基礎近代物理學詳解

(習題)

R·M·艾斯伯格　原著

曉園出版社
世界图书出版公司

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則徹底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

内 容 简 介

本书是 R.M.艾斯伯格著"Fundamentals of modern physics"一书的习题详解

基础近代物理学详解(习题)

R.M.艾斯伯格 原著

杨志信 译著

晓 园 出 版 社 出版

世界图书出版公司北京分公司重印

(北京朝阳门内大街 137 号)

北 京 中 西 印 刷 厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1992 年 5 月 重印 开本 850×1168 1/32

1992 年 5 月第一次印刷 印张 6.25

印数: 0,001—1,850

ISBN: 7-5062-1171・8/O・29

定价: 5·10 元

基礎近代物理學詳解

（目　　錄）

第一章　相對論

1-1　當相對速度向量 $\vec{u}$ 不平行於任一座標軸時，寫出類似於（1-2）式的方程式，並用此證明仍可得到（1-3）式。

解：當相對速度 $\vec{u}$ 不平行於任一座標時，其有三個分量 u_x，u_y，u_z。因此 $x' = x - u_x t$，$y' = y - u_y t$，$z' = z - u_z t$，$t' = t$

因爲 u 是一常數，$\dfrac{du}{dt} = 0$，對上列式子微分二次，可得

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x'}{dt^2} = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow F_x = F_x' \\ m\dfrac{d^2y'}{dt^2} = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow F_y = F_y' \\ m\dfrac{d^2z'}{dt^2} = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \Rightarrow F_z = F_z' \end{cases}$$

#

1-2　試導出（1-6′）式。

解：在以太（ether）座標內光的速度爲一常數 c。當干涉儀相對於以太的速度爲 $\vec{v}$ 時：

光線 1 從 M 到 M_1 的時間 t 滿足下列式子

$$c^2t^2 = v^2t^2 + \ell_1^2$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\ell_1}{c} \Big/ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \simeq \frac{\ell_1}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

光走完全程的時間 t_1（$M \to M_1 \to M$）

$$t_1 = 2t = \frac{2\ell_1}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

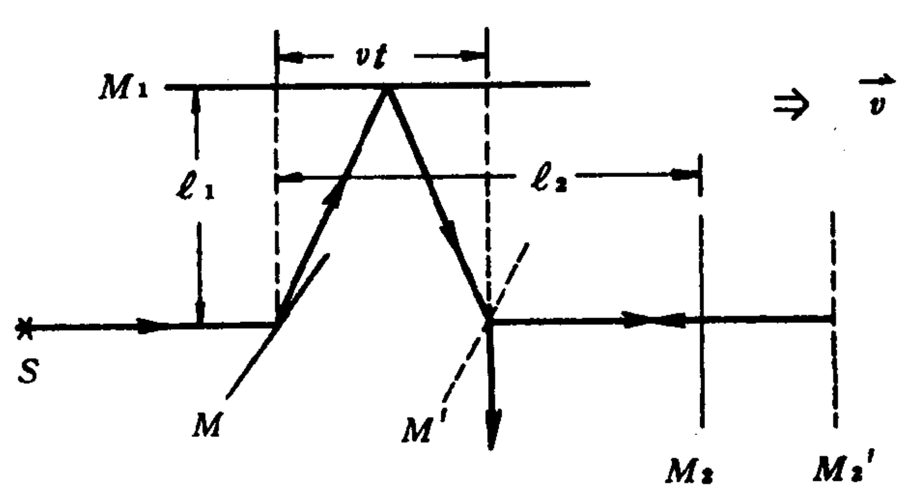
光線 2 走完全程（$M \to M_2 \to M$）的時間 t_2

$$t_2 = \frac{\ell_2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{c - v} + \frac{\ell_2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{c + v}$$

$$= \frac{2\ell_2}{c} \Big/ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{2\ell_2}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

因此，相位差 $\Delta_v = \dfrac{(t_1 - t_2)c}{\lambda}$

$$= \frac{2(\ell_1 - \ell_2)}{\lambda} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\ell_1 - \ell_2}{\lambda} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$



