

现代流体力学进展

II

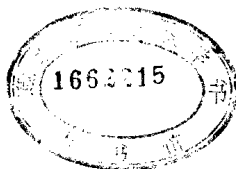
中国力学学会办公室
中国科学院 LNM 开放实验室 编
力学研究所

科学出版社

现代流体力学进展

(II)

中国力学学会办公室 编
中国科学院 LNM 开放实验室
力学研究所



科学出版社

1993

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书根据 1992 年 2 月“非线性流体力学”研讨会上的报告编纂而成,共收集 12 篇综述文章,涉及现代流体力学前沿的各个领域,对于科学研究有一定的指导和参考意义。

现代流体力学进展 (II)

中国力学学会办公室 编
中国科学院
力学研究所 LNM 开放实验室

执行编辑 赵大刚

责任编辑 朴玉芬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

中国力学学会办公室微机排印小组 排版

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993 年 12 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16

1993 年 12 月第一次印刷 印张: 9 3/4

印数: 1-1100 字数: 22 1000

ISBN 7-03-003837-1/O-673

定价: 16.80 元

出版说明

在中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室(LNM)主任郑哲敏教授的倡议和推动下,中国力学学会流体力学专业委员会于1990年10月在北京召开了第一次“非线性流体力学研讨会”。这也是国家自然科学基金委员会而进行的基础研究发展战略研讨的一部分,会后出版了“现代流体力学进展”,其受到各方关注的程度超出了原先的预料。

按原来的计划,这样的会要开两到三次,因此,在1992年2月,仍由中国力学学会流体力学专业委员会主持,召开了第二次“非线性流体力学研讨会”,本文集就是这第二次会议的结果。这次会与第一次不同之处是,除了仍有一部分是综述性的报告外,还有一些国内从事流体力学基础研究的单位总结报告了近年来他们自己的工作,从中我们可以看到国内的一些具体动向。这对于青年同志,特别是对其专业与力学关系密切的学生来说,会有较好的参考价值。

由于这样的研讨会规模不能很大,因此即使限定在基础范围内也不可能把全国所有有关的同志都请来。如有应该邀请而实际未被邀请的单位或个人,希望能够谅解。

这次会议同样得到中国力学学会常务理事会和国家自然科学基金委员会力学处的支持。中国力学学会副理事长周恒教授、中国力学学会流体力学专业委员会主任崔尔杰教授对组织会议和出版论文集做了大量工作,在此深表谢忱。

中国力学学会流体力学专业委员会
中国科学院 LNM 开放实验室
力学研究所

目 录

Lagrange 湍流与 Beltrami 流动	
.....黄永念 是长春 朱照宣 苏卫东 董宇飞 (1)	
拟序结构、分叉与混沌现象的流体力学实验研究的展望 ...	魏中磊 (16)
壁湍流相干结构的实验与理论研究	罗纪生 舒 玮 (29)
旋涡流动中某些分叉现象的研究	张涵信 (40)
绝对不稳定性理论在尾流中的应用	明 晓 (54)
气泡运动中倍周期分叉及浑沌现象的数值模拟	
.....彭晓星 唐登海 程贯一 (63)	
非定常流中若干非线性问题的分析与模拟	崔尔杰 (72)
非线性浅水波的折射和绕射问题	缪国平 刘应中 (89)
非传播孤立波和表面张力	周显初 崔洪农 (103)
非线性波浪理论	吕玉麟 李宝元 (112)
正交变换法解自由表面临界流动	丁道扬 (127)
纤维粘弹性悬浮液动力学若干问题的研究	范西俊 (137)

Lagrange 湍流与 Beltrami 流动

黄永念

(北京大学力学系湍流国家重点实验室, 北京 100871)

是长春 朱照宣 苏卫东 董宇飞

(北京大学力学系, 北京 100871)

摘要 本文综合分析了比例系数为常数的理想流体三维 Beltrami 流动解的不同类别, 首次给出了三类有意义的特解, 即运动轨道始终约束在有界空间内的球形涡、柱形涡和旋转椭球形涡的分析解. 特别是我们成功地找到了始终约束在圆球或球壳内的混沌轨道. 为解释物理空间内的 Lagrange 湍流运动与保守系统的混沌现象提供了一个严格而真实的流动实例. 我们还首次发现了在特定的参数情况中存在有一种亏格 3 的双环面混沌流形结构, 以及在 Poincaré 截面上的扁 8 字形自相似结构.

