　2　2　4)

B：(1　1　2　2　4　3　3)

Z：(5　3　4　6　7　2　4)

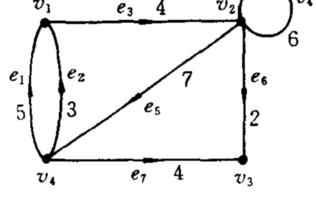


图 1.14

类似地可以得到无向图的边列表，比如图 1.15 的边列表是

A：(1　1　1　2　2　3)

B：(4　4　2　4　3　4)

Z：(5　3　4　7　2　4)

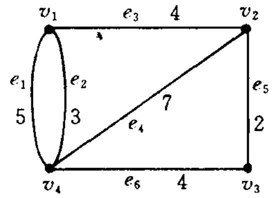


图　1.15

1.2.5　正向表

正向表是对邻接矩阵的行进行压缩的结果。它的特点是将每个结点的直接后继集中在一起存放。有向图的正向表由一个$(n+1)$维向量 A，一个 m 维向量 B 组成。当对 G 的结点编号之后，$A(i)$表示结点 v_i 的第一个直接后继在 B 中的地址，B 中存放这些后继结点的编号，$A(n+1)=m+1$。如果 G 是赋权图，则再设置一个 m 维向量 Z，用以存放相应的权值。例如图 1.14 的正向表是

A	1	2	5	5	8		
B	2	2	3	4	3	1	1
Z	4	6	2	7	4	5	3

在正向表中存在下述关系：

1. $d^+(v_i)=A(i+1)-A(i)$

2. $A(i)=\sum_{j=1}^{i-1} d^+(v_j)$

3. 从 $B(A(i))$到 $B(A(i+1)-1)$的任一个值，都是 v_i 的直接后继。

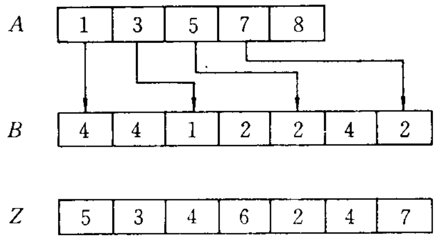
由于无向图的边没有方向性，所以 B 中存放的是相应邻接点的编号，因而 B 和 Z 都要扩充为 $2m$ 维的向量。例如图 1.15 的正向表是

A	1	4	7	9	13							
B	4	4	2	1	3	4	2	4	1	1	2	3
Z	5	3	4	4	2	7	2	4	5	3	7	4

1.2.6　逆向表

与正向表相反，逆向表是对有向图邻接矩阵的列进行压缩的结果。它的特点是将每个

结点的直接前趋集中在一起存放。例如图 1.14 的逆向表是。

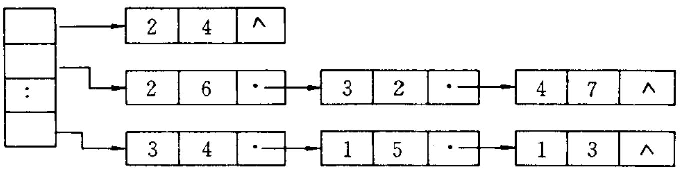


1.2.7 邻接表

这是采用单链表结构表示一个图。对每个结点 v_i 用一个表结点表示。在这里表结点的结构如下

a	b	c

它共分三个域，邻接点域 a 中存放该结点的编号，数据域 b 中存放相应边的数值，链域 c 中存放下一个表结点的地址指针。以图 1.14 为例，它的邻接表形式如下



其中 $Q(i)$ 存放结点 v_i 的第一个直接后继表结点的地址指针。邻接表的特点是使用灵活，比如要从图 G 中删去某条边时，只要摘除对应的表结点就可以实现；若要增加某条边，也只需增加一个表结点，而不需要进行大的变动。

边列表、正向表和邻接表等都能表示重边，也能表示自环。也就是说，它们都能唯一表示任意一个图。而且也都只占据较小的存储空间。邻接矩阵、关联矩阵、边列表、正向表、逆向表之间都可以互相转换。为了直观起见，本书主要采用邻接矩阵和关联矩阵表示图 G，在描述某些算法时，有时也采用正向表等形式的数据结构。

习 题 一

1. 证明在 9 座工厂之间，不可能每座工厂都只与其它 3 座工厂有业务联系，也不可能只有 4 座工厂与偶数个厂有业务联系。

2. 简单图 G 中，如果 $m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，证明 G 不存在孤立结点。

3. 完全图的每边任给一个方向，称为有向完全图。证明在有向完全图中

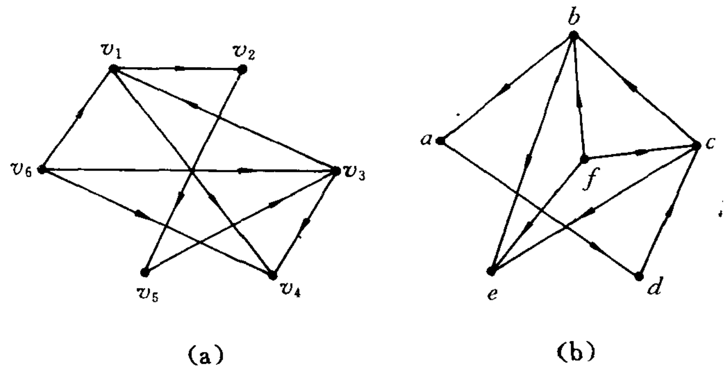
$$\sum_{v_i\in V}(d^+(v_i))^2=\sum_{v_i\in V}(d^-(v_i))^2。$$

4. 三个量杯容量分别是 8 升、5 升和 3 升，现 8 升的量杯装满了水，问怎样才能把水分成 2 个 4 升，画出相应的图。

5. 6 个人围成圆形就座，每个人恰好只与相邻者不认识，是否可以重新入座，使每个人都与邻座认识？

6. 证明 9 个人中若非至少有 4 个人互相认识，则至少有 3 个人互相不认识。

7. 判断 1.7 图是否同构？



题图 1.7

8. 写出题 1.7 图(a)的邻接矩阵、关联矩阵，边列表及正向表。

9. 试编写有向图 G 的邻接矩阵与关联矩阵，邻接矩阵与正向表，关联矩阵与边列表之间互相转换的程序。