相同地，假如相對速度變成 v' 時，相位差變成為

$$\Delta_{v'} = \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{\lambda} + \frac{v'^2}{c^2}\frac{\ell_1 - \ell_2}{\lambda} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

合併①與②式，可導出（1-6′）式，即

$$\Delta = \Delta_v - \Delta_{v'} = \frac{\ell_1 - \ell_2}{\lambda}\left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{v'^2}{c^2}\right) \quad \#$$

1-3　在我們銀河系中，最遠星球的距離數量級為 10^5 光年。試解釋人類何以在原理上能在其有生之年旅行到該星，並估計所需的速度。

解：原理上，這只是時間遲延所造成的結果。設地球和銀河所處的空間是靜止的，而太空人相對於地球以 v 的速度行進。若人在地球上的歲數為 τ，當其運動時，地球上的人觀測到太空人的歲數增為 $\tau \Big/ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$。依題意可知

$$v\tau \Big/ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = d = 10^5 \cdot c \ (\mathrm{yr})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(1 + \frac{\tau^2}{10^{10}}\right) = 1 \text{，} v = c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{10^{10}}\right)$$

若 $\tau = 100$，則 $v \coloneqq 0.9999995\,c$　#

1-4　試將（1-13′）式代入（1-14）式而得到（1-15）式。

解：$x = \dfrac{x' + vt'}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$，$y = y'$，$z = z'$，

$$t = \frac{t' + x'v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

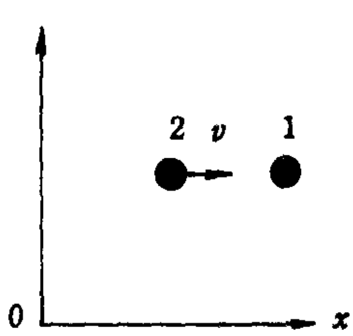
$$= \frac{(x' + vt')^2}{1 - v^2/c^2} + y'^2 + z'^2 - c^2\frac{(t' + x'v/c^2)^2}{1 - v^2/c^2}$$

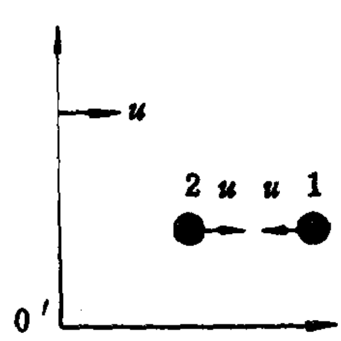
$$= \frac{x'^2(1 - v^2/c^2) + t'^2(v^2 - c^2)}{1 - v^2/c^2} + y'^2 + z'^2$$

$$\Rightarrow \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \quad \#$$

1-5　在座標系 0 內，質點 1 爲靜止而質點 2 以速度 v 向右運動。現今考慮一座標系 $0'$，相對於 0 以速度 u 向右運動。試求出 u 的值使得兩質點在 $0'$ 看來以相同且方向相反的速度互相靠近。

解：





依速度轉換公式　$V_x' = \dfrac{V_x - v}{1 - v V_x / c^2}$，可以得到粒子

1、2 在 $0'$ 座標的速度分別爲 $\dfrac{v - u}{1 - v u / c^2}$；$-u$。

依題意可得到

$$u = \frac{v - u}{1 - v u / c^2}\text{，}\frac{v}{c^2} u^2 - 2u + v = 0\text{，}$$

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{v} c^2$$

$\because u$、$v < c$，

$$\therefore u = \frac{1 - \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{v} c^2 \text{（取一號）}$$ #

1-6　驗證（1-20）式 $m(v)$ 的形式完全滿足 $m(V)$ 的方程式。

解：（1-20）式：$m(v) = m_0 / \left(1 - v^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\left(1 - v^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}} m\left(\sqrt{V^2 \left(1 - v^2/c^2\right) + v^2}\right)$$

$$= \left(1 - v^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}} m_0 / \left(1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2 V^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= m_0 \Big/ \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \equiv m(V)$$