关键词 Lagrange 湍流, Beltrami 流动, 球形涡, 柱形涡, 椭球形涡, 周期轨道, 混沌轨道

一、引言

湍流是流体力学中出现的混沌现象, 如何从非线性动力系统的角度来解释这种流动现象, 目前已受到人们普遍的关注, 并成为湍流研究的一个主要方向^[1]. 由于湍流是在真实物理空间内观察到的流动现象, 因此人们一直期望能够见到在物理空间而不是在动力系统的相空间内出现的混沌运动轨道. 近年来迅速发展起来的 Lagrange 湍流的研究就是属于这类问题的探索^[2]. 其中有一类 Beltrami 流动问题特别引人关注^[3]. 所谓 Beltrami 流动就是一种理想不可压缩流体的涡矢量 ω_i 在流场中处处与速度矢量 v_i 平行的定常流动, 即速度场 v_i 满足方程组

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \lambda v_i \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2)$$

这里我们采用了约定求和法则. 比例系数 λ 为常数. 如果不特别提出, 通常取 $\lambda = 1$.

* 本文得到国家基础性理论研究重大项目“非线性科学”的资助

我们曾给出了这种 Beltrami 流动的一般解^[4], 它可以表示为

$$v_i = \lambda \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} + \epsilon_{imn} \frac{\partial}{\partial x_m} \epsilon_{njk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \quad (1.3)$$

其中矢量 a_i 满足 Helmholtz 方程

$$\Delta a_i + \lambda^2 a_i = 0 \quad (1.4)$$

Bjorgum 和 Godal 以及胡文瑞曾分别给出过类似形式的解^[5,6], 但我们给出的解则强调了任意不同方向的矢量 a_i 只要分别都满足 Helmholtz 方程 (1.4), 都可以用来叠加构成新的 Beltrami 流动的解. 下面将看出, 这正是我们构造各种 Lagrange 湍流流动的关键.

如果把 Beltrami 流动的速度场换成磁场, 则 (1.1), (1.2) 式对应于等离子体的无力场方程. 因此 Beltrami 流动问题的讨论在等离子体中有着广泛的应用价值, 而且还可以借助等离子体物理中的实验观察来检验我们的理论分析结果.

我们知道在定常的流体运动中, 流线与迹线 (即流体质点的运动轨线) 是完全重合的. 因此我们可以通过已经找到的速度场来研究流体质点的运动状况, 即考察一组常微分方程

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3) \quad (1.5)$$

因为不可压缩流体的速度场 v_i 满足连续方程 (1.2), 所以 (1.5) 式是一个自治的保守动力系统.

由于我们讨论的 Beltrami 流动又具有非常特殊的性质, 它的涡线与流线也是完全重合的, 因此流体质点的运动轨道与涡旋运动完全可以对应起来. 例如一条封闭的周期运动轨道就是一条封闭的涡丝, 一个二维的 KAM 环面 (由准周期运动轨道构成) 就是一个涡管, 其物理意义非常明显而且直观. 所以, 用这种 Beltrami 流动来说明流场中规则的涡旋运动和不规则的混沌运动是非常形象具体的.

二、Beltrami 流动的分类

根据近年来的许多研究结果, 我们可以将 Beltrami 流动归纳成以下几种类型:

1. 螺旋片流 ($a_1 = A \sin x_3, a_2 = a_3 = 0$)

这种流动的运动方程组是

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{dt} = A \sin x_3 \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt} = A \cos x_3 \\ v_3 &= \frac{dx_3}{dt} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

这是一个可积系统，它的第一积分是

$$\left. \begin{aligned} x_1 \cos x_3 - x_2 \sin x_3 &= \text{常数} \\ x_3 &= \text{常数} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

这种流动是一种沿 x_3 轴线呈螺旋状的均匀平面流。在 $x_3 = \text{常数}$ 的平行平面上都是一种均匀流动。著名的 ABC 流^[7]就是选取 $a_1 = A \sin x_3, a_2 = B \sin x_1, a_3 = C \sin x_2$ 叠加而成的。通常也可利用这种 Beltrami 流动作为扰动流来产生混沌运动。

2. 柱形螺旋流 ($u_3 = \psi(x_1, x_2), a_1 = a_2 = 0$)

