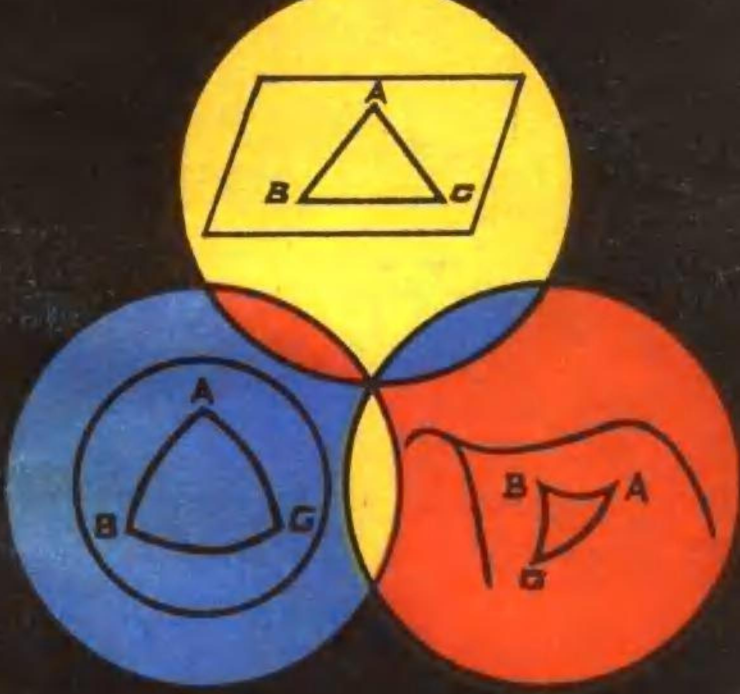
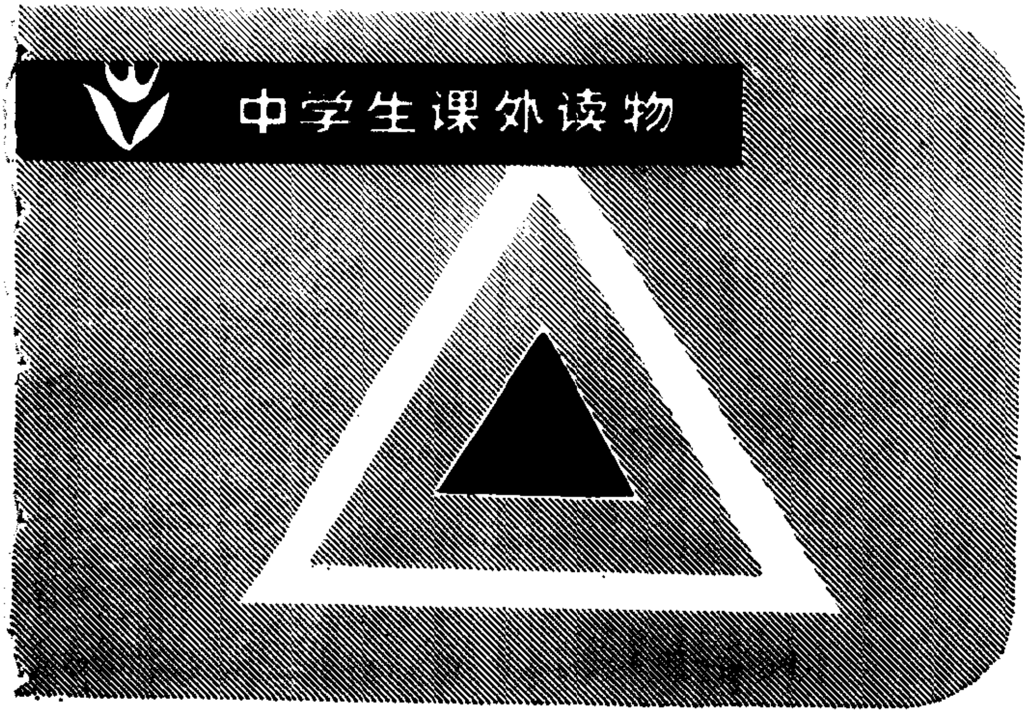
三角形的内角和等于180°吗

王宗儒 编著



中学生课外读物



王宗儒 编著

三角形的内角和等于180°吗

湖南人民出版社

三角形的内角和等于180°吗

王宗儒　编著

责任编辑：孟实华

*

湖南人民出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　　湖南省新华印刷一厂印刷

*

1981年7月第1版第1次印刷

印张：4.5　印数：1——30,700

统一书号：7109·1325　定价：0.34元

前　言

这本小册子是为青少年数学爱好者写的，目的是向读者介绍一些有关欧氏几何和非欧几何的初步知识。希望在扩充读者的知识领域，培养逻辑思维能力和发展空间想象能力等方面，能有所帮助。