因此 $m(v)$ 的形式滿足

$$m(V) = (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\, m\left(\sqrt{V^2(1 - v^2/c^2) + v^2}\right)$$

方程式　#

1-7　試完成導至（1-26）式的計算。

解：設粒子在0及0′的速度分量分別爲 V_x，V_y，V_z 及 V_x'，V_y'，V_z'，則

$$V_x' = \frac{V_x - v}{1 - V_x v/c^2},$$

$$V_y' = \frac{V_y (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - V_x v/c^2}$$

$$V_z' = \frac{V_z (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - V_x v/c^2}$$

$$V'^2 = V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2$$

$$= [(V_x - v)^2 + V_y^2(1 - v^2/c^2)$$

$$+ V_z^2(1 - v^2/c^2)]$$

$$/\left(1-V_x v/c^2\right)^2$$

$$P_x{}' = \frac{m_0 V_x{}'}{\left(1-V'^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{m_0\left(V_x - v\right)}{\left(1-V_x v/c^2\right)\left(1-V'^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{m_0\left(V_x - v\right)}{\left(1-V^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{P_x - vE/c^2}{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(1-V_x v/c^2\right)^2-\left[\left(V_x-v\right)^2+V_y^2\left(1-v^2/c^2\right)\right.\\
&\left.+V_z^2\left(1-v^2/c^2\right)\right]/c^2\\
&=\left[1-V_x v/c^2-\left(V_x-v\right)/c\right]\\
&\quad\left[1-V_x v/c^2+\left(V_x-v\right)/c\right]\\
&\quad-\left(1-v^2/c^2\right)\left(V_y^2+V_z^2\right)/c^2\\
&=\left(1-V_x/c\right)\left(1+v/c\right)\left(1+V_x/c\right)\left(1-v/c\right)\\
&\quad-\left(1-v^2/c^2\right)\left(V_y^2+V_z^2\right)/c^2\\
&=\left(1-v^2/c^2\right)\left[1-\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right)/c^2\right]\\
&=\left(1-v^2/c^2\right)\left(1-V^2/c^2\right)
\end{aligned}\right\}$$

$$P_y{}' = \frac{m_0 V_y{}'}{\left(1-V'^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{m_0 V_y \left(1 - v^2/c^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - V_x v/c^2 \right) \left(1 - V'^2/c^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{m_0 V_y}{\left(1 - V^2/c^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = P_y$$

$$P_z' = \frac{m_0 V_z'}{\left(1 - V'^2/c^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = P_z$$

$$E' = \frac{m_0 c^2}{\left(1 - V'^2/c^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{m_0 c^2 \left(1 - V_x v/c^2 \right)}{\left(1 - V_x v/c^2 \right) \left(1 - V'^2/c^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{m_0 c^2 \left(1 - V_x v/c^2 \right)}{\left(1 - v^2/c^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - V^2/c^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{E - v P_x}{\left(1 - v^2/c^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \#$$

1-8　在實驗室（ LAB ）座標系，質點 1 爲靜止並具有總相對論性能量 E_1 ，而質點 2 以總相對論性能量 E_2 與動量 P_2 向右運動。證明此系統相對論性質量中心爲靜止的座標系以速度 $u =$

$c^2P_2/(E_1+E_2)$ 相對於LAB 系向右運動，且在質心（CM）系內，此系統的總動量為零。現令兩質點有相同靜止質量 m_0，且在 LAB 系內此系統的總動能為 T_{LAB}，試計算在CM系內系統的總動能 T_{CM}，並證明在相對論性極限，$T_{LAB} \gg m_0c^2$，

$$T_{CM} \simeq \sqrt{2m_0c^2} \cdot \sqrt{T_{LAB}}$$

在高能量原子核反應研究上，上式有那些實用的結果？

解：(1)設 m_1 和 m_2 分別為粒子 1 和 2 的相對論性質量，在 LAB 系 $E_1=m_1c^2$，$P_1=0$，$E_2=m_2c^2$，$P_2 \neq 0$