这种运动的运动方程组是

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

这个方程组刚好是一个自由度的 Hamilton 系统的正则方程。它是一个可积系统，它的第一积分就是流线方程

$$\psi(x_1, x_2) = \text{常数}$$

Chernikov 等人取

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^q \cos \left[x_1 \cos \left(\frac{2\pi}{q} j \right) + x_2 \sin \left(\frac{2\pi}{q} j \right) \right] \quad (2.4)$$

并把它称为 Q-流^[3]。这是一种以正多边形为横截面的棱柱形螺旋流。

如果函数 ψ 选用极坐标形式的解。

$$\psi(r, \phi) = \sum_n A_n J_n(r) \cos(n\phi) \quad (2.5)$$

这里 $r^2 = x_1^2 + x_2^2, \tan \phi = x_2/x_1$ ，则可以得到圆柱形的螺旋流。Zaslavsky 等人曾讨论过这类流动加扰动后产生的混沌特性，包括随机网的问题等^[8]。

以上给出的二类流动的绝大多数质点运动轨道随时间的增长都要趋向于无穷远处，因此无法用它们来解释在有限区域内出现的混沌现象。现在我们首次找到了以下三类 Beltrami 流动，它们的运动轨道都限止在有限的区域内。

3. 柱形涡流 ($u_3 = A J_0(\alpha r) \sin(\sqrt{1-\alpha^2} x_3), 0 < \alpha < 1, a_1 = a_2 = 0$)

这种流动的运动方程组为

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} = -A\alpha \sqrt{1-\alpha^2} J_1(\alpha r) \cos(\sqrt{1-\alpha^2} x_3) \\ v_\phi &= r \frac{d\phi}{dt} = A\alpha J_1(\alpha r) \sin(\sqrt{1-\alpha^2} x_3) \\ v_z &= \frac{dx_3}{dt} = A\alpha^2 J_0(\alpha r) \sin(\sqrt{1-\alpha^2} x_3) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

它的第一积分是

$$rJ_1(\alpha r)\sin(\sqrt{1-\alpha^2}x_3) = \text{常数} \quad (2.7)$$

这类 Beltrami 流动是一种圆柱形涡环流动, 其所有运动轨道完全限制在一个圆柱内或两个同心圆柱壳之间. 这个圆柱或圆柱壳的高度是 $h = \pi/\sqrt{1-\alpha^2}$. 它们的半径分别与一阶贝塞尔函数 $J_1(Z)$ 的零点相对应. 例如最小圆柱的半径是 $r_* = Z_*/\alpha$, $Z_* = 3.83171$ 是 $J_1(Z)$ 的非零最小零点. 图 1 给出了柱形涡的示意图.

如果需要讨论的是两个同心圆柱间的流动情况, 还可以采用更一般的解

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= [AJ_0(\alpha r) + BY_0(\alpha r)] \sin(\sqrt{1-\alpha^2}x_3) \\ a_1 &= a_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

这里 $Y_0(Z)$ 是零阶第二类贝塞尔函数.

4. 球形涡流 ($a_3 = A_n R^{-1/2} J_{n+1/2}(R) P_{n-1}(\cos \theta)$, $a_1 = a_2 = 0$).

这类流动的运动方程组是

$$\left. \begin{aligned} v_R &= \frac{dR}{dt} = A_n n(n+1) R^{-3/2} J_{n+1/2}(R) P_n(\cos \theta) \\ v_\theta &= R \frac{d\theta}{dt} = A_n R^{-1/2} \left[J_{n-1/2}(R) - \frac{n}{R} J_{n+1/2}(R) \right] P_n^1(\cos \theta) \\ v_\psi &= R \sin \theta \frac{d\psi}{dt} = -A_n R^{-1/2} J_{n+1/2}(R) P_n^1(\cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

其中 $J_{n+1/2}(R)$ 是半奇数阶的第一类贝塞尔函数, $P_n^1(\cos \theta)$ 是第一类一阶连带勒让德函数. 这个方程组的第一积分是

$$R^{1/2} J_{n+1/2}(R) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta = \text{常数} \quad (2.10)$$

不难发现这种 Beltrami 流动是一种球形涡环流动, 它的所有运动轨道完全被限制在一个圆球内或两个同心球壳之间的二维环面上. 这个圆球和同心球壳的半径分别是 $J_{n+1/2}(R)$ 的最小非零零点和其它零点值. 因为从 (2.9) 式很易看出在这个圆球和球壳上的运动轨道始终被约束在球面上. 这里我们把对应 n 的球形涡称为 n 阶球形涡. 图 2 上分别给出了 1 阶球形涡 (其半径为 $R_* = 4.493409$), 2 阶球形涡 (其半径为 $R_* = 5.763459$), 和 3 阶球形涡 (其半径为 $R_* = 6.987932$) 的示意图.