考虑到非欧几何的逻辑性较强，接受起来并不容易，我采用中学生所熟悉的“三角形三个内角的和等于180°”这个定理作为谈话的引子，把读者引进非欧几何的大门，接着再叙述几何发展的历史过程。在能接受的前提下，证明了38个定理，介绍了“五组公理”和罗巴切夫斯基几何的初步知识，并利用模型对罗巴切夫斯基几何和黎曼几何作了简单的解释。在特定的条件下，把欧氏、罗氏和黎氏三种流派的几何统一起来。最后采用回答问题的方式，用常见的事例来说明非欧几何在现实空间中的实际意义和在相对性原理上的应用，以加深读者对这方面知识的理解。

本书在写作过程中，参阅了希尔伯特著的《几何基础》、科士青著的《几何基础》、钱端壮编的《几何基础》、秦元勋著的《几何学通论》、叶非莫夫著的《高等几何学》、库图左夫著的《罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要》、《微分几何》、《射影几何》、《从一到无穷大》及有关非欧几何的介绍书籍，选择其中某些能被青

少年数学爱好者所能接受的内容，适当地照顾逻辑系统，并加上作者一些不成熟的意见。但由于非欧几何的逻辑性较强，概念较抽象，不太容易用通俗的语言来叙述，加之作者的知识水平和综合能力有限，书中可能存在许多缺点和错误，敬请同志们指正。

早在六十年代，就有向中学生介绍一点关于非欧几何初步知识的想法，由于种种原因，一直没有实现。1978年参加湖南数学学会年会后，明确了数学对实现祖国四个现代化的重要意义，才促使我重新动笔。在写作过程中得到了湖南省数学学会理事长孙本旺教授的支持与鼓励，国防科技大学沙钰同志的许多帮助，谨此致谢。

王宗儒

1980年10月20日

目　　录

引　言

从三角形的内角和谈起

“三角形三个内角的和等于180°”这个定理，在中学数学教课书里，占着十分重要的地位。我们回忆一下，诸如相似形、三角函数等有关的内容，都曾用到“三角形三个内角的和等于180°”这个定理.

如果我们设想把“三角形三个内角的和等于180°”这个内容，从现有的教课书里删去，不准采用它，也不准采用同它前后有关的命题去代替的话，我们的教科书会出现什么样的情形呢？它的篇幅肯定会大大减少．因为相似形、勾股定理等内容都不存在了．如果又有人从根本上否定“三角形三个内角之和等于180°”（如果可能的话），在逻辑上又会出现什么“古怪”的结论呢？读者可能会认为提出这样问题的人有些荒唐，然而在漫长的几何学发展过程中，的确出现过这样的历史事实，从而发展成不同流派的几何学．有一派几何学，它的三角形三个内角之和是小于180°的；而另一派几何学，它的三角形三个内角之和是大于180°的．它们不仅在逻辑上没有矛盾，而且和我们在中学里学过的“三角形三个内角的和等于180°”的几何学并存，就是在近代科学里也经常用到它.

这本小册子将向读者介绍一些有关各流派的几何学发展的

历史过程，以及这方面的初步知识，这对于开拓我们的思维，提高我们的逻辑推理能力，发展我们的空间想象能力等方面都会有不同程度的帮助。现在就让我们从三角形的内角和谈起吧！

1
三角形的内角和等于180°吗？

“三角形三个内角的和等于180°”，这在中学几何课里，早已作过证明，当然是无可非议的。这里提出来讨论的目的，不是叫大家怀疑这个定理，而是要求大家真正知道这个定理是怎样证明的，也就是说，证明“三角形三个内角之和等于180°”的根据是什么。

我们知道，证明某一个定理的成立，必须要用排在它前面一些定义和定理作为论据。而每一个定义又必须用排在它前面的概念去定义它；每一个定理也必须用排在它前面的定理作依据去证明它。这样逆推上去，必然会有一些“原始”的概念，不能用逻辑推理的形式来证明。在几何里，对于这些“原始”的概念，称为“基本概念”；这些“原始”的命题，称为“公理”。