①相對論性質心系統的速度 $\vec{u}$ 定義為

$$\vec{P_1}+\vec{P_2}=(m_1+m_2)\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad P_2=\left(\frac{E_1}{c^2}+\frac{E_2}{c^2}\right)u \text{，} u=\frac{c^2P_2}{E_1+E_2}$$

②在質心座標系

$$P_1'=\frac{-uE_1/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \text{，} P_2'=\frac{P_2-uE_2/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \quad P_1'+P_2'$$

$$=[P_2-u(E_1+E_2)/c^2]/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

$$=0$$

③ $T_{CM}=E_1'-m_0c^2+E_2'-m_0c^2$

$$=\frac{E_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}+\frac{E_2-P_2u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-2m_0c^2$$

$$=\frac{E_1+E_2-P_2u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-2m_0c^2$$

$$=\frac{(E_1+E_2)(1-u^2/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-2m_0c^2$$

$$=(E_1+E_2)\sqrt{1-u^2/c^2}-2m_0c^2$$

$$=\sqrt{(E_1+E_2)^2-(cP_2)^2}-2m_0c^2$$

$$\Rightarrow\quad T_{CM}=\sqrt{(E_1+E_2-cP_2)(E_1+E_2+cP_2)}-2m_0c^2$$

當 $T_{LAB}\gg m_0c^2$，

$E_2=m_0c^2+T_{LAB}=\sqrt{(cP_2)^2+(m_0c^2)^2}$

$E_2\approx T_{LAB}\approx cP_2$ 又 $E_1=m_0c^2$

$$\Rightarrow\quad T_{CM}\approx\left[2m_0c^2T_{LAB}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(2)在高能原子核反應，利用上式可求得在 LAB 系發生此反應的臨界（最小）能量T_{LAB}。在兩粒子系統，在 CM 系，欲使反應所需的能量最小且又滿足動量守恒的方式是正面碰撞且碰撞後連結在一起，則 CM 系所需的最低能量爲 T_{CM}，轉換回到 LAB 系，就可看到

$$T_{LAB} \approx T_{CM}^2 / 2m_0c^2 \qquad \#$$

1-9　考慮在 LAB 系中具有相同靜止質量m_0的運動質點 2 與靜止質點 1 之間的碰撞。證明在古典力學，兩質點在碰撞之後的速度向量的夾角恒爲 90°，並求相對論力學對此結果如何修正。提示：轉換到 CM系，處理碰撞，然後再轉換回 LAB 系。

解：(1)古典力學：

設質心座標相對於實驗室座標的速度爲 u

$$u = \frac{m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{v_2}{2}$$

質點 1，2 在質心座標的速度 v_1' 和 v_2' 爲

$$v_1' = 0 - u = -\frac{v_2}{2},\ v_2' = v_2 - u = \frac{v_2}{2}$$

碰撞之後，假設彈性碰撞，由能量及動量守恒可知在 CM 座標粒子之速度相等且方向相反，其大小和碰撞前一樣。現今把速度轉換回來到 LAB 座標，可得到

$$\tilde{v}_{1x} = \frac{v_2}{2}\cos\theta' + \frac{v_2}{2} = \frac{v_2}{2}(1 + \cos\theta'),$$