如果需要讨论的是两个同心球壳之间的流动情况, 还可以采用更一般的解

$$a_3 = \left[A_n R^{-1/2} J_{n+1/2}(R) + B_n R^{-1/2} Y_{n+1/2}(R) \right] P_{n-1}(\cos \theta), \quad a_1 = a_2 = 0 \quad (2.11)$$

这里 $Y_{n+1/2}(R)$ 是半奇数阶的第二类贝塞尔函数, $P_{n-1}(\cos \theta)$ 是勒让德函数.

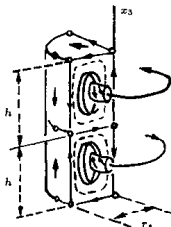


图 1 柱形涡

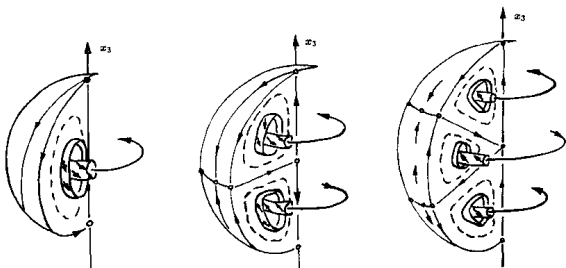


图 2 球形涡

5. 长椭球形涡流

在这种情况下，我们需要采用长椭球坐标 μ, ζ, φ ，它们和直角坐标 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 的关系为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k(1 - \mu^2)^{1/2}(\zeta^2 - 1)^{1/2} \cos \varphi \\ x_2 &= k(1 - \mu^2)^{1/2}(\zeta^2 - 1)^{1/2} \sin \varphi \\ x_3 &= k\mu\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

这里 k 是任意常数。长椭球方程是

$$\frac{x_3^2}{\zeta^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{\zeta^2 - 1} = k^2 \quad (2.13)$$

这类流动的运动方程组是

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= A \frac{\cos(\pi\zeta) \sin(\pi\mu)}{\zeta^2 - \mu^2} \\ \frac{d\zeta}{dt} &= -A \frac{\sin(\pi\zeta) \cos(\pi\mu)}{\zeta^2 - \mu^2} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= A \frac{\sin(\pi\zeta) \sin(\pi\mu)}{(1 - \mu^2)(\zeta^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

它的第一积分是

$$\sin(\pi\zeta) \sin(\pi\mu) = \text{常数} \quad (2.15)$$

很易验证最小长椭球面是 $\zeta = 2$ 的 (2.13) 式。在这个长椭球内的所有运动轨道始终约束在长椭球内。

以上我们给出的各类 Beltrami 流动都是规则的三维定常层流流动, 从流动结构来看, 原则上可分成均匀流、螺旋流和涡环流三种, 下面我们将集中讨论由球形涡互相叠加产生混沌运动的情况。

三、球形涡的混沌现象

这一节我们将进一步考察最有兴趣的球形涡解, 因为这类球形涡的互相叠加能产生完全限制在有界球体内的混沌运动轨道。首先我们注意到任意两个不同方向 (这里是指极轴的方向 l_i)、不同强度 (这里是指任意常数 A_i 值) 的 1 阶球形涡叠加后仍是一个 1 阶球形涡, 只是叠加后形成的球形涡具有新的极轴方向和新的强度。因此 1 阶球形涡的互相叠加不会产生混沌现象, 但是除此以外, 所有同阶的高阶球形涡的互相叠加都能产生始终约束在有界球体内的混沌运动轨道。这里我们只讨论最简单的 2 阶球形涡的叠加情况, 而且只限于以坐标轴线为极轴的球形涡进行叠加。

首先我们发现当分别以三个不同的坐标轴为极轴, 三个强度相同的 2 阶球形涡的速度场叠加在一起时, 运动正好完全抵消而流动处于静止状态, 因此具有不同极轴, 不同强度 A, B 和 C 的三个 2 阶球形涡叠加后的系统具有以下拓扑结构等价关系 (不失一般性可令 $A \geq B \geq C$):