证明定理“三角形三个内角的和等于180°”的主要论据是“平行公理”——在一个平面内，过已知直线外的一个已知点，最多只可作一条直线和已知直线平行。

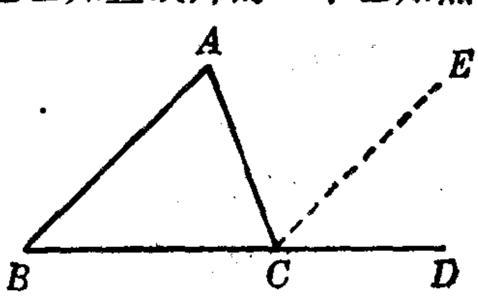


图 1

在现在中学的教科书里，这个定理是这样证明的：

把$\triangle ABC$的BC边延长至D，

作 $CE \parallel BA$,

因 $\angle A=\angle ACE$

$\angle B=\angle ECD$

故 $\angle A+\angle B+\angle C=\angle ACE+\angle ECD+\angle BCA$

$=\angle BCD$

$=180^\circ$

这里关键的一步是"作$CE \parallel BA$",这是由平行公理所保证的。就是说,根据平行公理,过C点最多只能作一条直线CE平行于BA,因而有内错角 $\angle A=\angle ACE$, 同位角 $\angle B=\angle ECD$。

如果不允许用"平行公理",也不允许用与平行公理等价的命题(关于等价概念,下面还会提到,这里暂时把等价看作相同的意思),就不能得出"三角形三内角的和等于180°"的结论。读者如果不相信的话,不妨试证一下。不过,依我看,这一切都将是徒劳的。因为历史上曾经有不少的数学家企图把平行公理作为一个定理来加以证明,可是都失败了(关于平行公理的试证问题,在下一节里我们还要研究,这里就不多说了)。

为了让读者了解得更清楚,先将下面一些著名的定理作粗略的介绍。必须特别注意,在证明过程中,都没有引用平行公理或与它等价的命题。

定理1 三角形三个内角的和小于或等于二直角。

这个定理是由意大利数学家萨开里(Gerolamo Saccheri 1667—1733)和法国数学家勒让得耳(Adriem Marie Legendia 1752—1833)提出来的,又称为萨开里——勒让得耳第一定理,它的特点是避免引用平行公理。

用反证法证明如下：

证 假如不是这样，那么三角形三内角的和大于二直角。用α、β、γ顺次表示$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，即有

$$\alpha+\beta+\gamma>2d \quad (d\text{表示直角})$$

延长AB并依次取B_1，B_2，B_3，……，B_{n-1}，使$AB=BB_1=B_1B_2=B_2B_3=\cdots=B_{n-2}B_{n-1}=C$

作$\triangle BB_1C_1$，$\triangle B_1B_2C_2$，$\triangle B_2B_3C_3$，……，$\triangle B_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}$，使之与$\triangle ABC$全等，这是容易做到的。

用δ表示角差，$\delta=2d-\alpha-\beta$

B_{n-2}

$\because\quad \angle CBC_1=\angle C_1B_1C_2=\cdots=\angle C_{n-2}C_{n-1}=\delta$

$\quad AC=BC_1=B_1C_2=\cdots=B_{n-3}C_{n-2}=B_{n-2}C_{n-1}=b$

$\quad BC=B_1C_1=B_2C_2=\cdots=B_{n-1}C_{n-1}=a$

$\therefore\quad \triangle CBC_1$，$\triangle C_1B_1C_2$，$\triangle C_2B_2C_3$，…，$\triangle C_{n-2}B_{n-2}C_{n-1}$都是全等三角形。

故 $CC_1=C_1C_2=C_2C_3=\cdots=C_{n-2}C_{n-1}=e$

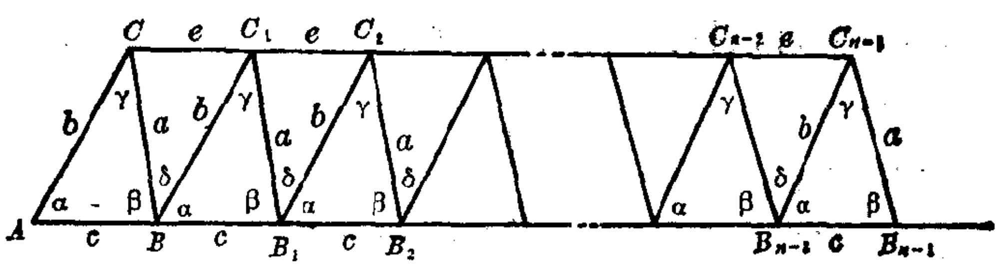


图 2

由于 $\gamma>2d-\alpha-\beta$

而 $\delta=2d-\alpha-\beta$

$\therefore \quad \gamma > \delta$

在$\triangle ABC$和$\triangle C_1BC$中，$AC = C_1B$，$BC = BC$，$\gamma > \delta$

故有　$C > e$　即差$c - e$是一个正数。

又$\because$　$ACC_1C_2 \cdots C_{n-1}B_{n-1}$　是折线段，

而　$ABB_1B_2 \cdots B_{n-1}$是直线段，

$\therefore \quad AC + CC_1 + C_1C_2 + \cdots + C_{n-2}C_{n-1} + C_{n-1}B_{n-1} > AB_{n-1}$