$$\tilde{v}_{1y} = \frac{v_2}{2}\sin\theta'$$

$$\tilde{v}_{2x} = \frac{v_2}{2}\cos(\theta' + \pi) + \frac{v_2}{2}$$

$$= \frac{v_2}{2}(1-\cos\theta'),$$

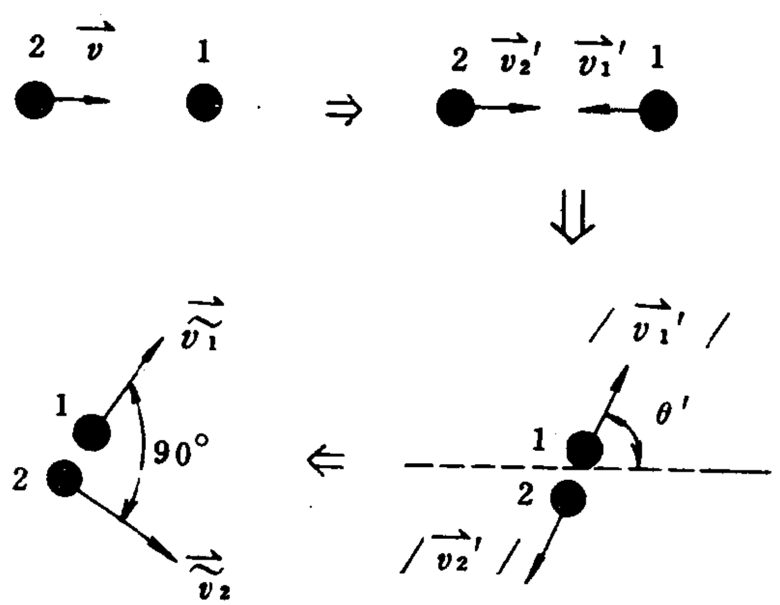
$$\tilde{v}_{2y} = \frac{v_2}{2}\sin(\theta'+\pi)$$

$$\vec{\tilde{\tilde{v}}}_1 \cdot \vec{\tilde{\tilde{v}}}_2 = \left(\frac{v_2}{2}\right)^2(1-\cos^2\theta')$$

$$+\left(\frac{v_2}{2}\right)^2(-\sin^2\theta')$$

$$= 0$$

因此碰撞後兩質點速度的夾角爲 90° #



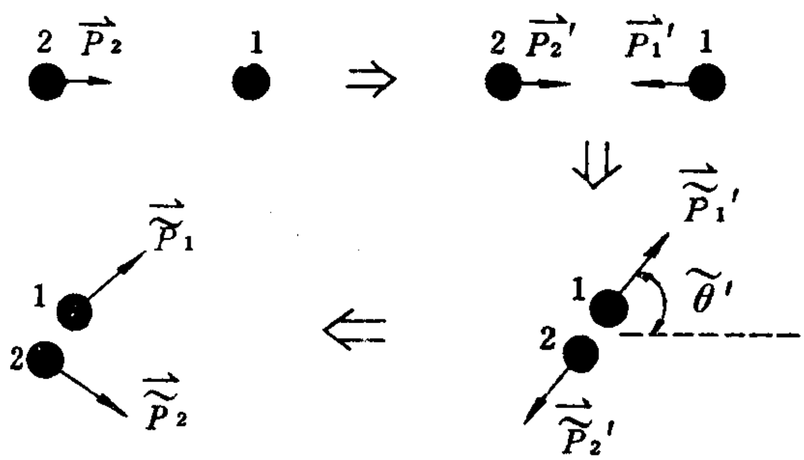
LAB 座標系　　C.M. 座標系

(2)相對論力學

由題 8 可知質心座標速度爲 $u=\dfrac{c^2P_2}{E_1+E_2}$。在質心系統

$$P_1'=\frac{-uE_1/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

$$P_2'=\frac{P_2-uE_2/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=-P_1'=\frac{uE_1/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$



碰撞之後，由動量守恒可知兩粒子之動量大小應相等，方向相反，再由彈性碰撞一能量守恒可知動量大小與能量應和碰撞前一樣，設 $\vec{\widetilde{P}}_1'$ 和 x' 軸之夾角爲 $\widetilde{\theta}'$，則

$$\widetilde{P}_{1x}'=P_2'\cos\widetilde{\theta}',\ \widetilde{P}_{1y}'=P_2'\sin\widetilde{\theta}',$$
$$\widetilde{P}_{2x}'=P_2'\cos(\widetilde{\theta}'+\pi),$$
$$\widetilde{P}_{2y}'=P_2'\sin(\widetilde{\theta}'+\pi)$$

$$\widetilde{E}_1'=E_1'=\frac{E_1}{(1-u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}},$$