(1) $(A, B, C) \equiv (A+k, B+k, C+k)$, 其中 k 为任意实常数

(2) $(A, B, C) \equiv (\lambda A, \lambda B, \lambda C)$, 其中 λ 为任意非零实常数, 这可通过时间尺度的变换来证实。

(3) $(A, B, C) \equiv (B, A, C) \equiv (C, B, A)$ 。这可通过坐标系绕某一坐标轴旋转 90° 来证实。

根据以上三个等价关系, 我们可以导出

$$\begin{aligned}(A, B, C) &\equiv (A-C, B-C, 0) \equiv \left(1, \frac{B-C}{A-C}, 0\right) \\ &\equiv (0, B-A, C-A) \equiv \left(0, \frac{A-B}{A-C}, 1\right) \equiv \left(1-\frac{A-B}{A-C}, 0\right)\end{aligned}$$

因为 $\frac{B-C}{A-C}$ 和 $\frac{A-B}{A-C}$ 中总有一个数不超过 $\frac{1}{2}$, 故我们在计算中只需取 $A=1, 0 \leq B \leq \frac{1}{2}, C=0$ 的情况即可代表所有的情况。现取强度为 1 的球形涡的极轴为 x_3 轴, 强度为 B 的球形涡的极轴为 x_1 轴, 叠加后的运动方程组为

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1(x_3^2 + Bx_1^2)J_{7/2}(R)/R^{7/2} - (x_1 + x_2x_3)J_{5/2}(R)/R^{5/2} \\ &\quad - Bx_1[RJ_{7/2}(R) - 2J_{5/2}(R)]/R^{5/2}\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dt} &= x_2(x_3^2 + Bx_1^2)J_{7/2}(R)/R^{7/2} \\
&\quad - [(1+B)x_2 - (1-B)x_1x_3]J_{5/2}(R)/R^{5/2} \\
\frac{dx_3}{dt} &= x_3(x_3^2 + Bx_1^2)J_{7/2}(R)/R^{7/2} - B(x_3 - x_1x_2)J_{5/2}(R)/R^{5/2} \\
&\quad - x_3 [RJ_{7/2}(R) - 2J_{5/2}(R)]/R^{5/2}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_{5/2}(R) &= \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(3 \frac{\sin R}{R^2} - 3 \frac{\cos R}{R} - \sin R \right) \\
J_{7/2}(R) &= \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(15 \frac{\sin R}{R^3} - 15 \frac{\cos R}{R^2} - 6 \frac{\sin R}{R} + \cos R \right)
\end{aligned}$$

首先我们分析这个方程组的对称性. 当我们作任意两个坐标轴的对称坐标变换时, 即取

$$\begin{aligned}
S_1: x'_1 &= x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3 \\
S_2: x'_1 &= -x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_3 \\
S_3: x'_1 &= -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = x_3
\end{aligned} \tag{3.2}$$

时, 方程组的形式并不改变, 因此所有运动轨道在绕任意一个坐标轴旋转 180° 后与原来的运动轨道全部重合.

我们发现 $B = \frac{1}{2}$ 是一种非常特殊的情况, 此时系统的对称性增加了, 因为如果作坐标变换

$$S_4: x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_3, \quad x'_3 = -x_2, \quad t' = -t \tag{3.3}$$

则运动方程组的形式也不改变, 这表明此时系统的运动轨道绕 x_1 坐标轴旋转 90° 后与原系统的运动轨道重合, 只是运动方向相反.

其次, 我们讨论方程组 (3.1) 的不动点, 不难直接验证, 除了 $B = \frac{1}{2}$ 以外, 整个球体只有 7 个不动点, 它们是球心以及球面与三个坐标轴线的 6 个交点. 当然, 在这个涡球外面还存在着有 6 组无穷多个不动点, 它们是按 $J_{5/2}(R)$ 其它零点 ($R = 9.095011, 12.322941, 15.514603, \dots$) 对称地分布在三个坐标轴上, 它们同时也分布在把运动轨道分割开的球壳上. 当 $B = \frac{1}{2}$ 时, 整个 x_1 轴线上的点都是不动点 (除原点和 x_2 轴及 x_3 轴线点的不动点以外).