于是得　$b + (n-1)e + a > nc$

即得　$n(c-e) < a + b - e$　　　　(A)

在不等式(A)的右边，

$\because$　$a + b > e$　(△两边和大于第三边)

$\therefore$　$a + b - e$　是一个正数，用l表示。

(A)式左边的n是可以任意选定的正整数，这是因为三角形的个数$(n-1)$是可以随着点B_1，B_2，…，B_{n-1}的个数而任意作出的。而$(c-e)$是一个正数，用m来表示。那么(A)式就是：$n \cdot m < l$这是不可能的。

因为，总可以找到这样的n，使得

$n \cdot m > l$　成立。

例如　线段　$PQ = l$

我们总可以重复n次，

使$n \cdot m = P_1Q_1 > PQ = l$

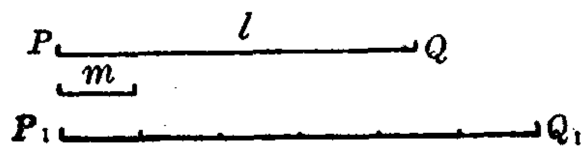


图　3

这就是常说的阿基米德（Archimedes 公元前287—212)命题。

对于本问题来说，我们总有这样的n，使$n(c-e) > a + b - e$

所以不等式(A)　$n(c-e) < a + b - e$ 是不成立的。

因此必须否定　$\alpha+\beta+\gamma>2d$　这个假定。

那么　$\alpha+\beta+\gamma\leqslant 2d$　　得到证明。

也就是："任意三角形三内角的和小于或等于二直角"得到证明。

推论1　三角形的任一外角大于其不相邻的任一内角。

证　设Φ是$\triangle ABC$中任一角的外角，α，β，γ是$\triangle ABC$的内角，

那么　$\Phi=\pi-\gamma$

又由本定理　$\alpha+\beta+\gamma\leqslant\pi$

就有　$\Phi\geqslant\alpha+\beta$

但　$\alpha>0$；$\beta>0$

所以　$\Phi>\alpha$，　$\Phi>\beta$

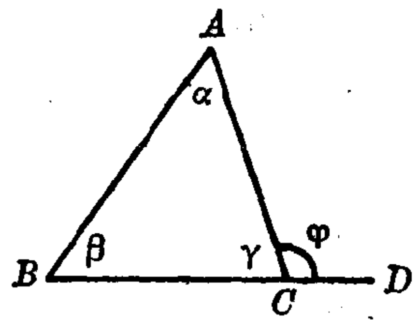


图 4

推论2　两条直线与第三条直线相交所成的同位角相等，那么这两条直线不相交。

证　设直线ED，FG与直线PQ相交于A、B，且同位角$\angle PAD=\alpha=\angle PBG=\beta$

如果AD与BG相交于一点C，就构成$\triangle ABC$，它的一个外角 $\angle PAC$ 等于不相邻的内角$\angle ABC$了，这与推论1矛盾。

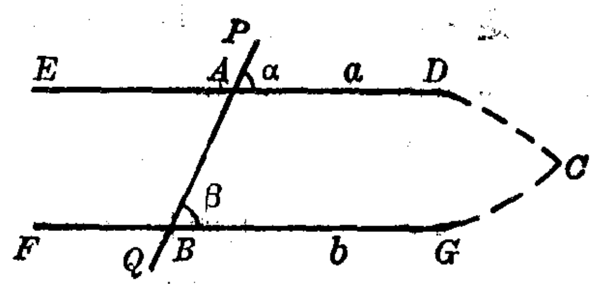


图 5

所以ED与FG不相交。

请你注意，定理证明的全过程，在逻辑上是没有错误的。如果你仔细推敲一下，你对这将会感到非常有趣。因为它与我

们平日熟知的“三角形内角和等于180°”的结果比起来，不太相同，其实这也没有什么奇怪的。如果我们注意到这里没有引用平行公理，而且符号“$\leqslant$”的意义是“小于或者等于”，它并没有排斥“等于”这个可能。就是说“三角形三内角的和或者小于180°，或者等于180°”，两者都是有可能的。在这个前提下，我们再引用平行公理的话，那就必然会得到“三角形三内角的和等于180°”的结论。这就是我们在中学里所学的几何学，称为欧基里得（Euclid公元前330—275）几何学。至于在什么情况下“三角形三内角之和小于180°”，这是另一流派罗巴切夫斯基几何学。我们在下面还要比较详细地研究它。它有一些初看上去简直不能令人相信的，但在逻辑上又丝毫没有漏洞的几何定理，这将引起我们更大的兴趣，它不仅可以开阔我们的眼界，而且还能够锻炼我们的推理能力。