有趣的是尽管现在这个动力系统 (3.1) 是不可积的, 但联结这些不动点的异宿轨道仍未遭到破坏, 而且与未扰动时的可积系统情况一样, 分别是 3 个坐标轴线和球面上的四分之一大圆圆弧. 它们像支撑球体的 18 根骨架不受任何扰动而被破坏, 它们之间互相形成异宿闭环, 所有其它运动轨道在这些骨架和球壳之间穿来穿去, 但却不能与之相交.

由于系统存在有异宿闭环, 在这种异宿闭环间必定有对应闭周期轨道的规则涡旋. 事实上我们严格地找到了这样的闭周期轨道, 因为如果我们分别将 (3.1) 式的 3 个方程乘上 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 后再相加, 则可以得到

$$R \frac{dR}{dt} = [3(x_3^2 + Bx_1^2) - (1+B)R^2]J_{5/2}(R)/R^{5/2} \quad (3.4)$$

并从 (3.1) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [3(x_3^2 + Bx_1^2) - (1+B)R^2] &= [3(x_3^2 + Bx_1^2) - (1+B)R^2] \\ &\cdot \left[\frac{(x_3^2 + Bx_1^2)J_{7/2}(R)/R^{7/2} - (1+B)J_{5/2}(R)/R^{5/2}}{R} \right] \\ &+ [B(1-2B)x_1^2 - (2-B)x_3^2] [RJ_{7/2}(R) - 3J_{5/2}(R)] / R^{5/2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

从这两个方程就可解得两条封闭的周期轨道, 因为当以下两个方程

$$3(x_3^2 + Bx_1^2) - (1+B)R^2 = 0 \quad (3.6)$$

和

$$RJ_{7/2}(R) - 3J_{5/2}(R) = 0 \quad (3.7)$$

同时成立时, (3.4) 式和 (3.5) 式就都被满足. 从 (3.7) 式可解出无穷多个根, 其最小的几个根是

$$R_{..} = 3.8702386, 7.443087, 10.713011, 13.920521 \quad (3.8)$$

(3.6) 式是一个椭圆锥面方程 (当 $B = \frac{1}{2}$ 时, 退化为两个互相垂直相交的平面). 它与以 $R_{..}$ 为半径的球面族的交线就是我们要找的两组封闭的周期轨道. 实际上, 这两组闭周期轨道满足方程组

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 x_3 J_{5/2}(R_{..}) / R_{..}^{5/2} \\ \frac{dx_2}{dt} &= (1-B)x_1 x_3 J_{5/2}(R_{..}) / R_{..}^{5/2} \\ \frac{dx_3}{dt} &= Bx_1 x_2 J_{5/2}(R_{..}) / R_{..}^{5/2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

若令 $\gamma = J_{5/2}(R_{..}) / R_{..}^{5/2}$, 则解可明确地写成

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \pm \sqrt{\frac{2-B}{3(1-B)}} R_{..} \sin \left(\sqrt{\frac{1-B^2}{3}} \gamma t \right) & 0 < B < \frac{1}{2} \\ x_2 &= \sqrt{\frac{2-B}{3}} R_{..} \cos \left(\sqrt{\frac{1-B^2}{3}} \gamma t \right) & k^2 = \frac{B(2-B)}{1-B^2} \\ x_3 &= \mp \sqrt{\frac{1+B}{3}} R_{..} \ln \left(\sqrt{\frac{1-B^2}{3}} \gamma t \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \pm \sqrt{\frac{1+B}{3B}} R_{..} \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{B(2-B)}{3}} \gamma t \right) & \frac{1}{2} < B < 1 \\ x_2 &= \sqrt{\frac{2-B}{3}} R_{..} \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{B(2-B)}{3}} \gamma t \right) & k^2 = \frac{1-B^2}{B(2-B)} \\ x_3 &= \mp \sqrt{\frac{1+B}{3}} R_{..} \operatorname{cn} \left(\sqrt{\frac{B(2-B)}{3}} \gamma t \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \pm R_{..} \operatorname{th}(\gamma t/2) \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} R_{..} \operatorname{sech}(\gamma t/2) \\ x_3 &= \mp \frac{\sqrt{2}}{2} R_{..} \operatorname{sech}(\gamma t/2) \end{aligned} \right\} \quad B = \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

这两族封闭的周期轨道（即封闭的涡丝）是一种马鞍状的封闭曲线（见图 3）。当 $B < \frac{1}{2}$ 时，它们是分别位于上、下半球内绕 x_3 轴旋转的运动轨道，当 $B > \frac{1}{2}$ 时，它们又是分别在左半球和右半球内绕 x_2 轴旋转的运动轨道，当 $B = \frac{1}{2}$ 时，则是一种临界状态。从 (3.12) 式可清楚地看出，此时每条周期轨道渐成两条异宿轨道。它们分别以 $x_1 = \pm R_{..}, x_2 = x_3 = 0$ 为极限不动点。同时它们又形成一个异宿双闭环。由于周期轨道渐成两条异宿轨道是由于两条闭周期轨道正好在 x_1 轴上这两个不动点处相遇，所以从参数 $B < \frac{1}{2}$ 到 $B > \frac{1}{2}$ 的变化过程，实际上是两条涡丝相遇断开和重联的过程。

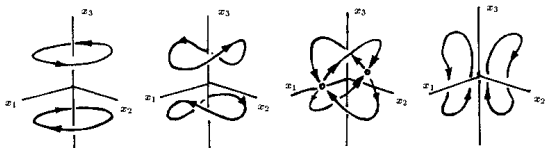


图 3 封闭的周期轨道

图 4 分别给出了 $B = 0.1, 0.3$ 和 0.5 时涡球在 $\varphi = 0^\circ$ 和 90° 的 Poincaré 截面上的计算结果。从图上我们可以看出随参数 B 的逐渐增加，开始涡球内的混沌轨道区迅速扩大，但当 B 增加到 $\frac{1}{2}$ 时，又逐渐出现了一些比较规则的结果。首先我们注意到当 $B < 0.15$ 时，在上半球和下半球内分别存在有一条靠近 x_3 轴和球面的互相分离的涡丝。它们在 $B \approx 0.15-0.16$ 时同时也在原点相遇，发生同宿分岔而转变为互相串联着的在对角象限内运动的两条涡丝。

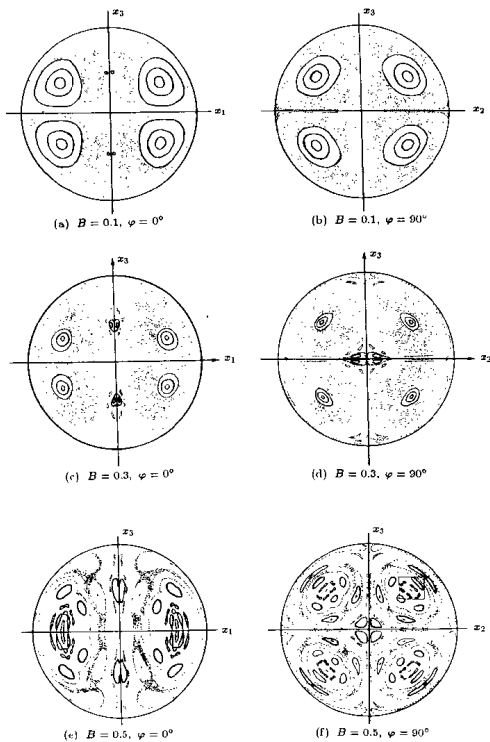


图 4 Poincaré 截面

其次我们又注意到当 $B = \frac{1}{2}$ 时, 如果我们把那些看似规则的岛屿放大后进行仔细观察, 我们发现某些岛屿并不是象通常的规则岛屿那样只包含一个椭圆不动点和一组 KAM 闭曲线, 而是显现出一种扁 8 字形结构 (图 5b). 其中包含有一个双曲不动点和两个椭圆不动点, 而且这种扁 8 字形结构是一个薄随机层, 其中的双曲不动点是上面提到的异宿双环与 Poincaré 截面的交点, 这个薄随机层的内侧是由这个双曲不动点形成的同宿流形, 而它的外侧是一个二维双环面结构的混沌流形 (图 6a). 在这种双环面内存在有四条分别位于左、右、上、下, 并且两两串联结在一起的涡丝 (图 6b). 在这种双环面上存在有四个双曲不动点, 而双环面则是由这些双曲不动