为了讨论上的方便，这里介绍一个在非欧几何里十分重要的概念：

定义1 设四边形$ABCD$的边AB上的两角是直角，且与AB相邻的两边AD、BC相等。这种四边形称为萨开里四边形，AB称为下底边，CD称为上底边，AD、BC称为侧边。

定理2 萨开里四边形两底边中点的连线垂直于两底，且上底边上的两角相等。

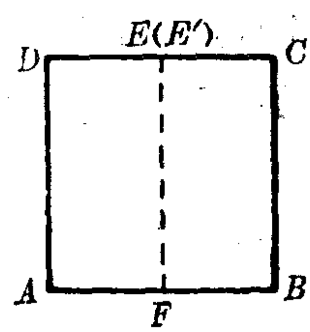


图 6

设E，F是AB，DC的中点，过F引$E'F\perp AB$，E'是FE'与DC的交点，E'必在DC线段的内部（可由顺序公理保

证）。

以$E'F$为轴，将$FADE'$旋转，使与图形$FE'CB$所在平面相合为止.

∵　$FA \perp FE'$，$FB \perp FE'$

且　$AF = FB$

∴　FA与FB重合，A与B重合。

又因　$DA \perp AB$，$CB \perp AB$

且　$AD = BC$

∴　AD重合于BC，D与C重合。

从而　$DE' = E'C$

就是说，E'和E重合．同时$\angle ADC$与$\angle BCE$也重合．这样就证明了，萨氏四边形两底中点的联线垂直于两底，且上底边上的两个角相等．

谈到这里，你可能又会出现这样的想法："既然AD、CB都垂直于AB，它们是平行线，且又是相等线，那就是平行四边形了，而且已经有$\angle A = \angle B = 90°$．那么$ABCD$已经是矩形了。"这种想法是在已经采用了平行公理之后，才能成立．可是我们一再声明过，我们是在没有用"平行公理"的情况下来论证的，在这种情况下，根本不可能得出四角形四个角之和等于四直角的结论．不仅我们初学者会有这种不全面的想法，就是萨开里当时也曾作过三种假设：

(1)　$\angle ADC$和$\angle BCD$都是锐角，称为锐角假设；

(2)　$\angle ADC$和$\angle BCD$都是直角，称为直角假设；

(3)　$\angle ADC$和$\angle BCD$都是钝角，称为钝角假设。

萨开里当时得到一个结论：钝角假设不能成立，因为它与定理1矛盾。如果直角假设成立，那么萨开里四边形，就是初等几何中的矩形了，这时欧基里得的平行公理应该成立。萨开里当时想用归谬法排斥锐角假设，借此来证明平行公理，但是今天我们知道萨氏这种尝试工作是不会成功的（下面还会谈到公理的独立性，那时，你就会理解问题的实质了）。

现在再向你介绍萨开里——勒让得耳第二定理。这个定理证明过程较繁，但更深入地反映了逻辑推理的严密性，应该细心地体会它。

定理3 （萨开里—勒让得耳第二定理）

如果存在某一个三角形的内角和等于$2d$，那么任何三角形内角和也等于$2d$（d表示直角）。

设$\triangle ABC$的内角和 $\sigma=\angle A+\angle B+\angle C=2d$ 我们要证明任何三角形的内角和也等于$2d$。

为了证明这个定理，我们先证明下面四个引理。

引理1 $\triangle ABC$的任一贯线CD（D在AB内部）划分出来的三角形的内角和等于$2d$。

证 贯线CD把$\triangle ABC$划分成两个三角形ADC和DBC，设他们的内角和为σ_1和σ_2，

就有 $\sigma_1=\alpha+\beta_1+\gamma_1$

$$\sigma_2=\alpha_2+\beta+\gamma_2$$

$$\begin{aligned}\sigma_1+\sigma_2&=\alpha+\beta+(\gamma_1+\gamma_2)+(\beta_1+\alpha_2)\\&=\alpha+\beta+\gamma+2d\\&=2d+2d\end{aligned}$$