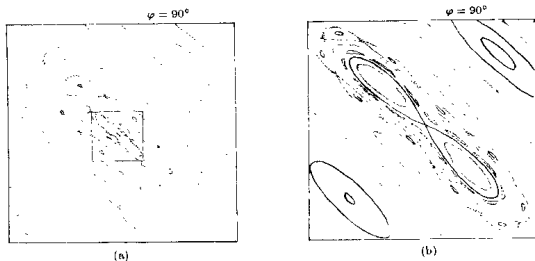


图 5 图 4 f 的局部放大

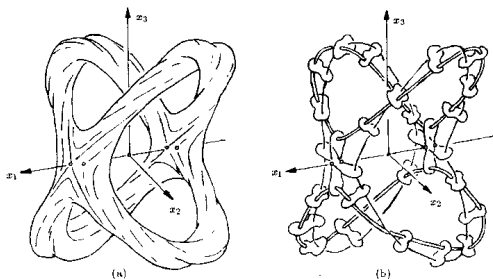


图 6 双环面结构

点的稳定流形、不稳定流形以及其它混沌轨道共同构成的。整个涡球内的混沌区域除了被看作为是 KAM 环面的涡管隔开以外, 还被这种双环面分隔开。这里我们所说的混沌是与 Devaney 给出的混沌定义一致的^[9]。Devaney 指出混沌必须满足以下三个条件: 1. 敏感地依赖初始条件; 2. 拓扑可传递; 3. 周期轨道稠密。这里我们讨论的情况完全符合这三个条件。

近年来, 已经有人(如 Gutzwiller)开始讨论亏格为 2 的双环面结构^[10]。但至今还没有人提及我们发现的亏格为 3 的双环面结构。我们认为这些高亏格的双环面可能是出现混沌轨道的最简单的曲面结构。因为实际上这种双环面结构是涉及到三个互相线性无关的独立旋转频率 $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ 的运动轨道所形成的流形结构。例如如图 6a 的双环面的 ω_1 是绕 x_3 轴的旋转频率, ω_2 是绕 x_2 轴的旋转频率, ω_3 是绕异宿闭环的旋转频率。由三个互相独立(无理数相关)的频率 ω_i 构成的运动轨道在三维空间内可以形成混沌轨道。

需要注意的是在涡球内有些双环面的结构形式比较复杂。例如如图 7 给出的是对应 $\varphi = 90^\circ$ 的 Poincaré 截面上每个象限内的外层周期 3 岛屿的双环面。又例如对应 $\varphi = 0^\circ$ 的 Poincaré 截面上的一组周期 5, 8 字形的双环面是形成中空的较大双环形状。但不管这种双环面的结构有多么复杂, 它的每个半环的构成形状完全相同, 如果把它绕 x_1 轴旋转 90° , 则和原双环面完全重合。

图 8 还给出了 $B = \frac{1}{2}$ 时在两个同心球壳(半径分别为 $R_* = 5.763459$ 和 9.095011) 内的 Poincaré 截面轨道分布。此时 8 字形的结构和双环面可以看得更为明显。

根据我们的计算结果可以清楚地看出球形涡 Beltrami 流动的所有运动可分为三类: 第一类是与涡丝对应的封闭周期轨道, 第二类是与涡管对应的准周期轨道, 即通常所说的 KAM 环面, 第三类则是混沌轨道, 可以把它与湍流运动相对应。在特定条件下这种混沌轨道可以构成某种双环面结构。

最后, 我们还要指出一点, 在 $B \neq 0$ 时, 在涡球(或外层球壳)表面上的运动轨道仍然是规则的, 它们都是从南、北两极分别向赤道东、西两极点(x_2 轴线上的两个不动点)运动, 或者反向运动(根据 $\beta = 2J_{3/2}(R_*)/R_*^{3/2}$ 的正负号而定)。因为球面上的运动轨道满足方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\beta}{2}x_1[(1-B)x_3^2 - Bx_2^2] \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\beta}{2}x_2(x_3^2 + Bx_1^2) \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{\beta}{2}x_3[x_2^2 + (1-B)x_1^2]\end{aligned}$$

其解可明确表示为

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{10}R_* \exp(B\beta t/2) [x_{20}^2 + x_{10}^2 \exp(B\beta t) + x_{30}^2 \exp(\beta t)]^{-1/2} \\ x_2 &= x_{20}R_* [x_{20}^2 + x_{10}^2 \exp(B\beta t) + x_{30}^2 \exp(\beta t)]^{-1/2}\end{aligned}$$